Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Комбаров, О минимальных схемах для линейных функций в некоторых базисах, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 1, 33–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1219>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:55:35

О минимальных схемах для линейных функций в некоторых базисах

© 2013 г. Ю. А. Комбаров

В данной работе рассматриваются реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе B , состоящем из двухвходовых функциональных элементов, реализующих нелинейные функции, и инвертора. Вес двухвходового элемента в базисе B принимается равным единице, а вес инвертора — нулю.

В работе дано описание всех минимальных схем, реализующих линейные функции в базисе B , а именно, показано, что все такие схемы имеют определенный блочный вид.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 11-01-00508, и Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения», проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем».

В алгебре логики и в математической кибернетике один из наиболее изученных классов булевых функций составляют линейные функции

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus c, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c \in \{0, 1\},$$

символ $\oplus$ означает сложение по модулю два. Для этих функций, в частности, установлена сложность их реализации схемами из функциональных элементов [1] в некоторых базисах. В [2] установлено, что

$$L(x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus c) = 4n - 4$$

в базисе $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$ и

$$L(x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus c) = 7n - 7$$

в базисах $\{x \& y, \bar{x}\}$ и $\{x \vee y, \bar{x}\}$; здесь через $L(f)$ обозначается сложность реализации функции f , то есть наименьшее число функциональных элементов в схеме, реализующей f . Дальнейшие результаты в этом направлении таковы:

$$L(x_1 \oplus \dots \oplus x_n) = 4n - 4$$

в базисе $\{\overline{x \& y}\}$ (см. [3]);

$$L(x_1 \oplus \dots \oplus x_n) = 4n - 4$$

в базисе $\{x \rightarrow y, \bar{x}\}$ (см. [4]);

$$L(x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1) = 4n - 4$$

при четных n и

$$L(x_1 \oplus \dots \oplus x_n) = 4n - 4$$

при нечетных n в базисе $\{\bar{x} \& y, \bar{x}\}$ (см. [5]). Для базиса $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$ известна структура всех минимальных схем, реализующих линейные функции. Соответствующий результат сформулирован в [6], а доказательство можно найти в [7].

В данной работе рассматриваются минимальные реализации функций

$$\begin{aligned} l_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \oplus \dots \oplus x_n, \\ \bar{l}_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

схемами в базисе

$$B = \{E_1, \dots, E_k, E^-\},$$

где k — любое число из $\{1, 2, \dots, 6\}$, а элементы $E_1, \dots, E_k$ — это различные двухвходовые функциональные элементы, реализующие любые k функций из $\{x \& y, x \vee y, \bar{x} \& y, \bar{x} \vee y, x \& y \oplus 1, x \& y \oplus x \oplus y \oplus 1\}$. При подсчете сложности схем мы будем учитывать только двухвходовые элементы.

Пусть S — схема в базисе B . Число всех входящих в нее двухвходовых элементов будем называть сложностью схемы и обозначать $L(S)$. Будем говорить, что S — минимальная схема для функции f , если S реализует f , причем для любой другой схемы S' , реализующей f , выполняется неравенство $L(S) \leq L(S')$, и среди всех схем, реализующих f и имеющих сложность $L(S)$, схема S содержит наименьшее число элементов.

Пусть V — выход функционального элемента E_1 или вход схемы, а W — вход функционального элемента E_2 . Будем говорить, что между элементами E_1 и E_2 (или между соответствующим входом схемы и E_2) находится инвертор E^- , если V подается на вход элемента E^- , а выход инвертора E^- подается на W (и, быть может, на какие-либо входы функциональных элементов, отличные от W). Будем говорить, что V связан с W , если V подается на W или если между E_1 (или входом схемы) и E_2 есть инвертор. Будем называть двухвходовой функциональный элемент E верхним, если оба его входа связаны со входами схемы. Такой функциональный элемент существует в любой схеме по соображениям монотонной нумерации элементов в схеме [8].

