Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Титова, В. Н. Шевченко, О минорах матрицы ограничений многоиндексных транспортных задач, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 4, 147–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1217>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:46:35

О минорах матрицы ограничений многоиндексных транспортных задач

© 2012 г. Е. Б. Титова, В. Н. Шевченко

Для матрицы $T_{s,k}(n)$ ограничений k -индексной s -арной транспортной задачи, в которой каждый индекс принимает n значений, рассмотрено поведение функции $\alpha_j(T_{s,k}(n))$, равной среднему значению квадрата минора j -го порядка матрицы $T_{s,k}(n)$. Найдены двусторонние оценки логарифма величины $\alpha_j(T_{s,k}(n))$. На их основе получена классификация значений порядка j , при которых $\alpha_j(T_{s,k}(n))$ стремится к бесконечности, и значений, при которых $\alpha_j(T_{s,k}(n))$ стремится к нулю. Дана оценка максимальной величины миноров матрицы $T_{s,k}(n)$. Найдена асимптотика функции $\alpha_{s,l}(T_{s,k}(n))$, равной среднему значению квадрата минора рангового порядка базисной системы строк матрицы $T_{s,k}(n)$. Большинство этих результатов были анонсированы ранее без доказательств.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 09-01-00545-а.

1. Обозначим через $\mathbf{Z}$ кольцо целых чисел, через $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел, через $\mathbf{F}^{p \times q}$ — множество $(p \times q)$ -матриц с элементами из множества F , через $\mathbf{1}^{p \times q}$ и $\mathbf{0}^{p \times q}$ — $(p \times q)$ -матрицы, у которых все элементы равны 1 и 0 соответственно, через E_n — единичную матрицу n -го порядка, через $e_j(n)$ — j -й столбец единичной матрицы E_n .

Если $I \subseteq \{1, \dots, p\}$ и $J = \{1, \dots, q\}$, то через $A(I, J)$ обозначим подматрицу матрицы A со строками из множества I и столбцами из множества J , через $M_{kv}(A)$ — множество миноров k -го порядка матрицы A , равных v по абсолютной величине, то есть

$$M_{kv}(A) = \{(I, J) \mid |I| = |J| = k, |\det A(I, J)| = v\},$$

и положим

$$\begin{aligned} x_{kv} &= |M_{kv}(A)|, \\ \delta_k(A) &= \max\{v \mid x_{kv} \neq 0\}, \\ \delta(A) &= \max\{\delta_k(A), k = 1, \dots, r\}, \end{aligned}$$

где r — ранг матрицы A . Обозначим матрицу, транспонированную к A , через $A^\top$, и положим

$$\det(\lambda E_q - A^\top A) = \sum_{k=0}^q (-1)^k s_k(A) \lambda^{q-k} = \lambda^{q-r} \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i)^{m_i}, \quad (1)$$

где $\lambda_i, i = 1, \dots, l$, — различные положительные собственные числа с кратностями m_i .

Хорошо известно (см., например, [1]), что ненулевые собственные числа матриц AA^T и $A^T A$ совпадают, причем, если f — ненулевой собственный вектор для $A^T A$, соответствующий ненулевому собственному значению λ , то Af — собственный вектор для AA^T с тем же собственным значением.

Из формулы Бине–Коши (см., например, [1, 2]) следует, что

$$s_k(A) = \sum_{|I|=k} \sum_{|J|=k} \det^2 A(I, J). \quad (2)$$

В частности, если $r = p$, то

$$\det A^T A = \sum_{v=1}^{\delta_r(A)} v^2 x_{kv}(A), \quad (3)$$

что позволяет оценить величину

$$\alpha_r(A) = s_r(A) \binom{q}{r}^{-1},$$

равную среднему значению квадрата базисного минора матрицы A .

Если матрица A не является унимодулярной, то для оценки роста знаменателя необходимо знать поведение величины $\delta(A)$. Для полиэдра

$$\mathbf{P}(A, b) = \{Ax = b, x \geq 0\},$$

достаточно рассмотреть лишь базисные миноры матрицы A . Если же многогранник задан в форме неравенств, то необходима информация о минорах произвольного порядка.

