Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина, Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 3, 123–145

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 09:20:55

Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа

© 2005 г. В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина

Для групп Кокстера большого типа решена проблема обобщенной сопряженности слов, доказано, что централизатор конечно порожденной подгруппы конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие. Показано, что в общем случае централизатор конечно порожденной группы не является циклическим. Построен пример группы данного класса, не являющейся гиперболической группой.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования России, грант РД 02-1.1-209.

Группа G , заданная системой образующих $a_i, i \in J, |J| < \infty$, и системой определяющих соотношений $a_i^2 = 1$ для всех $i \in J, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i \neq j, i, j \in J, m_{ij}$ — элемент матрицы Кокстера $(m_{ij}), i, j \in J$, соответствующей данной группе (см. [1]), причем $m_{ij} \geq 3$ для $i \neq j$, называется группой Кокстера большого типа. В случае $m_{ij} > 3$ имеем группу Кокстера экстр большого типа.

Теорема 1 ([1]). *В группах Кокстера экстр большого типа разрешима проблема сопряженности слов.*

Нашей целью является решение проблемы обобщенной сопряженности слов и описание централизатора конечно порожденной подгруппы в группах Кокстера большого типа. Проблема сопряженности слов для данного класса групп решена авторами в [2].

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий установить, существует ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^n (z^{-1} w_i z = v_i)$ для любых двух конечных множеств слов $\{w_i\}_{i=1, \dots, n}, \{v_i\}_{i=1, \dots, n}$ из G .

Пусть $F_i = \langle a_i; a_i^2 \rangle, F = \bigstar_{i=1}^n F_i$ — свободное произведение циклических групп порядка 2. отождествим каждый образующий a_i группы F с его обратным a_i^{-1} . Слово $w = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ группы F называется приведенным, если индексы рядом стоящих букв a_{i_j} и $a_{i_{j+1}}$ записи w различны; длина w равна n .

Пусть $m_{ij} < \infty$ и $r_{ij} = (a_i a_j)^{m_{ij}}$, тогда в F существуют в точности две различные перестановки $r_{ij}: r_{ij} = (a_i a_j)^{m_{ij}}$ и $r_{ji} = (a_j a_i)^{m_{ij}}, i \neq j$.

Обозначим через F_{ij} группу $F_{ij} = F_i * F_j$, через G_{ij} группу Кокстера большого типа $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, r_{ij}, r_{ji} \rangle$.

Лемма 1. *Если слово $w \in G_{ij}, w = 1$ в G_{ij} и $w \neq 1$ в F_{ij} , то $|w| \geq m_{ij}$, где $|w|$ — длина слова w .*

Доказательство очевидно.

Лемма 2. Пусть $w \in G_{ij}$, $w = w_1 w_2$, $w = 1$ в G_{ij} и $w \neq 1$ в F_{ij} . Тогда

(а) если $|w_1| \leq m_{ij}$, то $|w_1| \leq |w_2|$;

(б) если $|w_1| < m_{ij}$, то $|w_1| < |w_2|$.

Справедливость леммы 2 следует из леммы 1.

Обозначим через R_{ij} множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произведении F_{ij} и равных 1 в группе G_{ij} . Элемент $r \in R_{ij}$ будем называть соотношением типа (i, j) .

Лемма 3. Любое слово, принадлежащее R_{ij} , является степенью либо r_{ij} , либо r_{ji} .

Доказательство. Положим

$$r_{ij}^\varepsilon = \begin{cases} r_{ij}, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ r_{ji}, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Пусть $w \in R_{ij}$. Тогда

$$w = (s_1 r_{ij}^{\varepsilon_1} s_1^{-1}) (s_2 r_{ij}^{\varepsilon_2} s_2^{-1}) \dots (s_m r_{ij}^{\varepsilon_m} s_m^{-1}),$$

где $s_k^{-1} = \text{rev } s_k$ (то есть слово, записанное в обратном порядке), $k = 1, \dots, m$.

Так как $r_{ij}^{\varepsilon_k}$ начинается и заканчивается на разные буквы a_i, a_j , в множителях $s_k r_{ij}^{\varepsilon_k} s_k^{-1}$ идет сокращение до тех пор, пока $s_k r_{ij}^{\varepsilon_k} s_k^{-1}$ не станет равным $r_{ij}^{\varepsilon_k}$, либо $r_{ji}^{\varepsilon_k}$, $k = 1, \dots, m$. Таким образом, $R_{ij} = \{r_{ij}^l, r_{ji}^m\}$, $l, m \in \mathbb{N}$.

В дальнейшем под R будем понимать

$$R = \bigcup_{i,j \in J} R_{ij},$$

симметризованное подмножество свободного произведения F . Тогда группа Кокстера может быть задана представлением $G = \langle A; a_i^2, R \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Пусть w — нетривиальное циклически приведенное в F слово, равное единице в группе G Кокстера большого типа, то есть $w \in \langle R \rangle^F$, где $\langle R \rangle^F$ — нормальное замыкание симметризованного множества R в свободном произведении F . Учитывая, что $a_i = a_i^{-1}$, в F можно строить R -диаграммы над F в точности так же, как над свободной группой (см. [3]). Следовательно, существует связная односвязная диаграмма M группы Кокстера с граничной меткой w , областями которой являются R_{ij} -диаграммы с метками типа (i, j) .

Подвергнем R -диаграмму M следующему преобразованию. Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij} -диаграммами, пересекаются по ребру с меткой $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D . При этом возможно, что метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F . Тогда, удалив эту область, склеиваем ее границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную (в F) связную односвязную R -диаграмму M , инвариантную относительно рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w , причем, если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то длина метки этого ребра равна единице и справедливо следующее утверждение.

Лемма 4 ([1]). Каждая приведенная связная односвязная R -диаграмма M группы Кокстера большого типа удовлетворяет условию $C(6)$.

Относительно условия $C(6)$, см. [1].

Обозначим через ∂M граничный цикл M . Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \emptyset$. Символом $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D .

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть M , если $\partial D \cap \partial M$ есть объединение последовательности $l_1, l_2, \dots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \dots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M .

Граничную область D R -диаграммы M назовем простой, если $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть. Простая область D диаграммы M называется деновской, если $i(D) < 3$.

Пусть M — приведенная связная односвязная R -диаграмма группы Кокстера большого типа. Тогда последовательность граничных областей $D_1, D_2, \dots, D_n$, $n \geq 2$, образует полосу в M , если

- $\partial D_i \cap \partial M$ — правильная часть M для всех i , $1 \leq i \leq n$;
- для всех i , $1 \leq i < n$, границы областей D_i и D_{i+1} пересекаются по ребру;
- $i(D_1) = i(D_n) = 3$ и для всех j , $1 < j < n$, $i(D_j) = 4$.

Лемма 5 ([2]). Если M — приведенная связная односвязная диаграмма типа $C(6)$, не содержащая деновской области, то она содержит по крайней мере три непересекающиеся полосы.

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e , в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D , называется $(s-i)$ -областью.

Лемма 6 ([3]). Пусть M — приведенная связная диаграмма M группы Кокстера большого типа, содержащая $(s-i)$ -области, тогда $\phi(j)$ и $\phi(\delta)$ содержат одну букву.

Лемма 7. Если M — приведенная связная односвязная R -диаграмма, то она не содержит $(s-i)$ -областей.

Доказательство очевидно.

Удаление деновской области диаграммы M , то есть удаление ее граничного пути, называется деновским сокращением диаграммы M или R -сокращением. Будем говорить, что M является R -приведенной, если она не содержит деновских областей.