Будем говорить, что в схеме S можно выделить стандартный блок, если в ней можно выбрать две вершины (вершинами в данном случае будем называть входы схемы или выходы элементов) V_1, V_2 и три двухвходовых функциональных элемента E_1, E_2 и E_3 так, что вершина V_1 связана со входами элементов E_1 и E_2 , вершина V_2 связана со входами элементов E_1 и E_2 , выход элемента E_1 связан со входом элемента E_3 , выход элемента E_2 связан со входом элемента E_3 , выходы элементов E_1 и E_2 не связаны со входами никаких других элементов схемы S (кроме E_3), при подаче на вершины V_1 и V_2 функций x_1 и x_2 на выходе элемента E_3 реализуется функция $x_1 \oplus x_2$ или $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$, и выход всякого инвертора, находящегося между вершиной V_1 и входами элементов E_1 и E_2 , между вершиной V_2 и входами элементов E_1 и E_2 , и между выходами элементов E_1, E_2 и входами элемента E_3 , подается ровно на один вход одного функционального элемента. Подсхему, состоящую из элементов E_1, E_2, E_3 , а также всех инверторов, находящихся между вершиной V_1 и входами элементов E_1 и E_2 , между вершиной V_2 и входами

элементов E_1 и E_2 , и между выходам элементов E_1, E_2 и входами элемента E_3 будем называть стандартным блоком. Вершины V_1 и V_2 будем называть входными вершинами стандартного блока.

Стандартный блок B в схеме S будем называть верхним, если обе его входные вершины являются входами схемы. Применительно к верхнему стандартному блоку B схемы S введем операцию стандартной редукции, заключающуюся в том, что одна из входных вершин блока B (и схемы S) отождествляется с выходом блока B и сохраняется как вход редуцированной схемы S' (получающейся из S), а вторая входная вершина и все элементы блока B удаляются из S .

Несложно заметить, что из определения стандартной редукции вытекают следующие утверждения.

Лемма 1. Если схема S реализует линейную функцию n переменных, $n \geq 2$, и к ней применяется операция стандартной редукции, то редуцированная схема S' реализует линейную функцию $n - 1$ переменных.

Лемма 2. Если в редуцированной схеме S' можно выделить некоторые стандартные блоки $B_1, \dots, B_k$, то эти же блоки можно выделить и в исходной схеме S .

В следующей теореме находится сложность реализации линейных функций в базисе B .

Теорема 1. Сложность реализации функций

$$\begin{aligned} l_n &= l_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n, \\ \bar{l}_n &= x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

в базисе B составляет $3n - 3$.

Доказательству теоремы предположим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3. Для любого натурального n справедливы неравенства

$$L(l_n) \leq 3n - 3, \quad L(\bar{l}_n) \leq 3n - 3.$$

Доказательство. Неравенства доказываются индукцией по n , поскольку

$$\begin{aligned} l_n &= l_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= l_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \oplus x_n, \\ \bar{l}_n &= \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \dots \oplus x_n}, \end{aligned}$$

а линейная функция от двух переменных может быть реализована схемой в базисе B с весом, равным трем (эта схема является одним из стандартных блоков).

Нижняя оценка будет следовать из леммы 7.

Будем считать, что на входы схем разрешается подавать константы 0 и 1. Будем говорить, что константа забивает двухвходовый функциональный элемент по левому (правому) входу или является забивающей для элемента по левому (правому) входу, если при подаче этой константы на соответствующий вход данного элемента на его выходе получаем константу. Несложно видеть, что для каждого из шести двухвходовых элементов, которые могут входить в базис B , такие константы существуют: для обоих входов элементов x & y и $x \oplus y \oplus 1$ это ноль, для обоих входов элементов $x \vee y$ и $x \& y \oplus x \oplus y \oplus 1$

— один, для левого входа элемента $\bar{x} \& y$ и правого входа элемента $\bar{x} \vee y$ — это один, и для правого входа элемента $\bar{x} \& y$ и левого входа элемента $\bar{x} \vee y$ — это ноль. Заметим также, что если на вход двухвходового функционального элемента подается константа, не забивающая его, то на выходе получаем функцию ϕ или функцию $\bar{\phi}$, где ϕ — функция, подающаяся на другой вход элемента.

Лемма 4. Пусть S — схема в базисе B , реализующая функцию ϕ , а E — элемент в ней. Тогда если E реализует булеву константу c , то мы можем удалить E и получить схему, реализующую ту же функцию ϕ .

Доказательство. После удаления E , достаточно подать на входы элементов, на которые подавался выход элемента E , вход схемы, отвечающий константе c .

Лемма 5. Пусть S — схема в базисе B , реализующая функцию ϕ , а E — элемент в ней. Тогда, если на вход элемента E подается константа, то мы можем удалить E или заменить E на инвертор, получив схему, реализующую ту же функцию ϕ .