В теории линейных неравенств [3] известен алгоритм построения системы линейных относительно параметра b неравенств, дающий критерий непустоты полиэдра $\mathbf{P}(A, b)$. Так как коэффициенты этих неравенств связаны с минорами $(r-1)$ -го порядка матрицы A , понятен интерес к оценке величины $\delta_{r-1}(A)$.

Множество

$$R_A = \{x \in \mathbf{Q}^q \mid A^T Ax = 0\} = \{x \in \mathbf{Q}^q \mid Ax = 0\}$$

назовем правым нуль-пространством матрицы A , а множество

$$R_A^Z = R_A \cap \mathbf{Z}^N$$

— правым модулем матрицы A .

Будем считать, что базис пространства R_A задан матрицей $B \in \mathbf{Z}^{q \times (q-r)}$. Ясно, что множество целочисленных линейных комбинаций столбцов матрицы B содержится в R_A^Z , но, вообще говоря, с ним не совпадает. Это выполняется тогда и только тогда, когда матрица B унимодулярна (то есть, наибольший общий делитель базисных миноров равен единице); в этом случае назовем ее базисом модуля R_A^Z .

Известно, что если матрица A содержит базисную систему строк $A^{\mathcal{A}}$, имеющую минор порядка r , равный 1, то (см., например, [4])

$$|\det A^{\mathcal{A}}(\mathcal{J})| = |\det R_A^Z(\bar{\mathcal{J}})|,$$

где $\bar{\mathcal{J}}$ — множество, дополнительное к $\mathcal{J}$, и, следовательно, количественный анализ базисных миноров матриц $A^{\mathcal{A}}$ и R_A^Z равносильен.

В настоящей статье продолжены исследования из [5] для матрицы $A = T_{s,k}(n)$ ограничений многоиндексной транспортной задачи (ТЗ), реализующие предложенное в [6] использование найденного там многочлена матрицы AA^T . Если A совпадает с матрицей $T_{s,k}(n)$ многоиндексной транспортной задачи, то $\det(\lambda E_q - AA^T)$ совпадает (см. [6]) с многочленом

$$\Delta(\lambda; s, k, n) = \lambda^{\sum_{i=0}^{s-1} \binom{k}{i}(n-1)^{k-i}} \left(\prod_{j=s}^k \left(\lambda - \binom{j}{s} n^s \right) \right)^{\binom{k}{j}(n-1)^{k-j}}. \quad (4)$$

2. Далее рассмотрим многогранники транспортных задач, задаваемые соотношением $Tx = b$ (или $Tx \leq b$), $x \geq 0$, где вектор x имеет k -индексные компоненты $x_J = x_{j_1, \dots, j_k}$, $j_i \in \{1, \dots, n_i\}$, $i = 1, \dots, k$, а строки матрицы $T = T_{s,k}(n_1, \dots, n_k)$ разбиты на ярусы T_I , где I есть s -элементное подмножество множества $\{1, \dots, k\}$, задающее набор индексов j_i , $i \in I$, по которым ведется суммирование, первые из которых, $I_1 = \{1, \dots, s\}$ соответствуют сумме

$$T_{I_1} x = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_s=1}^{n_s} x_{j_1, \dots, j_k}. \quad (5)$$

В [6] ярусы T_I выражены через кронекерово произведение матриц $\mathbf{1}^{1 \times n}$ и E_n следующим образом:

$$T_I = A_I(1, n_1) \otimes \dots \otimes A_I(k, n_k),$$

где $A_I(v, n_v) = \mathbf{1}^{1 \times n_v}$ при $v \in I$ и $A_I(v, n_v) = E_{n_v}$ при $v \notin I$. В частности,

$$T_{I_1} = \mathbf{1}^{1 \times n_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}^{1 \times n_s} \otimes E_{n_{s+1}} \otimes \dots \otimes E_{n_k}.$$

Напомним, что кронекеровым произведением (определение и свойства см., например, в [2]), $(m \times n)$ -матрицы A и $(p \times q)$ -матрицы B называется $(pm \times qn)$ -матрица, имеющая блочный вид

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Кронекерово произведение обладает следующими свойствами:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD, \\ (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$$