Пусть Π — полоса диаграммы M , $\partial M = \gamma \cup (\partial \Pi \cap \partial M)$, $\gamma_1 = \partial \Pi \setminus (\partial \Pi \cap \partial M)$. Замену диаграммы M на диаграмму M_1 , полученную из M удалением полосы Π , в результате чего граничный цикл M преобразуется в граничный цикл $\partial M_1 = \gamma \gamma_1$, назовем специальным R -сокращением или $\bar{R}$ -сокращением. Если M не содержит полос, то назовем M специально R -приведенной или $\bar{R}$ -приведенной. Слово $w \in G$, где G — группа Кокстера большого типа, назовем R -приводимым, если w приводимо в F и содержит подслово s , являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $|b| \leq 2$. Назовем w циклически R -приведенным, если все его циклические перестановки являются R -приведенными словами. Если w' получено из w R -приведением, то $|w'| < |w|$ на основании леммы 2.

Циклически R -приведенное слово w группы G Кокстера большого типа назовем специально R -приводимым, если в некоторой его циклической перестановке можно выделить подслово $s_1 s_2 \dots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $t = 1$ и $t = n$

$$|d_1| = |b_1| = |d_2| = |d_n| = |b_n| = |d_{n+1}| = 1$$

и для t , $1 < t < n$,

$$|d_t| = |d_{t+1}| = 1, \quad |b_t| = 2.$$

Лемма 8. Пусть $w \in G$, G — группа Кокстера большого типа, w циклически R -приведено. Тогда, если слово w' получено из w специальным R -приведением, то $|w'| < |w|$.

Доказательство очевидно.

Теорема 2. В группе G_{ij} разрешима проблема равенства слов.

Доказательство непосредственно следует из предыдущих утверждений.

Лемма 9 ([2]). Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Кокстера большого типа выяснить, является ли w R -приведенным.

Лемма 10 ([2]). Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически R -приведенного слова w из группы Кокстера большого типа выяснить, является ли w специально R -приведенным.

Теорема 3. В группах Кокстера большого типа разрешима проблема равенства слов.

Доказательство очевидно.

Приведенную связную односвязную R -диаграмму M назовем чечевиной, если M состоит из областей $D_1, \dots, D_n$ таких, что для любого i , $1 \leq i < n$, $D_i \cap D_{i+1}$ есть ребро, для любого i , $1 \leq i \leq n$, $D_i \cap \gamma_1 \neq \emptyset$ и $D_i \cap \gamma_2 \neq \emptyset$, где $\gamma_1 \gamma_2^{-1}$ есть граничный цикл M .

Пусть M — приведенная связная односвязная R -диаграмма, каждая область которой не является правильной. Тогда M состоит из чечевичных поддиаграмм, являющихся компонентами данной диаграммы, причем, если каждой компоненте поставить в соответствие точку, то получим граф, являющийся деревом. В таких диаграммах можно выполнить деновские сокращения.

Рассмотрим теперь кольцевые диаграммы над группами Кокстера большого типа. Назовем связную карту M на плоскости E^2 кольцевой картой, если дополнение ее состоит в точности из двух компонент. Через K обозначим неограниченную, а через H — ограниченную компоненты множества M . Назовем $\partial M \cap \partial K$ внешней, а $\partial M \cap \partial H$ внутренней границей карты M . Цикл минимальной длины, содержащий все ребра внешней границы карты M , есть внешний граничный цикл карты M , обозначим его σ . Аналогично определяется внутренний граничный цикл карты M . Обозначим его τ .

Пусть F — свободное произведение, R — симметризованное подмножество его элементов, N — нормальное замыкание R в F . Пусть u и z — два циклически приведенных слова из F , не лежащих в N и не сопряженных в F . Если u и z представляют собой некоторые сопряженные элементы группы $G = F/N$, то существует приведенная кольцевая R -диаграмма M , содержащая не менее одной области, такая, что если $\sigma = e_1 \dots e_s$ и $\tau = t_1 \dots t_k$ — соответственно внутренний и внешний граничные циклы карты M , то

произведение $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_s)$ циклически приведено и сопряжено элементу u в F , а произведение $\varphi(t_1) \dots \varphi(t_k)$ тоже циклически приведено и сопряжено z^{-1} в F , где $z^{-1} = \text{rev}(z)$ (см. [3]). Пусть u, z — два циклически приведенных слова, $u, z \notin \langle R \rangle^G$, не сопряжены в F и сопряжены в G . Тогда существует связная приведенная кольцевая R -диаграмма M с внешней граничной меткой u и внутренней граничной меткой z^{-1} , граничными метками областей D которой являются соотношения из R . Подвергнем кольцевую R -диаграмму следующему преобразованию. Если две области D_1, D_2 пересекаются по ребру e , причем общей граничной меткой является либо соотношение из некоторого симметризованного множества R_{ij} , либо слово, равное 1 в F_{ij} , то стерев ребро e , объединяем D_1 и D_2 в одну область, причем в случае равенства метки 1 в F_{ij} , данную область выбрасываем, а ее границу склеиваем. В результате получаем кольцевую R -диаграмму M' с условием $C(6)$ с теми же граничными метками u и z^{-1} . В дальнейшем будем рассматривать кольцевые связные приведенные R -диаграммы M для элементов группы Кокстера большого типа, инвариантные относительно указанных выше преобразований. Будем предполагать также, что u и z^{-1} являются циклически R -приведенными и специально R -приведенными словами. Заметим, что меткой каждого внутреннего ребра будет буква $a_j \in A$.

Изучим кольцевые R -диаграммы M для элементов групп Кокстера большого типа, не содержащих $(s - i)$ -областей.

Лемма 11. Пусть M — связная приведенная кольцевая R -диаграмма с граничными метками $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$, принадлежащими группе Кокстера большого типа, $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ — специально R -приведенные слова. Тогда, если каждая граничная область D карты M пересекается только с внешним, либо только с внутренним граничным циклом M , то $\partial M \cap \partial D$ — связное множество.

Доказательство очевидно.

Обозначим $\sum^*$ символ суммирования по граничным областям диаграммы.

Лемма 12. Пусть M — кольцевая связная приведенная R -диаграмма с условием $C(6)$, каждая граничная область D которой такова, что $\partial D \cap \partial M$ — связное множество. Тогда

$$\sum_M^* (4 - i(D)) \geq 0,$$

где суммирование проводится по всем граничным областям диаграммы M и $i(D)$ — степень области D .

Доказательство. Напомним (см. [5]), что $[p, q]$ -картой называется карта, все внутренние вершины v которой имеют степень $d(v)$ не менее p , а все (внутренние) области D имеют степень $i(D)$ не менее q . Для кольцевых связных $[p, q]$ -карт справедлива формула (см. [5])

$$\sum_M^* (p/q + 2 - d(v)) \geq 0,$$

где суммирование проводится по всем вершинам $v \in M$. Карты $C(6)$ есть $[3, 6]$ -карты (карты с условием $(3, 6)$). Пусть M — кольцевая карта с условием $(3, 6)$, тогда M^* , дуальная к ней карта, будет $[6, 3]$ -картой, для которой имеет место соотношение

$$\sum_{M^*}^* (4 - d(v^*)) \geq 0,$$

где суммирование проводится по граничным вершинам v^* карты M^* , каждая из которых соответствует граничной области D карты M . В силу дуальности M^* и M для указанных вершин v^* и областей D справедливо равенство $d(v^*) = i(D)$.

Пусть M — связная кольцевая R -диаграмма, для каждой граничной области D которой $\partial D \cap \partial M$ — связное множество. Тогда внешний (внутренний) граничный слой M образует кольцевую связную R -диаграмму, которую будем называть внешним (внутренним) K -слоем диаграммы M и обозначать соответственно через K_σ (K_τ), где σ (τ) — соответственно внешний (внутренний) граничный циклы диаграммы M .