Доказательство. Пусть ψ — функция, подаваемая на другой вход элемента E . Если на E подается забивающая константа, воспользуемся леммой 4. В противном случае E реализует ψ или $\bar{\psi}$. В первом случае удалим E , подав ψ на элементы, на которые подавался выход элемента E , во втором заменим E на инвертор, на который подается функция ψ .

Лемма 6. Пусть S — схема в базисе B , реализующая функцию ϕ , E — элемент в ней, x — одна из переменных, подающихся на вход схемы. Тогда если E реализует функцию ψ , тождественно равную x или $\bar{x}$, то мы можем удалить E или заменить E на инвертор, получив схему, реализующую ту же функцию ϕ .

Доказательство. Если E реализует функцию x , то удалим E и подадим на входы элементов, на которые подавался выход элемента E , вход схемы, соответствующий переменной x , а если E реализует $\bar{x}$, то заменим E на инвертор, на вход которого подается вход схемы, соответствующий переменной x .

Лемма 7. Если S_n , $n \geq 2$, — минимальная схема, реализующая функцию I_n или $\bar{I}_n$ в базисе B , то из схемы S_n можно удалить не менее трех двухвходовых элементов и, возможно, добавить несколько инверторов так, что получившаяся схема S_{n-1} будет реализовывать одну из функций I_n , $\bar{I}_n$.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть в схеме S_n существует двухвходовой функциональный элемент E , оба входа которого связаны с одним и тем же входом схемы, соответствующим некоторой переменной. Тогда E реализует функцию не более чем от одной переменной, а значит, этот элемент можно удалить из схемы или заменить на инвертор, воспользовавшись леммами 4 или 6, при этом сложность схемы уменьшится на 1, а реализуемая ею функция не изменится. Это противоречит предположению о минимальности схемы. При рассмотрении последующих случаев будем считать, что в схеме нет элементов, подобных E .

2. Пусть в схеме S_n вход, соответствующий некоторой переменной x , связан со входом ровно одного двухвходового функционального элемента E . Обозначим ϕ функцию, подающуюся на другой вход элемента E . Покажем, что случай 2 невозможен. Рассмотрим следующие подслучаи.

2.1. Если ϕ не является константой, то поскольку ϕ , очевидно, не зависит от x , всегда можно подобрать значения остальных переменных так, чтобы функция ϕ принимала постоянное значение, забивающее элемент E (по входу, на который подается эта функция). Тогда переменная x забивается остальными переменными, что для линейной функции невозможно.

2.2. Пусть теперь функция ϕ является константой. Если ϕ забивает элемент E , то, как и в случае 2.1, переменная x забивается остальными переменными. Поэтому предположим, что константа ϕ не забивает элемент E . Тогда E можно удалить, воспользовавшись леммой 5, что входит в противоречие с условием минимальности схемы S_n .

3. Пусть каждый вход схемы связан со входами более чем одного двухвходового элемента. Предположим, что вход, соответствующий переменной x , связан с входом двухвходового элемента E_1 и с входом двухвходового элемента E_2 . Ни один из элементов E_1, E_2 не является выходным и в силу минимальности S_n выход каждого из элементов E_1, E_2 должен быть связан с входом двухвходового элемента (если элемент E не является выходным в схеме и его выход не подается на входы других элементов схемы, то такой элемент E можно удалить из схемы). Так как схема не содержит циклов, то выход хотя бы одного из этих элементов (без ограничения общности, элемента E_2) связан с входом некоторого двухвходового элемента E_3 , отличного от элементов E_1, E_2 . Снова подаем вместо x константу такую, что на вход элемента E_2 поступает константа, забивающая E_2 . Тогда элемент E_2 реализует константу, на входы элементов E_1 и E_3 подаются константы, поэтому элементы E_1, E_2 и E_3 можно удалить или заменить на инверторы (по леммам 4 и 5). Таким образом, получаем схему S_{n-1} , реализующую функцию l_{n-1} или $\bar{l}_{n-1}$, причем сложность S_{n-1} в базисе B удовлетворяет условию

$$L(S_n) = L(S_{n-1}) + 3.$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Для схем в базисе B справедливо равенство

$$L(l_2) = L(\bar{l}_2) = 3.$$

Доказательство. Покажем, что ни l_2 , ни $\bar{l}_2$ нельзя реализовать схемой, в которой только два двухвходовых элемента. Предположим обратное. Отбрасывая при необходимости инвертор, расположенный между выходом схемы и одним из этих элементов, получаем схему, которая также реализует l_2 или $\bar{l}_2$, и выходной элемент которой уже не является инвертором. Следовательно, один из входов выходного элемента связан со входом схемы, соответствующим некоторой переменной, которая, очевидно, забивает другую переменную. Полученное противоречие доказывает лемму 8.