В матрице $T_{s,k}(n_1, \dots, n_k)$ число блоков равно $\binom{k}{s}$, число столбцов равно

$$N = \prod_{i=1}^k n_i,$$

и число строк равно

$$M = \sigma_{k-s}(n_1, \dots, n_k),$$

где

$$\sigma_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_s}$$

есть s -я элементарная симметрическая функция от $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, причем

$$\sigma_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 1.$$

Итак, обычная транспортная задача в этих обозначениях имеет матрицу

$$T_{1,2}(n_1, n_2) = \left[\frac{\mathbf{1}^{1 \times n_1} \otimes E_{n_2}}{E_{n_1} \otimes \mathbf{1}^{1 \times n_2}} \right].$$

Для нее Симмонард и Хедли нашли (см., например [7]) число базисов, воспользовавшись вполне унимодулярностью матрицы $T_{1,2}(n_1, n_2)$.

При $k \geq 3$ в транспортном многограннике могут появиться вершины, имеющие нецелые координаты, и для оценки роста знаменателя необходимо знать поведение величины $\delta(T_{s,k})$.

Пусть

$$Q_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

есть матрица n -го порядка, и q_j есть ее j -й столбец. Обозначим через q_J , где $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, J -й столбец матрицы $Q = Q_{n_1} \otimes \dots \otimes Q_{n_k}$. Очевидно, что

$$q_J = q(j_1, n_1) \otimes \dots \otimes q(j_k, n_k).$$

Далее используем сокращенное обозначение

$$T_{s,k}(n_1, \dots, n_k) = T_{s,k},$$

если это не будет приводить к недоразумению.

Предложение 1 ([6]). *Столбцы матрицы $Q = Q_{n_1} \otimes \dots \otimes Q_{n_k}$ составляют базис из собственных векторов матрицы $T_{s,k}^\top T_{s,k}$.*

Разумеется, собственные векторы можно выбирать и по-другому, однако предложенный способ дает целочисленную и симметричную матрицу Q_n . Для матриц $T_{s,k} T_{s,k}^\top$ непосредственно воспользоваться кронекеровым произведением удастся лишь в случае $s = k - 1$.

Предложение 2 ([8]). *Столбцы матрицы $Q = Q_k \otimes Q_n$ составляют базис из собственных векторов матрицы $T_{k-1,k}^\top T_{k-1,k}$.*

Матрицу, получающуюся из Q_n заменой ее первого столбца на e_1 , обозначим через $\bar{Q}_n$, и положим

$$\bar{Q} = \bar{Q}_{n_1} \otimes \dots \otimes \bar{Q}_{n_k}.$$

Удалим из $\bar{Q}$ все те ее столбцы $\bar{q}_j$, для которых J не удовлетворяет условию, что для всех τ найдется $\mu \in I_\tau$, $j_\mu \neq 1$, и оставшуюся после этого матрицу обозначим через $R_{s,k}$. Эта матрица является базисом модуля R_T^Z (см. [9]).

Известно, что матрица $T_{s,k}$ содержит базисную систему строк $T_{s,k}^{\mathcal{A}}$, $|\mathcal{A}| = r_{s,k}$, имеющую минор порядка $r_{s,k}$, равный 1. Очевидно, что

$$T_{s,k} R_{s,k} = 0 \iff T_{s,k}^{\mathcal{A}} R_{s,k} = 0.$$

Известно [4], что

$$|\det(R_{s,k}^T R_{s,k})| = |\det(T_{s,k}^{\mathcal{A}} T_{s,k}^{\mathcal{A}T})|. \quad (6)$$

Поэтому при исследовании поведения среднего значения $\alpha_{\mathcal{A}}(T_{s,k}(n))$ квадрата минора матрицы $T_{s,k}^{\mathcal{A}}(n)$ мы используем значение определителя Грама матрицы $R_{s,k}$.

В настоящей работе нами получены двусторонние оценки логарифма среднего значения $\alpha_j(T_{s,k}(n))$ квадрата минора матрицы $T_{s,k}(n)$ произвольного порядка j и доказано, что $\alpha_j(T_{s,k}(n)) \rightarrow \infty$ с экспоненциальной скоростью при $j \sim \theta r$, $e/\binom{k}{s} < \theta \leq 1$, где e — основание натуральных логарифмов, и $\alpha_j(T_{s,k}(n)) \rightarrow 0$ с экспоненциальной скоростью при $j \sim \theta r$, $0 \leq \theta < e/\binom{k}{s}$. Вычислен определитель Грама матрицы $R_{s,k}$, найдена асимптотика величины $\alpha_{\mathcal{A}}(T_{s,k}(n))$ и доказано, что $\alpha_{\mathcal{A}}(T_{s,k}(n)) \rightarrow \infty$ с экспоненциальной скоростью. Результаты были анонсированы в [10–16].