Пусть M — связная кольцевая R -диаграмма, являющаяся диаграммой сопряженности слов из группы Кокстера большого типа. Тогда внешний (внутренний) K -слой из M назовем специальным внешним (внутренним) K -слоем, если образующие его области $D_1, \dots, D_n$, удовлетворяют следующим условиям:

- (1) $D_j \cap D_{j+1}$ есть ребро для всех j , $1 \leq j < n - 1$,
- (2) $D_1 \cap D_n$ есть ребро,
- (3) $i(D_1) = 3$,
- (4) $i(D_2) = i(D_3) = \dots = i(D_n) = 4$.

Пусть M — кольцевая связная приведенная R -диаграмма с условием $C(6)$ над группами Кокстера большого типа. Обозначим через M' кольцевую диаграмму, полученную из M удалением внешнего граничного слоя K_σ , через M'' — диаграмму, полученную из M удалением внутреннего граничного слоя K_τ , а через M''' — диаграмму, полученную из M удалением внутреннего и внешнего граничного слоев.

Лемма 13. Пусть M — связная кольцевая приведенная R -диаграмма сопряженности слов из группы G Кокстера большого типа, у которой σ — внешний, τ — внутренний граничный циклы соответственно с метками $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$, являющимися циклически R -приведенными словами. Пусть также каждая граничная область D карты M пересекается либо с σ , либо с τ . Тогда если K — специальный внешний (внутренний) слой M , внешней и внутренней граничной меткой которого соответственно являются слова w , v из G , то $|v| < |w|$.

Используя непосредственно структуру специального слоя и леммы 1 и 2, получаем необходимую оценку.

Лемма 14. Пусть M — связная приведенная кольцевая R -диаграмма сопряженности элементов из группы Кокстера большого типа, σ , τ — соответственно внешний и внутренний граничные циклы M , метки которых $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ специально R -приведены, и пусть каждая граничная область D из M пересекается либо с σ , либо с τ . Тогда если внешний и внутренний слои карты M не являются специальными, то

$$\sum_{\sigma}^* (4 - i(D)) \geq 0, \quad \sum_{\tau}^* (4 - i(D)) \geq 0.$$

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы не является справедливым, то есть, например, $\sum_{\sigma}^* (4 - i(D)) < 0$. Тогда существует натуральное число k_0 такое, что

$$\sum_{\sigma}^* (4 - i(D)) + k_0 = 0.$$

В силу леммы 12

$$\sum_M^* (4 - i(D)) = \sum_\sigma^* (4 - i(D)) + \sum_\tau^* (4 - i(D)) \geq 0,$$

поэтому $\sum_\tau^* (4 - i(D)) > 0$. Пусть $D_{j_1}, D_{j_2}, \dots, D_{j_m}$ — граничные области M , принадлежащие внутреннему граничному слою M , каждая из которых дает отрицательный вклад в общую сумму $\sum_\tau^* (4 - i(D))$, то есть

$$\sum_{s=1}^m (4 - i(D_{j_s})) = k,$$

где $k < 0$. Для того чтобы для карты M выполнялись соотношения

$$\sum_\tau^* (4 - i(D)) > 0, \quad \sum_M^* (4 - i(D)) \geq 0,$$

необходимо, чтобы внутренний граничный слой содержал, по меньшей мере, $|k| + k_0$ областей с внутренней степенью, равной трем. Отсюда следует, что либо вдоль границы τ можно выделить полосу, а следовательно, метка $\varphi(\tau)$ специально R -приводима, либо внутренний граничный слой карты M является специальным.

Пусть M — связная карта, состоящая из связной кольцевой диаграммы M_1 и связной односвязной диаграммы M_2 , соединенных друг с другом некоторым простым путем, возможно, нулевой длины. Назовем диаграмму M_2 островом.

Если связная кольцевая диаграмма M_1 связной карты M соединена со связной односвязной диаграммой M_2 посредством некоторой области D , где $\partial D \cap \partial M$ — несвязное множество и внутренняя степень области D относительно каждой диаграммы M_i , $i = 1, \dots, 2$, не меньше единицы, то диаграмму M_2 назовем полуостровом M .

Лемма 15 ([2]). Пусть M — приведенная связная кольцевая R -диаграмма сопряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$, G — группа Кокстера большого типа, σ , τ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M , каждая граничная область D из M пересекается либо с σ , либо с τ , слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ специально R -приведены. Тогда диаграмма M' (M''), полученная из M удалением внешнего K_σ (внутреннего K_τ) граничного слоя M , не содержит ни островов, ни полуостровов.

Пусть M — приведенная связная кольцевая R -диаграмма сопряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ группы Кокстера большого типа, σ , τ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M , каждая граничная область D пересекается либо с σ , либо с τ , слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ специально R -приведены и

$$\sum_\sigma^* (4 - i(D)) = 0 \quad \left(\sum_\tau^* (4 - i(D)) = 0 \right).$$

Тогда M назовем специальной кольцевой R -диаграммой.

Лемма 16 ([2]). Пусть M — специальная кольцевая R -диаграмма. Тогда внешний (внутренний) граничный K -слой карты M не содержит области D с $i(D) > 5$ и в K число областей с внутренней степенью 3 равно числу областей с внутренней степенью 5.

Лемма 17. Пусть M — приведенная связная кольцевая R -диаграмма сопряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$, G — группа Кокстера большого типа, σ , τ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M , каждая граничная область D пересекается либо с σ , либо с τ , слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ специально R -приведены. Тогда если внешний и внутренний граничные слои карты M не являются специальными, то

$$\sum_{\sigma}^* (4 - i(D)) = 0, \quad \sum_{\tau}^* (4 - i(D)) = 0.$$

Доказательство очевидно.

Кольцевую связную приведенную R -диаграмму M сопряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$, где σ , τ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M , назовем минимальной, если не существует кольцевой R -диаграммы M_0 с теми же граничными метками $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$, имеющей меньшее число областей. Очевидно, что минимальная кольцевая связная R -диаграмма сопряженности слов $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ приведена.

Лемма 18. Пусть M — специальная кольцевая R -диаграмма группы G Кокстера большого типа с граничными циклами σ , τ . Тогда

$$|\varphi(\partial K_{\sigma} \cap \partial M)| \geq |\varphi(\partial K_{\sigma} \cap \partial M')| \quad (|\varphi(\partial K_{\tau} \cap \partial M)| \geq |\varphi(\partial K_{\tau} \cap \partial M'')|),$$

где K_{σ} — внешний (K_{τ} — внутренний) граничный слой M .