Доказательство теоремы 1. Верхняя оценка следует из леммы 3. Нижняя оценка получается индукцией по n с использованием леммы 8 в основании индукции и леммы 7 при индуктивном переходе.

Следующая теорема 2 дает описание минимальных схем из функциональных элементов в базисе B , реализующих функции l_2 и $\bar{l}_2$.

Теорема 2. Любую минимальную схему в базисе B , реализующую l_n или $\bar{l}_n$, $n \geq 2$, можно разбить на $n - 1$ непересекающихся стандартных блоков.

Утверждение теоремы 2 следует из леммы 9.

Лемма 9. Любая минимальная схема S_n , $n \geq 2$, в базисе B , реализующая

$$I_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$$

или

$$\bar{I}_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$$

допускает операцию стандартной редукции.

Доказательство. Всюду при доказательстве леммы для краткости мы будем писать “вход (x)” вместо “вход, соответствующий переменной x ”.

Возможны только четыре случая.

1. В схеме S_n существует вход (x), связанный с двумя входами какого-то двухвходового элемента E . Невозможность случая 1 была показана при доказательстве леммы 7.
2. В схеме S_n есть вход (x), связанный со входом ровно одного двухвходового элемента E . Невозможность случая 2 также была показана в доказательстве леммы 7.
3. В схеме S_n есть вход (x), связанный со входами трех двухвходовых функциональных элементов E_1, E_2, E_3 . Выход хотя бы одного из этих элементов (без ограничения общности, пусть это будет выход элемента E_1) связан со входом двухвходового функционального элемента E_4 . Подадим на вход (x) такую константу, что на соответствующий вход E_1 подается забивающая константа. Тогда элемент E_1 реализует константу, и, следовательно, его можно удалить. При этом на элементы E_2, E_3 и E_4 также подается константа, что означает, что эти элементы можно удалить (по лемме 5), получив, таким образом, схему S_{n-1} , реализующую линейную функцию от $n-1$ переменной I_{n-1} или ее отрицание $\bar{I}_{n-1}$ в базисе B . Сложность схемы S_n по теореме 1 равна $3n-3$, поэтому сложность схемы S_{n-1} будет равна $3n-7$ (поскольку при переходе от S_n к S_{n-1} удаляется четыре двухвходовых элемента), что противоречит теореме 1. Итак, случай 3 невозможен.
4. Каждый вход схемы S_n связан ровно с двумя входами (ровно двух элементов). Разбиение случая 4 на подслучаи представлено в таблице на рис. 1 (для некоторых клеток таблицы условия уточняются в тексте).
- 4.1. Пусть входы верхнего элемента E_1 связаны со входами схемы (x_1) и (x_2). Пусть переменная x_2 подается также на вход элемента E_2 , другой вход которого связан с выходом двухвходового элемента E_3 (см. рис. 2). Пусть E_4 — отличный от E_1 двухвходовой элемент, вход которого связан со входом (x_1). Подадим на вход (x_1) такую константу, что на соответствующий вход E_1 подается забивающая константа. Пусть после этого на тот вход E_2 , который связан с выходом E_3 , подается функция ϕ . Так как схема не содержит циклов, ϕ может зависеть только от переменных $x_3, \dots, x_n$.
- 4.1.1. Пусть функция ϕ не является константой. Тогда можно подобрать значения переменных $x_3, x_4, \dots, x_n$ так, чтобы ϕ обращалась в забивающую константу для элемента E_2 . Но это означает забиваемость переменной x_2 остальными переменными, что для линейной функции невозможно.
- 4.1.2. Пусть функция ϕ является константой.
- 4.1.2.1. Пусть элементы E_1 и E_3 совпадают. Если элемент E_4 является выходным, то переменная x_1 забивает все остальные переменные, что невозможно для линейной функции. Поэтому элемент E_4 не является выходным. Тогда существует двухвходовой элемент E_5 , с входом которого связан выход E_4 (см. рис. 3). Подадим на вход (x_1) такую константу,

4. В схеме S_n каждый вход связан ровно с двумя входами (ровно двух двухвходовых элементов).

Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

что на соответствующий вход E_4 подается забивающая константа. Тогда E_4 реализует константу, на E_5 подается константа, и кроме того E_1 реализует или константу, или x_2 , или $\bar{x}_2$. Но тогда и E_2 реализует или константу, или x_2 , или $\bar{x}_2$. Таким образом, все четыре элемента можно удалить или заменить на инверторы. Получаем противоречие с теоремой 1.

4.1.2.2. Пусть элементы E_1 и E_3 не совпадают, а элементы E_3 и E_4 совпадают.

Элемент E_1 — не выходной, в противном случае x_1 забивала бы остальные переменные. Значит, его выход связан с входом какого-либо двухвходового элемента.

4.1.2.2.1. Пусть выход E_1 связан с входом E_3 (см. рис. 4). В этом случае выход элемента E_1 связан с входом лишь элемента E_3 ; если бы выход E_1 был также связан с входом некоторого элемента E_5 , мы могли бы удалить четыре элемента, подав на вход (x_2) такую константу, что на соответствующий вход E_1 подается забивающая константа. Аналогично, выход элемента E_3 связан лишь с входом элемента E_2 . Но тогда переменная x_2 забивает переменную x_1 при подаче на вход (x_2) такой константы, что на соответствующий вход элемента E_2 подается забивающая константа, что невозможно для линейной функции.

4.1.2.2.2. Пусть выход элемента E_1 связан с входом двухвходового функционального элемента E_5 , отличного от E_1 , E_2 , E_3 (см. рис. 5). Напомним, что мы можем подать на вход (x_1) такую константу, что на соответствующий вход E_1 будет подана забивающая константа, а E_3 будет выдавать функцию ϕ , равную константе. Тогда E_1 и E_3 реализуют константы, а на E_2 и E_5 подаются константы, и эти четыре элемента можно удалить по леммам 4 и 5, что противоречит минимальности схемы.

4.1.2.2.3. Пусть элементы E_1 , E_3 и E_4 попарно различны. Напомним, что на вход E_1 , связанный с входом (x_1), можно подать такую константу, что на вход E_1 будет подана забивающая константа, а E_3 будет реализовывать функцию ϕ или $\bar{\phi}$, равную константе, то есть оба этих элемента будут реализовывать константы. Тогда и на E_4 и на E_2 также будут поданы константы (см. рис. 6). Значит, все рассматриваемые элементы можно будет удалить или заменить инверторами. Снова получаем противоречие с теоремой 1.

Рис. 4.

Рис. 5.

4.2. Пусть все входы схемы, связанные с входами верхних элементов, связаны с входами только верхних элементов (этот подслучай является отрицанием подслучая 4.1).

4.2.1. Предположим, что существуют входы схемы (x_1) и (x_2) , связанные с входами элемента E_1 , а также с входами различных элементов E_2 и E_3 . В таком случае элементы E_2 , E_3 — верхние и их входы связаны еще и с входами (x_i) , (x_j) , отличными от входов (x_1) , (x_2) (см. рис. 7). Подадим на вход (x_2) такую константу, что на соответствующий вход E_1 подается забивающая константа, а на вход (x_i) такую константу, что на соответствующий вход E_2 подается забивающая константа. Таким образом, переменная x_1 забивается переменными x_2 и x_i , что невозможно для линейной функции.

4.2.2. Пусть все входы схемы, соединенные с верхними элементами, разбиваются на пары, такие, что входы в каждой паре связаны с входами одних и тех же двух элементов. Рассмотрим одну такую пару входов, соответствующих переменным x_1 и x_2 и связанных

Рис. 6.

Рис. 7.

с входами элементов E_1 и E_2 (этот подслучай является отрицанием подслучая 4.2.1).

4.2.2.1. Предположим, что выходы элементов E_1 и E_2 связаны со входами различных двухвходовых элементов E_3 и E_4 (см. рис. 8).