3. Рассмотрим поведение среднего значения квадрата миноров матрицы $T_{s,k}(n)$ произвольного порядка j . В [16] были доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. Для любого $j = 1, \dots, r$ справедливы неравенства

$$j \left(\ln \frac{j}{e n^{k-s}} - \frac{f_n}{j} \right) \leq \ln \alpha_j(T_{s,k}(n)) \leq j \left(\ln \frac{j}{e n^{k-s}} + \gamma_n + \frac{\ln \sqrt{2\pi e j}}{j} \right),$$

где

$$f_n = s \binom{k}{s+1} (n-1)^{k-s-1} (1 + \varepsilon_n) \left(\ln \binom{k}{s} + (k-s) \ln n \right) = o(r).$$

Теорема 1. При фиксированных $k \geq 3$, $1 \leq s \leq k-1$, для средней величины $\alpha_j(T_{s,k}(n))$ квадрата минора j -го порядка матрицы $T_{s,k}(n)$ справедливы следующие утверждения:

- (1) $\alpha_j(T_{s,k}(n)) \rightarrow 0$ при $j = o(r)$;
- (2) $\alpha_j(T_{s,k}(n)) \rightarrow 0$ при $j \sim \theta r$, где $0 < \theta < e/\binom{k}{s}^{-1}$;
- (3) $\alpha_j(T_{s,k}(n)) \rightarrow \infty$ при $j \sim \theta r$, где $e/\binom{k}{s}^{-1} < \theta \leq 1$.

Следствие 1. При $\binom{k}{s} \geq e^2$, среднее значение модуля $\varphi_r(T_{s,k}(n))$ минора рангового порядка матрицы $T_{s,k}(n)$ стремится к бесконечности с экспоненциальной скоростью.

Для доказательства достаточно воспользоваться очевидным неравенством

$$s_r(T_{s,k}(n)) \leq \delta_r(T_{s,k}(n)) \varphi_r(T_{s,k}(n)).$$

Аналогично доказывается следствие 2.

Следствие 2. При $\binom{k}{s} \geq e^2$, среднее значение модуля $\varphi_{r-1}(T_{s,k}(n))$ минора предрангового порядка матрицы $T_{s,k}(n)$ стремится к бесконечности с экспоненциальной скоростью.

Следует отметить, что в случае, когда значение $k-s$ невелико, удастся получить асимптотику самой величины $\alpha_j(T_{s,k}(n))$ (см. [10]). При $k=3$, как при $s=1$, так и при $s=2$, в [17] установлен экспоненциальный рост величины $\delta_r(T_{s,3}(n))$ для ранговых миноров.

4. Вычислим определитель Грама матрицы $R_{s,k}$. Если

$$Q_n^* = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^{1 \times (n-1)} \\ -E_{n-1} \end{bmatrix}$$

есть матрица порядка $n \times (n-1)$, то заметим, что

$$Q_n = [\mathbf{1}^{n \times 1} \mid Q_n^*], \quad \bar{Q}_n = [e_1(n) \mid Q_n^*].$$

Лемма 2 ([15]). *Базис правого модуля матрицы $T_{1,k}(n_1, \dots, n_k)$ планарной транспортной задачи составляют столбцы матрицы $R_{1,k}(n_1, \dots, n_k) = Q_{n_1}^* \otimes \dots \otimes Q_{n_k}^*$. Характеристический многочлен есть*

$$\Delta(R_{1,k}^\top(n_1, \dots, n_k) R_{1,k}(n_1, \dots, n_k)) = (\lambda - n_1 \dots n_k) \times \prod_{i=1}^k (\lambda - n_1 \dots n_{i-1} n_{i+1} \dots n_k)^{n_i-2} \dots \prod_{i=1}^k (\lambda - n_i)^{\prod_{j=1}^k (n_j-2)} (\lambda - 1)^{\prod_{i=1}^k (n_i-2)}.$$