Доказательство. Из леммы 16 следует, что граничный слой K_{σ} (K_{τ}) не содержит областей D с $i(D) > 5$ в M и в K_{σ} (K_{τ}), число областей с внутренней степенью 5 равно числу областей с внутренней степенью 3, причем любые две области с внутренней степенью 5 разделены областью с внутренней степенью 3, остальные области из K_{σ} (K_{τ}) имеют внутреннюю степень 4. Разобьем последовательность областей из K_{σ} на последовательности следующим образом:

$$D_1, D_2, \dots, D_{j_1}, D_{j_1+1}, \dots, D_{k_1}; D_{k_1+1}, \dots, D_{k_1+j_2}, \dots, D_{k_2}, \dots; \\ D_{k_i+1}, \dots, D_{k_i+j_{i+1}}, \dots, D_{k_{i+1}}, \dots; D_{k_r+1}, \dots, D_{k_r+j_{r+1}}, \dots, D_{k_{r+1}},$$

где

$$i(D_1) = i(D_{k_1+1}) = \dots = i(D_{k_i+1}) = \dots = i(D_{k_r+1}) = 5, \\ i(D_{j_1}) = i(D_{k_1+j_2}) = \dots = i(D_{k_i+j_{i+1}}) = \dots = i(D_{k_r+j_{r+1}}) = 3.$$

Все остальные области имеют внутреннюю степень 4. Заметим, что в K_{σ} за областью $D_{k_{r+1}}$ следует область D_1 . Рассмотрим подкарту K_{σ} -слоя, образованную областями $D_{k_i+1}, \dots, D_{k_i+j_{i+1}}, \dots, D_{k_{i+1}}$, при $i = 0$, $k_0 = 0$. Обозначим метку произвольной области $D_{k_{i+t}}$, $1 \leq t \leq k_{i+1} - k_i$, следующим образом:

$$\varphi(\partial D_{k_{i+t}}) = s_{k_{i+t}}^{-1} d_{k_{i+t}}^{-1} b_{k_{i+t}} d_{k_{i+t}+1}^{-1}.$$

Из сказанного выше следует, что

$$|h_{k_{i+1}}| = 3, \quad |h_{k_i+j_{i+1}}| = 1, \quad |h_{k_{i+t}}| = 2, \quad 2 \leq t < j_{i+1}, \quad j_{i+1} < t \leq k_{i+1}, \quad |d_s| = 1$$

для любого s . Используя леммы 1 и 2, получаем, что

$$\begin{aligned}
 |b_{k_{i+1}}| &\leq |d_{k_{i+1}}| + |s_{k_{i+1}}| + |d_{k_{i+2}}|, \\
 |b_{k_{i+2}}| + |d_{k_{i+2}}| &\leq |d_{k_{i+3}}| + |s_{k_{i+2}}|, \dots, |b_{k_{i+j_{i+1}-1}}| + |d_{k_{i+j_{i+1}-1}}| \\
 &\leq |d_{k_{i+j_{i+1}}}| + |s_{k_{i+j_{i+1}-1}}|, \\
 |d_{k_{i+j_{i+1}}}| + |b_{k_{i+j_{i+1}}-1}| + |d_{k_{i+j_{i+1}+1}}| &\leq |s_{k_{i+j_{i+1}}}|, \\
 |b_{k_{i+j_{i+1}+1}}| + |d_{k_{i+j_{i+1}+2}}| &\leq |s_{k_{i+j_{i+1}+1}}| + |d_{k_{i+j_{i+1}+1}}|, \dots, |b_{k_{i+1}}| + |d_{k_{i+1}+1}| \\
 &\leq |s_{k_{i+1}}| + |d_{k_{i+1}}|.
 \end{aligned}$$

Суммируя отдельно левые и правые части неравенств, получаем неравенство

$$\sum_{t=1}^{k_{i+1}-k_i} |b_{k_{i+t}}| + |d_{k_{i+1}+1}| \leq \sum_{t=1}^{k_{i+1}-k_i} |s_{k_{i+t}}| + |d_{k_{i+1}}|.$$

Учитывая, что $d_1 = d_{r+1} + 1$, неравенство

$$\sum_{i=0}^r \left(\sum_{t=1}^{k_{i+1}-k_i} |b_{k_{i+t}}| + |d_{k_{i+1}+1}| \right) \leq \sum_{i=0}^r \left(\sum_{t=1}^{k_{i+1}-k_i} |s_{k_{i+t}}| + |d_{k_{i+1}}| \right)$$

преобразуем к виду

$$\sum_{i=1}^{k_{r+1}} |b_i| \leq \sum_{i=1}^{k_{r+1}} |s_i|.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$|\varphi(\partial K_\sigma \cap \partial M')| \leq |\varphi(\partial K_\sigma \cap \partial M)|.$$

Кольцевую связную приведенную однослойную R -диаграмму M с граничными циклами σ , τ группы Кокстера большого типа, метки которой $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ приведены в F , $\varphi(\sigma)$ R -приведено и специально R -приведено, назовем особо специальной R -диаграммой, если в M существует одна область D такая, что

$$|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \sigma))| = 3,$$

а для остальных областей D'

$$|\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \cap \sigma))| = 4.$$

Слово $\varphi(\tau)$ является циклически R -приведенным и циклически специально R -приведенным. Замену слова $\varphi(\sigma)$ словом $\varphi(\tau)$ назовем специальным кольцевым R -сокращением.

Лемма 19 ([2]). Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически R -приведенного циклически специально R -приведенного слова w из группы Кокстера большого типа установить, применимо ли к нему специальное кольцевое R -сокращение.

Рассмотрим кольцевые связные приведенные R -диаграммы M сопряженности слов групп Кокстера большого типа с граничными циклами σ , τ , у которых не каждая граничная область является простой. При этом кольцевая R -диаграмма M может быть одного из следующих видов:

- (1°) $\sigma \cap \tau = \emptyset$, каждая область $D \in M$ граничная, $\partial D \cap \partial M$ — несвязное множество, $i(D) = 2$;
- (2°) $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$.
- (3°) $\sigma \cap \tau = \emptyset$, существует область D такая, что $i(D) > 2$, $\partial D \cap \partial M$ — несвязное множество.

Будем говорить, что циклически несократимое слово w группы Кокстера большого типа обладает свойством s , если w циклически R -несократимо, циклически специально R -несократимо и к нему неприменимо кольцевое специальное R -сокращение.

Лемма 20. Пусть u, v — слова группы G Кокстера большого типа, обладающие свойством s . Тогда можно эффективно установить, являются ли слова u, v граничными метками кольцевой связной приведенной R -диаграммы вида 2°.

Доказательство очевидно.

Лемма 21. Пусть u, v — слова группы Кокстера большого типа, обладающие свойством s . Тогда если u, v — граничные метки кольцевой связной приведенной R -диаграммы M вида 3° с граничными циклами σ, τ , $\varphi(\sigma) = u$, $\varphi(\tau) = v^{-1}$, то существует простой путь $\chi = e_1 e_2$, принадлежащий граничному циклу некоторой области D , соединяющей граничные вершины из σ и τ , метка которого может быть эффективно определена.

Доказательство. Кольцевая R -диаграмма M с условием $C(6)$ с граничными метками $\varphi(\sigma) = u$, $\varphi(\tau) = v$, удовлетворяющими условиям леммы, является специальной $(C - 1)$ -слойной диаграммой [6].

Из лемм 17, 19, 22 статьи [6] следует, что диаграмма M состоит из связных односвязных диаграмм Γ_i , $i = 1, \dots, p$, каждая область D которых, граничная в M , является простой и каждая Γ_i в M ограничена слева и справа соответственно областями $\tilde{D}_i, \tilde{D}'_i$, причем $\partial \tilde{D}_i \cap \partial M$ и $\partial \tilde{D}'_i \cap \partial M$ — несвязные множества,

$$\begin{aligned} \partial \tilde{D}_i \cap \partial \Gamma_i &= c_{i-1}, & \partial \tilde{D}'_i \cap \partial \Gamma_i &= c_i, & |c_{i-1}| &= |c_i| = 2, \\ \partial \Gamma_i &= \gamma_i c_{i-1} \delta_i c_i, & \partial \Gamma_i \cap \sigma &= \gamma_i, & \partial \Gamma_i \cap \tau &= \delta_i, \end{aligned}$$

откуда следует существование простого пути χ .