Заметим, что выход E_1 связан с входом лишь элемента E_3 . В самом деле, если выход E_1 связан еще и с входом некоторого элемента E_5 , то, подав на вход (x_1) такую константу, что на соответствующий вход E_1 подается забивающая константа, можно удалить элементы E_1 , E_2 , E_3 и E_5 , что противоречит теореме 1. Аналогично, выход элемента E_2 связан с входом лишь элемента E_4 . Пусть на другой вход элемента E_3 подается функция ϕ , а на другой вход элемента E_4 подается функция ψ . Так как схема не содержит циклов, то либо ϕ , либо ψ не зависит от x_1 и x_2 . Без ограничения общности будем считать, что это

Рис. 8.

Рис. 9.

функция ψ . Если бы функция ψ была константой, можно бы было удалить элемент E_4 , что будет противоречить минимальности схемы. Поэтому функция ψ не является константой. Подадим на вход (x_1) такую константу, что на соответствующий вход E_1 подается забивающая константа, и подберем значения переменных x_3, x_4 так, чтобы функция ψ превратилась в забивающую константу для E_4 . Таким образом, переменная x_2 забивается остальными переменными, что невозможно.

4.2.2.2. Пусть выходы E_1 и E_2 связаны со входами одного элемента E_3 (см. рис. 9).

Выходы элементов E_1 и E_2 связаны только с входами элемента E_3 . В самом деле, если бы выход элемента E_1 был связан с входом некоторого элемента E_4 , отличного от E_3 , то подав на вход (x_1) необходимую константу, такую, что на соответствующий вход E_1 подается забивающая константа, мы могли бы удалить четыре элемента E_1, E_2, E_3, E_4 , что противоречит теореме 1.

Элемент E_3 реализует функцию, существенно зависящую от двух переменных. В противном случае его можно было бы удалить или заменить на инвертор, что противоречило бы минимальности схемы. Более того, элемент E_3 реализует линейную функцию: ведь если бы он реализовывал какую-либо другую функцию от двух переменных, мы могли бы выбрать такое значение переменной x_1 , что элемент E_3 реализовывал бы константу, а значит, выходное значение схемы не зависело бы от x_2 , поскольку выходы элементов E_1 и E_2 связаны только с входами E_3 .

Таким образом, в схеме можно выделить стандартный блок, содержащий элементы E_1, E_2, E_3 , и схема допускает операцию стандартной редукции. Лемма 9 доказана.

Замечание 1. В [9] сформулирована следующая теорема.

Теорема 3. Все минимальные схемы в базисе

$$B = \{x \rightarrow y, \bar{x} \& y\},$$

реализующие линейные булевы функции l_n и $\bar{l}_n$, $n \geq 2$, состоят из стандартных попарно непересекающихся блоков.

Стандартные блоки в [9] определялись как схемы, моделирующие одну из формул $(x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x} \& y)$ и $(\bar{x} \& y) \& (x \rightarrow y)$, то есть представляли собой (в терминологии данной статьи) стандартные блоки для базиса $\{x \rightarrow y, \bar{x} \& y, \bar{x}\}$, не содержащие инверторов. Поскольку минимальная схема в базисе $\{x \rightarrow y, \bar{x} \& y\}$ является минимальной схемой в базисе $\{x \rightarrow y, \bar{x} \& y, \bar{x}\}$, теорема 3 сразу следует из теоремы 2.

В заключение автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору Н. П. Редькину.

Список литературы

1. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. МГУ, Москва, 1984.
2. Редькин Н. П., Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов. *Проблемы кибернетики* (1970) **23**, 83–101.
3. Редькин Н. П., О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов. *Кибернетика* (1971), № 6 31–38.
4. Шкребела И. С., О сложности реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $\{x \rightarrow y, \bar{x}\}$. *Дискретная математика* (2003) **15**, №4, 100–112.
5. Редькин Н. П., О минимальных и асимптотически минимальных схемах для некоторых индивидуальных булевых функций. В сб.: *Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения»*. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 2007, с. 11–19.
6. Ложкин С. А., О структуре минимальных схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующих линейную функцию. В сб.: *Труды V Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем»*. Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 2003, с. 50–51.
7. Комбаров Ю. А., О минимальных реализациях линейных булевых функций. *Дискретный анализ и исследование операций* (2012) **19**, №3, 39–57.
8. Редькин Н. П., *Дискретная математика*. Физматлит, Москва, 2009.
9. Комбаров Ю. А., О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $\{x \rightarrow y, \bar{x} \& y\}$. В сб.: *Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем»*. МАКС Пресс, Москва, 2009, с. 145–149.

Статья поступила 19.11.2011.