Следствие 3. *При $n_1 = \dots = n_k = n$,*

$$\det(R_{1,k}^\top R_{1,k}) = n^{k(n-1)^{k-1}}.$$

Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Для произвольных k и $1 \leq s \leq k-1$, матрицу правого модуля можно представить в виде двух столбцовых блоков:*

$$R_{s,k}(n_1, \dots, n_k) = [Q_{n_1}^* \otimes R_{s,k-1}(n_2, \dots, n_k) \mid e_1(n_1) \otimes R_{s-1,k-1}(n_2, \dots, n_k)],$$

где

$$R_{1,k}(n_1, \dots, n_k) = Q_{n_1}^* \otimes \dots \otimes Q_{n_k}^*, \\ R(k, k, n_1, \dots, n_k) = Q_{n_1 \dots n_k}^*.$$

Далее везде будем считать, что $n_1 = \dots = n_k = n$.

Теорема 2. *Справедлива рекурсивная формула*

$$\det(R_{s,k}^\top R_{s,k}) = n^{\binom{k-1}{s-1}(n-1)^{k-s}} \det^{n-1}(R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) \det(R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1}).$$

Доказательство. Рассмотрим произведение матриц

$$R_{s,k}^\top R_{s,k} = \left[\frac{Q_n^{*\top} \otimes R_{s,k-1}^\top}{e_1(n)^\top \otimes R_{s-1,k-1}^\top} \right] [Q_n^* \otimes R_{s,k-1} \mid e_1(n) \otimes R_{s-1,k-1}] \\ = \left[\frac{(Q_n^{*\top} Q_n^*) \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1})}{(e_1(n)^\top Q_n^*) \otimes (R_{s-1,k-1}^\top R_{s,k-1})} \mid \frac{(Q_n^{*\top} e_1(n)) \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s-1,k-1})}{(e_1(n)^\top e_1(n)) \otimes (R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1})} \right].$$

Так как

$$\begin{aligned} Q_n^{*\top} e_1(n) &= \mathbf{1}^{(n-1) \times 1}, \\ e_1(n)^\top Q_n^* &= \mathbf{1}^{1 \times (n-1)}, \\ e_1(n)^\top e_1(n) &= 1, \end{aligned}$$

получаем, что

$$R_{s,k}^\top R_{s,k} = \left[\frac{(Q_n^{*\top} Q_n^*) \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1})}{\mathbf{1}^{1 \times (n-1)} \otimes (R_{s-1,k-1}^\top R_{s,k-1})} \middle| \frac{\mathbf{1}^{(n-1) \times 1} \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s-1,k-1})}{R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1}} \right],$$

где

$$\begin{aligned} Q_n^{*\top} Q_n^* &= [\mathbf{1}^{(n-1) \times 1} \mid -E_{n-1}] \left[\frac{\mathbf{1}^{1 \times (n-1)}}{-E_{n-1}} \right] \\ &= \mathbf{1}^{(n-1) \times (n-1)} + E_{n-1}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что собственными числами матрицы $Q_n^{*\top} Q_n^*$ являются n кратности 1 и 1 кратности $n-2$, а матрица

$$Q_{n-1} = [\mathbf{1}^{(n-1) \times 1} \mid Q_{n-1}^*]$$

является для нее базисом из собственных векторов, причем столбец $\mathbf{1}^{(n-1) \times 1}$ соответствует собственному числу n . Отсюда следует, что

$$(Q_n^{*\top} Q_n^*) Q_{n-1} = Q_{n-1} D_{n-1},$$

где

$$D_{n-1} = \text{diag}(n, 1, \dots, 1)_{n-1}.$$

Рассмотрим трансформирующую матрицу

$$P = P_{r,s,k} = \left[\frac{Q_{n-1} \otimes \text{Erg}_{s,k-1}}{\mathbf{0}} \middle| \frac{\mathbf{0}}{\text{Erg}_{s-1,k-1}} \right].$$