Кроме того, в лемме 22 из [6] показано, что среди областей

$$K_\sigma \cap \Gamma_i = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}, \quad (K_\tau \cap \Gamma_i = \{D'_1, D'_2, \dots, D'_n\}),$$

где

$$\partial D_1 \cap c_{i-1} = e'_2, \quad \partial D'_1 \cap c_{i-1} = e'_1, \quad \partial D_m \cap c_i = e''_2, \quad \partial D'_n \cap c_i = e''_1,$$

содержится область D_k , $1 \leq k \leq m$, $(D'_t, 1 \leq t \leq n)$ такая, что

$$i(D_k) = 3, \quad i(D_1) = \dots = i(D_{k-1}) = 4 \quad (i(D'_t) = 3, \quad i(D'_1) = \dots = i(D'_{t-1}) = 4).$$

Теперь построим алгоритм, с помощью которого можно выяснить, существует ли слово $\varphi(\chi) \in G$ такое, что $\varphi(\chi)^{-1} u^* \varphi(\chi) = v^*$, где u^*, v^* — некоторые циклические перестановки u, v ; $\varphi(\chi)$ — метка пути $\chi = e'_1 e'_2 = c_{i-1}$, соединяющего некоторые вершины из σ и τ , $\chi = c_{i-1}$ принадлежит граничному циклу некоторой области D'_{i-1} . Разобьем циклическое слово u (v) на подслова $u_1, u_2, \dots, u_m$ ($v_1, v_2, \dots, v_n$), где $u_s \in G_{i_s j_s}$, $s = 1, \dots, m$ ($v_t \in G_{i_t j_t}$, $t = 1, \dots, n$).

Подслова u_i , $i = 1, \dots, m$ (v_t , $t = 1, \dots, n$) занумеруем в направлении обхода $\sigma(\tau)$ по часовой стрелке. Данному разбиению $u(v)$ соответствует разбиение границы $\sigma(\tau)$ на простые пути $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ ($\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$), где $\varphi(\sigma_i) = u_i$, $i = 1, \dots, m$ ($\varphi(\tau_j) = v_j$, $j = 1, \dots, n$). Соединим правый конец σ_1 с правым концом какого-нибудь τ_j , например с τ_1 , отрезком χ ; отметим, что $\varphi(\sigma_1)$ и $\varphi(\tau_1)$ должны содержаться в одной подгруппе G_{ij} . Разбиваем χ на два ребра e'_1, e'_2 , $\chi = e'_1 e'_2$, в направлении от τ к σ . Укажем способ нахождения меток $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$. Для этого к каждому пути $\sigma_2, \dots, \sigma_k$, $2 \leq k \leq m$ ($\tau_2, \dots, \tau_t$, $2 \leq t \leq n$) пристраиваем области $D_2, \dots, D_k$ ($D'_2, \dots, D'_t$), удовлетворяющие условиям, состоящим в том, что $\partial D_2 \cap \chi = e'_2$ ($\partial D'_2 \cap \chi = e'_1$) и D_i, D_{i+1} , $i = 2, \dots, k-1$ (D'_j, D'_{j+1} , $j = 2, \dots, t-1$) пересекаются по ребру; $|\varphi(\partial D_i \setminus \partial D_i \cap \sigma)| = 4$, если $2 \leq i < k$; $|\varphi(\partial D'_j \setminus \partial D'_j \cap \tau)| = 4$, если $2 \leq j < t-1$; $|\varphi(\partial D_k \setminus \partial D_k \cap \sigma)| = 3$, $|\varphi(\partial D'_t \setminus \partial D'_t \cap \tau)| = 3$, причем процесс построения областей D_i (D'_j) начинается со случая, когда $k = 2$ ($t = 2$); алгоритм построения областей аналогичен указанному в лемме, за тем исключением, что всякий раз он начинается с нахождения областей D_k (D'_t).

Метка каждой области $D \subset M$ удовлетворяет условию $|\varphi(\partial D)| \geq 6$, поэтому

$$|u_i| \leq 2, \quad i = 2, \dots, k-1, \quad |u_k| \geq 3 \quad (|v_j| \geq 2, \quad j = 2, \dots, t-1, \quad |v_t| \geq 3).$$

Если для данного разбиения циклических слов u , v и фиксированного соединения концов σ_1, τ_1 можно построить интересующие нас последовательности областей $\{D_i\}_{i=2, \dots, k}$, $\{D'_j\}_{j=2, \dots, t}$, для некоторых k и t , $2 \leq k \leq m$, $2 \leq t \leq n$, то тем самым будет определена метка $\varphi(\chi)$, для которой проверяется выполнимость равенства $\varphi(\chi)^{-1} u^* \varphi(\chi) = v^*$ (u^* , v^* — циклические перестановки u , v) и существование области D_i , $\partial \tilde{D}_i = \sigma_1 c \tau_1 \chi$, где $\varphi(\sigma_1) = u_i^{-1}$, $\varphi(\tau_1) = v_i$, $\varphi(\chi) = \varphi(e'_1) \varphi(e'_2)$ и $|\varphi(c)|$ согласно лемме 18 удовлетворяет либо условию $|\varphi(c)| = 1$, либо условию $|\varphi(c)| = 2$. Если одно из указанных выше условий не выполняется, то определяем метку пути χ , соединяющего конец σ_1 с концом τ_2 , если $\varphi(\sigma_1)$, $\varphi(\tau_2)$ содержатся в одной подгруппе G_{ij} .

Таким образом, применяя указанный процесс для различных соединений концов σ_i , τ_j отрезком χ и для различных разбиений слов u , v на подслова, мы через конечное число шагов можем проверить, существует ли искомое $\varphi(\chi)$.

Лемма 22 ([2]). Пусть u , v — слова группы Кокстера большого типа, обладающие свойством s . Тогда можно эффективно установить, являются ли u , v граничными метками кольцевой связной приведенной R -диаграммы M вида 1° .

Пусть w — произвольное слово группы Кокстера большого типа. Рассмотрим следующие преобразования, укорачивающие длину циклического слова w :

- (π_1) циклическое сокращение w в свободном произведении F ;
- (π_2) циклическое R -сокращение в G ;
- (π_3) циклическое специальное R -сокращение в G ;
- (π_4) кольцевое специальное R -сокращение в G ;
- (π_5) переход от w к сопряженному слову u , $|u| < |w|$, с помощью кольцевой диаграммы вида 1° ;
- (π_6) то же, что π_5 , но с помощью кольцевой диаграммы вида 2° ;
- (π_7) то же, что π_5 , но с помощью кольцевой диаграммы вида 3° .

Слово w , полученное из v применением к нему преобразований π_1 – π_7 в G , назовем тупиковым для v , если оно инвариантно относительно этих преобразований.

Из лемм 9–22 следует, что для любого слова $v \in G$ можно эффективно построить соответствующее ему тупиковое слово w .

Кольцевую связную приведенную R -диаграмму M с граничными циклами σ, τ назовем простой, если $|M| \geq 1$ и $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$; M назовем вырожденной, если $|M| = 0$, где $|M|$ — число областей диаграммы M .

Кольцевая связная приведенная R -диаграмма M с граничными циклами σ, τ называется n -слойной, $n \geq 1$, если после последовательного удаления граничных слоев получим вырожденную кольцевую R -диаграмму, и называется $(C - n)$ -слойной, если в результате удаления указанных выше граничных слоев получим простую кольцевую R -диаграмму.

Лемма 23. Пусть $v \in G$, G — группа Кокстера большого типа, v обладает свойством s и w — тупиковое для v слово. Тогда никакое слово $u \in G$, $|u| < |w|$, не сопряжено с v .

Доказательство непосредственно использует понятие тупикового слова, R -сокращения и специального R -сокращения.

Пусть M — кольцевая специальная R -диаграмма типа $C(6)$ с граничными циклами σ, τ . Тогда граничный слой $K_\sigma(K_\tau)$ назовем RK -слоем, если

$$|\partial K_\sigma \cap \partial M| = |\partial K_\sigma \cap \partial M'| \quad (|\partial K_\sigma \cap \partial M| = |\partial K_\sigma \cap \partial M''|),$$

где M' (M'') получена из M удалением внешнего K_σ (внутреннего K_τ) слоя.