Вычислим матрицу $P^{-1}(R_{s,k}^\top R_{s,k})P$, подобную матрице $R_{s,k}^\top R_{s,k}$:

$$\begin{aligned} &P^{-1}(R_{s,k}^\top R_{s,k})P \\ &= \left[\frac{Q_{n-1}^{-1} \otimes \text{Erg}_{s,k-1}}{\mathbf{0}} \middle| \frac{\mathbf{0}}{\text{Erg}_{s-1,k-1}} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{(Q_n^{*\top} Q_n^*) \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1})}{\mathbf{1}^{1 \times (n-1)} \otimes (R_{s-1,k-1}^\top R_{s,k-1})} \middle| \frac{\mathbf{1}^{(n-1) \times 1} \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s-1,k-1})}{R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1}} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{Q_{n-1} \otimes \text{Erg}_{s,k-1}}{\mathbf{0}} \middle| \frac{\mathbf{0}}{\text{Erg}_{s-1,k-1}} \right] \\ &= \left[\frac{Q_{n-1}^{-1} \otimes \text{Erg}_{s,k-1}}{\mathbf{0}} \middle| \frac{\mathbf{0}}{\text{Erg}_{s-1,k-1}} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{(Q_{n-1} D_{n-1}) \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1})}{(\mathbf{1}^{1 \times (n-1)} Q_{n-1}) \otimes (R_{s-1,k-1}^\top R_{s,k-1})} \middle| \frac{\mathbf{1}^{(n-1) \times 1} \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s-1,k-1})}{R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1}} \right] \\ &= \left[\frac{D_{n-1} \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1})}{(\mathbf{1}^{1 \times (n-1)} Q_{n-1}) \otimes (R_{s-1,k-1}^\top R_{s,k-1})} \middle| \frac{(Q_{n-1}^{-1} \mathbf{1}^{(n-1) \times 1}) \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s-1,k-1})}{R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1}} \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$Q_{n-1}^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2-n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{1}^{1 \times (n-1)} Q_{n-1} = (n-1) e_1^\top (n-1),$$

$$Q_{n-1}^{-1} \mathbf{1}^{(n-1) \times 1} = e_1 (n-1),$$

тогда

$$\begin{aligned} & P^{-1}(R_{s,k}^\top R_{s,k})P \\ &= \left[\begin{array}{c|c} D_{n-1} \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) & e_1(n-1) \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s-1,k-1}) \\ \hline (n-1)e_1^\top(n-1) \otimes (R_{s-1,k-1}^\top R_{s,k-1}) & R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} n(R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) & \mathbf{0} & R_{s,k-1}^\top R_{s-1,k-1} \\ \hline \mathbf{0} & E_{n-2} \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) & \mathbf{0} \\ \hline (n-1)(R_{s-1,k-1}^\top R_{s,k-1}) & \mathbf{0} & R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Определители подобных матриц равны, поэтому

$$\begin{aligned} \det(R_{s,k}^\top R_{s,k}) &= \det(P^{-1}(R_{s,k}^\top R_{s,k})P) \\ &= \det[E_{n-2} \otimes (R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1})] \\ &\quad \times \det \left[\begin{array}{c|c} n(R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) & R_{s,k-1}^\top R_{s-1,k-1} \\ \hline (n-1)(R_{s-1,k-1}^\top R_{s,k-1}) & R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1} \end{array} \right] \\ &= \det^{n-2}(R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) \\ &\quad \times \det \left[\begin{array}{c|c} n(R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) & R_{s,k-1}^\top R_{s-1,k-1} \\ \hline (n-1)(R_{s-1,k-1}^\top R_{s,k-1}) & R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, заметим, что матрица

$$R_{s-1,k-1} = R_{s,k-1} \left[\begin{array}{c} E_{rg_{s-1,k-1}} \\ \hline \mathbf{0}_{rg_{s,k-1}-r_{s-1,k-1} \otimes rg_{s-1,k-1}} \end{array} \right]$$

с точностью до перестановки столбцов. Отсюда видно, что каждый столбец из правого верхнего блока матрицы из правой части (7) присутствует с коэффициентом n и в левом верхнем блоке этой матрицы, а каждый столбец из правого нижнего блока присутствует с коэффициентом $(n-1)$ и в левом нижнем блоке. Вычтем из каждого столбца правой полосы этой матрицы соответствующий столбец левой полосы с коэффициентом $1/n$.

Тогда получим, что

$$\begin{aligned}
 \det(R_{s,k}^\top R_{s,k}) &= \det^{n-2}(R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) \\
 &\quad \times \det \left[\begin{array}{c|c} n(R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) & \mathbf{0} \\ \hline (n-1)(R_{s-1,k-1}^\top R_{s,k-1}) & \frac{1}{n}(R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1}) \end{array} \right] \\
 &= \det^{n-2}(R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) n^{rg_{s,k-1}} \det(R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) \left(\frac{1}{n}\right)^{rg_{s-1,k-1}} \\
 &\quad \times \det(R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1}) \\
 &= n^{rg_{s,k-1} - rg_{s-1,k-1}} \det^{n-1}(R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) \det(R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1}).
 \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
 rg_{s,k} &= n^k - r_{s,k} \\
 &= n^k - \sum_{i=0}^{k-s} \binom{k}{i} (n-1)^i,
 \end{aligned}$$

мы видим, что

$$\begin{aligned}
 rg_{s,k-1} - rg_{s-1,k-1} &= \left[n^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-s-1} \binom{k}{i} (n-1)^i \right] - \left[n^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-s} \binom{k}{i} (n-1)^i \right] \\
 &= \binom{k-1}{k-s} (n-1)^{k-s} \\
 &= \binom{k-1}{s-1} (n-1)^{k-s}.
 \end{aligned}$$

Отсюда окончательно получаем, что

$$\det(R_{s,k}^\top R_{s,k}) = n^{\binom{k-1}{s-1}(n-1)^{k-s}} \det^{n-1}(R_{s,k-1}^\top R_{s,k-1}) \det(R_{s-1,k-1}^\top R_{s-1,k-1}).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$\det R_{s,k}^\top R_{s,k} = n^s \binom{k}{s} (n-1)^{k-s}.$$

Доказательство. По следствию 3,

$$\det R_{1,k}^\top R_{1,k} = n^{k(n-1)^{k-1}}.$$

Допустим, что формула верна для $(s-1, k-1)$ и $(s, k-1)$, и докажем ее справедливость для s и k . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
 \det R_{s,k}^\top R_{s,k} &= n^{\binom{k-1}{s-1}(n-1)^{k-s}} n^{s \binom{k-1}{s} (n-1)^{k-s}} n^{(s-1) \binom{k-1}{s-1} (n-1)^{k-s}} \\
 &= n^{s \left[\binom{k-1}{s-1} + \binom{k-1}{s} \right] (n-1)^{k-s}} \\
 &= n^{s \binom{k}{s} (n-1)^{k-s}}.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

5. Выделим в матрице $T_{s,k}$ базисную систему строк $T_{s,k}^{\mathcal{A}}$, $|\mathcal{A}| = r_{s,k}$, и рассмотрим поведение среднего значения $\alpha_{\mathcal{A}}(T_{s,k}(n))$ квадрата минора матрицы $T_{s,k}^{\mathcal{A}}(n)$.

Базисную систему строк можно представить в виде

$$T_{s,k}^{\mathcal{A}}(n_1, \dots, n_k) = \left[\frac{\mathbf{1}(1, n_1) \otimes T_{(s-1, k-1)}^{\mathcal{A}}(n_2, \dots, n_k)}{E_{n_1-1, n_1} \otimes T_{(s, k-1)}^{\mathcal{A}}(n_2, \dots, n_k)} \right],$$

где $E_{n-1, n}$ — единичная матрица порядка $(n-1) \times n$ с удаленной последней строкой.

Лемма 4. При фиксированном k и $1 \leq s \leq k-1$ и $n \rightarrow \infty$ для средней величины $\alpha_{\mathcal{A}}(T_{s,k}(n))$ квадрата минора рангового порядка базисной системы строк матрицы $T_{s,k}$ справедливо равенство

$$\alpha_{\mathcal{A}}(T_{s,k}(n)) = (n-1)^{(k-s)/2} \left[\frac{\binom{k}{s}}{e} \right]^{\binom{k}{s}(n-1)^{k-s}} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \binom{N}{r} &= \binom{n^k}{r} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{n^k e}{\binom{k}{s}(n-1)^{k-s}} \right]^{\binom{k}{s}(n-1)^{k-s}} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