Лемма 24. Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R -диаграмма вида $C(6)$ группы G Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ . Пусть $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ являются тупиковыми. Если M — n -слойная либо $(C - n)$ -слойная диаграмма с $n > 1$, то $d(D) = 6$ для любой области $D \subset M$.

Доказательство. Пусть M — n -слойная R -диаграмма, $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ являются тупиковыми, тогда M — специальная R -диаграмма, у которой K_σ, K_τ являются RK -слоями. Если $n = 2$, то утверждение леммы очевидно. Если $n > 2$, то M' и M'' являются специальными и в силу леммы 18 из [6] $K_{\sigma'}$ и $K_{\tau'}$ являются RK -слоями. Отсюда следует, что для n -слойной R -диаграммы лемма справедлива.

Пусть M — $(C - n)$ -слойная R -диаграмма, являющаяся, как и в предыдущем случае, специальной, граничные слои которой K_σ, K_τ — RK -слои. Рассмотрим R -диаграмму $\tilde{M}$, полученную из M удалением простой кольцевой диаграммы M_n , M_n имеет граничные циклы σ_n, τ . Как доказано в лемме 22 из [6], в диаграмме $\tilde{M}$, являющейся n -слойной с граничными циклами σ, σ_n , слой K_{σ_n} является RK -слоем, поэтому все области $D \subset \tilde{M}$ имеют $d(D) = 6$. Покажем, что любая область $D \subset M_n$ имеет $d(D) = 6$.

Если $M_n \subset K_\tau$, то лемма справедлива. Пусть $M_n \not\subset K_\tau$. Простая кольцевая диаграмма M_n состоит из односвязных компонент $M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(p)}$, каждая из которых является поддиаграммой некоторой Γ -диаграммы кольцевой M_{n-1} -диаграммы, полученной из $M = M_0$ удалением граничных слоев $K_{\sigma_0}, K_{\sigma_1}, \dots, K_{\sigma_{n-2}}$. Пусть $M_n^{(s)}$, $1 \leq s \leq p$, — произвольные компоненты M_n и χ_s, χ'_s — простые пути, соединяющие $M_n^{(s)}$ с предыдущей и последующей компонентами M_n , $v_s = \chi_s \cap M_n^{(s)}$, $v'_s = \chi'_s \cap M_n^{(s)}$, v_s, v'_s — вершины.

Из структуры диаграммы Γ , в которой содержится $M_n^{(s)}$ следует, что в $M_n^{(s)}$ содержатся области D, D' , для которых

$$\partial D = p_1 p_2 p_3, \quad \partial D \cap \sigma_n = p_1, \quad \partial D \cap \tau = p_2, \quad 1 \leq |p_3| \leq 2, \quad p_1 \cap p_2 = v_s,$$

аналогично,

$$\partial D' = p'_3 p'_2 p'_1, \quad p'_2 = \partial D' \cap \tau, \quad p'_1 = \partial D' \cap \sigma_n, \quad 1 \leq |p'_3| \leq 2, \quad p'_1 \cap p'_2 = v'_s.$$

Выделим в M_n все поддиаграммы $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_t$ типа Γ , каждая Γ_i ограничена слева областью D_i , справа областью D'_i , $D_i, D'_i \subset K_\tau$,

$$\begin{aligned} \partial \Gamma_i &= c_i \gamma_i s_i \delta_i, & \gamma_i &= \partial \Gamma_i \cap \sigma_n, & \delta_i &= \partial \Gamma_i \cap \tau, \\ c_i &= \partial \Gamma_i \cap D_i, & s_i &= \partial \Gamma_i \cap D'_i, & |c_i| &= |s_i| = 2. \end{aligned}$$

Пусть $\Gamma'_i = D_i \cup \Gamma_i \cup D'_i$, Γ'_i вдоль γ_i не должна содержать деновских областей и полос, в противном случае в K_{σ_n} будет содержаться полоса. Поэтому для каждой граничной в Γ'_i области $D \subset \Gamma_i$ справедливы неравенства $3 \leq i(D) \leq 5$ в Γ'_3 и $d(D) = 6$, в противном случае в K_{σ_n} будет содержаться полоса. Удалим в M_n все области D_i , граничащие с σ_n , получим кольцевую диаграмму M'_n с граничными циклами σ'_n, τ , являющуюся простой. Проводя для M'_n рассуждения, аналогичные изложенным выше, получим, что все граничные области D в M'_n имеют $d(D) = 6$ и так далее.

Теорема 4 ([1]). Пусть G — группа Кокстера большого типа с множеством образующих A , $|A| < \infty$, определяемая матрицей Кокстера M_A . Тогда подгруппа, порожденная множеством $A_J \subset A$, есть группа Кокстера большого типа, определяемая матрицей Кокстера M_J , полученной из M_A удалением строк и столбцов, именованных образующими из $A \setminus A_J$.

Лемма 25. Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R -диаграмма вида $C(6)$ с граничными циклами σ, τ группы G Кокстера большого типа. Пусть $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ обладают свойством s , $\varphi(\sigma)$ — слово на образующих A_j , $A_j \subset A$, A — множество образующих G , $\varphi(\sigma)$ не является образующим из A_j . Тогда $\varphi(\tau) \in G_j$ и слова $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ сопряжены в G_j .

Доказательство. Из условий леммы следует, что кольцевая R -диаграмма M является специальной. Если M — n -слойная диаграмма, $n > 1$, то нетрудно убедиться в том, что метка каждой области $D \subset M$ принадлежит G_j . Пусть теперь M является $(C - n)$ -слойной диаграммой. Рассмотрим кольцевую диаграмму $\tilde{M}$ с граничными циклами σ, σ_n , полученную из M удалением простой кольцевой поддиаграммы M_n ; M_n имеет граничные циклы σ_n, τ . Слово $\varphi(\sigma_n)$ обладает свойством s , поэтому $\varphi(\sigma_n) \in G_j$ и метка любого подпути, содержащегося в $\tau \cap \sigma_n$, является словом в G_j .

Пусть $M_n^1, M_n^2, \dots, M_n^p$ — односвязные поддиаграммы M_n . Рассмотрим поддиаграмму M_n^j , $1 \leq j \leq p$, которая простым путем χ_j соединена с предыдущей поддиаграммой, χ'_j — с последующей, $\chi_j, \chi'_j \subset \tau \cap \sigma_n$, $v_j = \chi_j \cap M_n^j$, $v'_j = \chi'_j \cap M_n^j$, v_j, v'_j — вершины M_n^j . Пусть D_0, D'_0 — области из M_n^j такие, что $v_j \in \partial D_0$, $v'_j \in \partial D'_0$, $\partial D_0 = p_1 p_2 p_3$, где

$$\begin{aligned} \partial D_0 \cap \sigma_n &= p_1, & \partial D_0 \cap \tau &= p_2, & 1 \leq |p_3| &\leq 2, \\ p_1 \cap p_2 &= v_s, & \partial D' &= p'_3 p'_2 p'_1, & p'_2 &= \partial D'_0 \cap \tau, & \partial D'_0 \cap \sigma_n &= p'_1, & 1 \leq |p'_3| &\leq 2. \end{aligned}$$

Если $|p_3| = 1$ ($|p'_3| = 1$), то $|p_1| > 1$ ($|p'_1| > 1$), так как если $|p_1| = 1$ ($|p'_1| = 1$), то получаем R -сократимость $\varphi(\tau)$. Отсюда следует, что $\varphi(D_0), \varphi(D'_0) \in G_j$. Если $|p_3| = 2$, $|(p_2)| \geq 3$, $|p_1| = 1$, то в K_τ содержится полоса, так как в этом случае D_0 ограничивает слева поддиаграмму Γ , при $|p_1| > 1$ $\varphi(D_0) \in G_j$. Пусть $|p_3| = 1$ и $M_n^j \subset K_\tau$, в этом

случае метка любой области $D \subset M_n^j$, в чем нетрудно убедиться, принадлежит G_j . Пусть $M_n^j \subset K_\tau$. Рассмотрим последовательность областей $D_0, D_1, \dots, D_k$ из M_n^j , любые две D_i, D_{i+1} , $0 \leq i < k$, из которых пересекаются по ребру и $i(D_s) = 2$, $1 \leq s < k$, в M_n^j , но $i(D_k) > 2$, а именно, $i(D_k) = 3$. Очевидно, что метка каждой области $D \subset M_n^j$ принадлежит G_j .