По теореме 3 и формуле (6),

$$\det(T_{s,k}^{\mathcal{A}}(n) T_{s,k}^{\mathcal{A}\top}(n)) = n^s \binom{k}{s} (n-1)^{k-s}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{A}}(T_{s,k}(n)) &= \det(T_{s,k}^{\mathcal{A}}(n) T_{s,k}^{\mathcal{A}\top}(n)) \binom{N}{r}^{-1} \\ &= \sqrt{2\pi r} \left[\frac{\binom{k}{s}}{e} \right]^{\binom{k}{s}(n-1)^{k-s}} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{(k-s)\binom{k}{s}(n-1)^{k-s}} (1 + o(1)) \\ &= (n-1)^{(k-s)/2} \left[\frac{\binom{k}{s}}{e} \right]^{\binom{k}{s}(n-1)^{k-s}} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 4 ([14]). Если $1 \leq s < k$ и $k \geq 3$, то $\alpha_{\mathcal{A}}(T_{s,k}(n)) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ с экспоненциальной скоростью.

Список литературы

1. Маркус М., Минк Х., *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*. Наука, Москва, 1972.
2. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А., *Матрицы и вычисления*. Наука, Москва, 1984.
3. Черников С. Н., *Линейные неравенства*. Наука, Москва, 1968.

4. Шевченко В. Н., Многогранники многоиндексных транспортных задач: алгебраический подход. В сб.: *Материалы конференции «Дискретный анализ и исследование операций»*. ИМСО РАН, Новосибирск, 2004, с. 64–70.
5. Шевченко В. Н., Об исследовании миноров матрицы при помощи ее сингулярного многочлена. В сб.: *Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения»* (Касим-Заде О. М., ред.). Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, Москва, 2007, с. 31–34.
6. Шевченко В. Н., Характеристические многочлены многоиндексных транспортных задач. *Дискретная математика* (2003) **15**, №2, 83–88.
7. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., *Многогранники, графы, оптимизация*. Наука, Москва, 1981.
8. Титова Е. Б., Шевченко В. Н., Среднее значение квадрата минора матрицы ограничений аксиальной транспортной задачи. *Автоматика и телемеханика* (2004) №2, 113–117.
9. Титова Е. Б., Шевченко В. Н., Базис правого модуля матрицы ограничений многоиндексной транспортной задачи. В сб.: *Материалы конференции «Математика и кибернетика 2003»*, Нижний Новгород, 2003, с. 264–265.
10. Титова Е. Б., О среднем значении квадрата базисного минора матрицы ограничений многоиндексной транспортной задачи. В сб.: *Тезисы докладов XV международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики»*. Отечество, Казань, 2008, с. 112.
11. Титова Е. Б., Шевченко В. Н., Асимптотика среднего значения квадрата минора матрицы ограничений трехиндексной планарной транспортной задачи. В сб.: *Материалы III Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения»*. Изд-во ОмГТУ, Омск, 2006, с. 127.
12. Шевченко В. Н., Титова Е. Б., Средняя величина миноров k -индексной s -валентной транспортной задачи. *Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования* (2003) **10**, 248.
13. Титова Е. Б., Шевченко В. Н., Среднее значение квадрата минора любого порядка матрицы ограничений многоиндексной транспортной задачи. В сб.: *Материалы XIV Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем»*. Изд-во НГПУ, Нижний Новгород, 2003, с. 81–82.
14. Титова Е. Б., Асимптотика среднего значения квадрата минора базисной подматрицы ограничений многоиндексной транспортной задачи. *Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования* (2007) **11**, 215–216.
15. Титова Е. Б., Шевченко В. Н., О минорах матрицы ограничений k -индексной s -арной транспортной задачи. В сб.: *Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем»*. МАКС, Москва, 2009, с. 298–301.
16. Титова Е. Б., Шевченко В. Н., Левые и правые нуль-пространства планарной многоиндексной транспортной задачи. В сб.: *Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения»*. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, Москва, 2004, с. 229–231.
17. Ильичев А. П., *Исследование многогранников многоиндексных транспортных задач*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Горький, 1988.

Статья поступила 17.02.2010.