Рассмотрим область D_k . Пусть $\partial D_k = p_1 p_2 p_3 p_4$, где

$$p_1 = \partial D_k \cap \sigma_n, \quad p_2 = D_{k-1} \cap D_k, \quad p_3 = \partial D_k \cap \tau, \quad |p_4| = 2,$$

причем область D_k в рассматриваемом случае ограничивает слева поддиаграмму Γ , $\partial \Gamma = \gamma c s \delta$, где

$$\partial \Gamma \cap \sigma_n = \gamma, \quad \partial \Gamma \cap \tau = \delta, \quad \partial \Gamma \cap D_k = c = p_4, \quad \partial \Gamma \cap D'_k = s,$$

D'_k — область, ограничивающая Γ справа, $\partial D'_k \cap \partial M_n^j$ — несвязное множество. Если $|p_1| = 0$, то $i(D_k) = 3$ в M и M вдоль границы τ содержит полосу. Поэтому $|p_1| \neq 0$ и $\varphi(D_k) \in G_j$.

Введем обозначение $\Gamma' = D_k \cup \Gamma \cup D'_k$. Каждая область $D \subset \Gamma'$, $D \subset \Gamma$, граничащая с γ , имеет внутреннюю степень $i(D)$, $3 \leq i(D) \leq 5$, причем область D с $i(D) = 5$ граничит с простыми граничными областями D' , D'' , имеющими внутреннюю степень 3 либо 4, метка которых принадлежит G_j , поэтому $\varphi(D) \in G_j$. Остается показать, что метка D'_k тоже принадлежит G_j . Пусть $\partial D_k = s p'_1 s' p'_2$, где $\partial D'_k \cap \sigma_n = p'_2$, $\partial D'_k \cap \tau = p_1$. Если $|p'_2| \neq 0$, то $\varphi(D'_k) \in G_j$. Пусть $|p'_2| = 0$ и $s' = 2$. Тогда D'_k ограничивает слева следующую Γ -поддиаграмму, в этом случае M содержит полосу вдоль τ (см. лемму 22 в [6]). Случай, когда $|p'_2| = 0$, $|s'| = 1$, невозможен по тем же соображениям (см. лемму 22 в [6]).

Таким образом, все области из M_n , граничащие с σ_n , имеют метки, принадлежащие G_j . Следовательно, метка σ'_n простой кольцевой R -диаграммы M'_n , полученной из M_n удалением областей, граничащих с σ_n , будет принадлежать G_j . Проводя для M'_n рассуждения, аналогичные вышеизложенным, убеждаемся, что все области из M'_n , граничащие с σ_n , имеют метки из G_j , и так далее.

В случае, если диаграмма M есть диаграмма 1° , 2° , либо 3° , рассуждая указанным выше образом, убеждаемся в справедливости леммы.

Следствие 1. Пусть $u, v \in G$, G — группа Кокстера большого типа, A — множество образующих G , u, v обладают свойством s и существует $z \in G$ такое, что $z^{-1}uz = v$. Тогда, если слово u есть слово на образующих A_j , $A_j \subset A$, и не является образующим из A_j , то $v \in G_j$ и существует $z' \in G_j$, $z' = z$ в G такое, что $z'^{-1}uz' = v$, где $z'^{-1} = \text{rev}(z')$.

Следствие 2. Пусть G — группа Кокстера большого типа на образующих A , G_j — подгруппа G на множестве образующих $A_j \subset A$, слово u обладает свойством s , $u \in G_j$ и не является образующим из A_j , $A_j \subset A$, тогда $N_G(u) = N_{G_j}(u)$.

Рассмотрим кольцевые связные приведенные R -диаграммы группы Кокстера большого типа, содержащие $(s - i)$ -области.

Лемма 26. Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R -диаграмма группы G Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ ; $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s . Тогда если M содержит $(s - i)$ -область, то все области M являются $(s - i)$ -областями.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда кольцевая R -диаграмма M , удовлетворяющая условию леммы, содержит две $(s-i)$ -области ξ_1 и ξ_2 , между которыми находятся не $(s-i)$ -области. Кольцевую поддиаграмму кольцевой R -диаграммы M , расположенную между областями ξ_1 , ξ_2 обозначим через J . Пусть кольцевая связная R -диаграмма J такова, что для каждой ее граничной области D множество $\partial D \cap \partial J$ связно. Тогда для кольцевой J -диаграммы имеет место соотношение $\sum_J^* (4-i(D)) \geq 0$, из которого следует, что существуют граничные области D , $D \in J$, с внутренней степенью $i(D) \leq 4$. Но каждая граничная область $D \in J$ может пересекаться с ξ_1 либо ξ_2 по ребру. Получаем противоречие.

Допустим, что J -кольцевая связная приведенная R -диаграмма имеет вид 1°. Тогда каждая область $D \in J$ является граничной и имеет в J внутреннюю степень $i(D) = 2$. Так как $d(D) \geq 6$, получим, что либо $|\varphi(\partial D \cap \partial \xi_1)| > 1$, либо $|\varphi(\partial D \cap \partial \xi_2)| > 1$. Но и то и другое противоречит условию минимальности R -диаграммы M .

Рассмотрим теперь случай, когда кольцевая связная приведенная R -диаграмма J имеет вид 2°. Докажем, что J содержит граничную область D , пересекающуюся с ξ_1 либо с ξ_2 по граничному пути, состоящему более чем из одного ребра. Пусть σ' , τ' — граничные циклы кольцевой R -диаграммы J . Допустим, что J состоит из одной связной односвязной компоненты. Пусть $\gamma = \sigma' \cap \tau'$ и v' — начальная вершина γ , v'' — конечная вершина. Пусть D' и D'' — граничные области из J , содержащие соответственно вершины v' , v'' , и пусть $\partial D' \cap \sigma' \neq v'$, $\partial D'' \cap \sigma' \neq v''$.

Если $i(D') \leq 1$ ($i(D'') \leq 1$) в J , то D' (D'') пересекается с ξ_1 либо с ξ_2 по пути, состоящему более чем из одного ребра, поэтому $i(D') \geq 2$ и $i(D'') \geq 2$ в J . Однако в этом случае (см. леммы 17–22 в [6]) R -диаграмма J вдоль границы $\sigma'' = \partial J \cap \sigma'$ либо $\tau'' = \partial J \cap \tau'$ содержит либо деновскую область, либо полосу, либо J содержит простую граничную область D , пересекающуюся с ξ_1 либо с ξ_2 по пути, состоящему более чем из одного ребра. Если J состоит более чем из одной связной односвязной компоненты, то рассуждения аналогичны. Если J — кольцевая R -диаграмма вида 3°, то как следует из лемм 17–22 из [6], J содержит простую граничную область D с $i(D) \leq 3$ в J , пересекающуюся с ξ_1 либо с ξ_2 по пути, состоящему более чем из одного ребра. Рассмотрим теперь случай, когда между граничным циклом σ и $(s-i)$ -областью ξ кольцевой R -диаграммы M содержатся области, отличные от $(s-i)$ -областей, которые образуют кольцевую связную приведенную поддиаграмму J R -диаграммы M .

Пусть τ' — внутренний граничный цикл кольцевой диаграммы J . Допустим, что J — n -слойная либо $(C-n)$ -слойная кольцевая R -диаграмма, $n > 1$. Тогда каждая граничная область $D \in J$, для которой $\partial D \cap \tau' \neq \emptyset$, пересекается с ξ максимум по ребру. Поэтому внутренняя степень $i(D) \geq 5$ в J . Число областей из J , граничащих с ξ , не менее двух и $\sum_J^* (4-i(D)) \geq 0$, поэтому $\sum_J^* (4-i(D)) \geq 2$. Отсюда следует, что R -диаграмма содержит полосу, либо деновскую область, примыкающую к σ , что невозможно. Допустим, что J — кольцевая R -диаграмма вида 1°. Так как каждая область $D \in J$ имеет в J внутреннюю степень, равную 2, и $\partial J \cap \partial D$ — несвязное множество, D пересекается с ξ максимум по ребру, поэтому $i(D) \leq 3$ в M , что противоречит тому, что $\sum_{\sigma}^* (4-i(D)) = 0$ в M . Пусть J — кольцевая связная приведенная R -диаграмма вида 2° и J содержит одну связную односвязную компоненту. Пусть также $\gamma = \sigma \cap \tau'$, v' , v'' — соответственно начальная и конечная точки γ и D' , D'' — области из J , содержащие соответственно v' , v'' и такие, что $\partial D' \cap \sigma \neq v'$, $\partial D'' \cap \sigma \neq v''$. Если $i(D') \leq 1$ ($i(D'') \leq 1$) в J , то либо D' — деновская область в M , либо D' пересекается с ξ по пути, содержащему более одного ребра. Поэтому $i(D') \geq 2$ ($i(D'') \geq 2$). Но в этом случае, как было отмечено выше в аналогичном случае, R -диаграмма J вдоль границы $\sigma'' = \partial J \cap \sigma'$ ($\tau'' = \partial J \cap \tau'$)

содержит либо деновскую область, либо полосу, либо простые граничные области D_1, D_2 с $i(D_1) = i(D_2) = 3$ в J и $\partial D_1 \cap \sigma'' = \partial D_2 \cap \partial J \neq \emptyset, \partial D_2 \cap \tau'' = \partial D_2 \cap \partial J \neq \emptyset$. Каждый из этих случаев невозможен, так как либо противоречит условию s , которым обладает слово $\varphi(\sigma)$, либо в J содержится граничная область, которая пересекается с ξ по пути, содержащему более одного ребра. Если J состоит более чем из одной компоненты, то рассуждения аналогичны.

Пусть J — кольцевая связная приведенная R -диаграмма вида 3° . В этом случае, как доказано в леммах 17–22 в [6], в J можно выделить связную односвязную поддиаграмму Γ с граничным циклом $\partial\Gamma = \gamma\delta c'$, $\partial\Gamma \cap \sigma = \gamma, \partial\Gamma \cap \tau' = \delta, |c| = |c'| = 2$, заключенную в J между областями $\tilde{D}, \tilde{D}'$, то есть $\partial\tilde{D} \cap \partial\Gamma = c, \partial\tilde{D}' \cap \partial\Gamma = c'$. Применяя леммы 17–22 из [6], мы получаем, что Γ вдоль границы γ либо δ содержит либо деновскую область, либо полосу, либо в Γ содержатся простые граничные области D_1, D_2 с $i(D_1) = i(D_2) = 3$ в J и $\partial D_1 \cap \sigma \neq \emptyset, \partial D_2 \cap \tau'' \neq \emptyset$. Каждый из этих случаев невозможен, так как либо противоречит условию s , которым обладает слово ξ , либо в J содержится граничная область D , пересекающаяся с ξ по пути, состоящему более чем из одного ребра.

Следствие 3. Пусть M — связная приведенная минимальная R -диаграмма группы Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ ; $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s . Тогда если M состоит из $n, n > 1$, $(s - i)$ -областей, то $\varphi(\sigma) = x, \varphi(\tau) = y$, где $x, y \in \{a_1, \dots, a_n\}$, $\{a_i\}$ — множество образующих группы G .

Лемма 27. Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R -диаграмма группы Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ ; $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s . Тогда если $\varphi(\sigma) = x$, где $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$, $\{a_i\}$ — множество образующих группы G , то $\varphi(\tau) = y, y \in \{a_1, \dots, a_n\}$.

Доказательство. Если M содержит $(s - i)$ -область, то из предыдущей леммы следует, что она состоит из одних $(s - i)$ -областей. Если M состоит из одной $(s - i)$ -области, $\varphi(\sigma), \varphi(\tau) \in G_{ij}$ то $\varphi(\sigma) = x$ и $\varphi(\tau) = y$, где $x, y \in \{a_1, \dots, a_n\}$, $\{a_i\}$ — множество образующих группы G . Допустим, что M не содержит $(s - i)$ -области, тогда M является R -диаграммой с условием $C(6)$. Если M — $(C - n)$ -слоеная R -диаграмма с $n > 1$, то M содержит простую граничную область D такую, что $\partial D \cap \sigma \neq \emptyset$ и $i(D) = 3$. Но тогда $|\varphi(D)| \leq 4$, что невозможно. Если M — $(C - 1)$ -слоеная R -диаграмма, то M содержит простую граничную область D такую, что $\partial D \cap \sigma \neq \emptyset$ и $i(D) = 3$. Получили рассмотренный выше случай.

Допустим, что M — n -слоеная R -диаграмма с $n > 1$. Легко заметить, что метки всех областей из K_σ -слоя принадлежат одной группе G_{ij} . Поэтому $\varphi(\sigma_1) = y$, где $x, y \in \{a_i, a_j\}$ и K_σ -слой является $(s - i)$ -областью.

Случай, когда M — 1-слоеная R -диаграмма, аналогичен предыдущему. Пусть M — R -диаграмма типа 2° , каждая область D которой является граничной, и пересечение $\partial D \cap \partial M$ — несвязное множество. Тогда M состоит из конечного числа связных односвязных диаграмм. Рассмотрим для простоты случай, когда M состоит из одной односвязной R -диаграммы M_1 . Тогда $\partial M_1 \cap \sigma = \sigma_1, \partial M_1 \cap \tau = \tau_1$ и метки $\varphi(\sigma_1), \varphi(\tau_1)$ принадлежат некоторой группе G_{ij} . Области $D_1, D_2, \dots, D_n$, составляющие M_1 , образуют полосу, что невозможно, так как $\varphi(\tau)$ обладает свойством s . Если в R -диаграмме M типа 2° содержится простая граничная область, то в M можно выделить односвязную поддиаграмму $\Gamma, \partial\Gamma = \gamma c_1 \delta c_2$, где $\gamma = \partial\Gamma \cap \sigma, \delta = \partial\Gamma \cap \tau, |c_1| = |c_2| = 2$, в которой содержится простая граничная область D с $i(D) = 3$ в M и $\partial D \cap \sigma \neq \emptyset$, что невозможно. Если M является R -диаграммой типа 3° , то, как и в предыдущем случае, можно выделить

односвязную поддиаграмму Γ , содержащую простую граничную область D с $i(D) = 3$ в M и $\partial D \cap \sigma \neq \emptyset$. И наконец, диаграмма типа 1° есть 1-слойная R -диаграмма.

Лемма 28. Пусть G — группа Кокстера большого типа с множеством образующих A . Если $v_0 \in G$, $v_0 \neq 1$ в G и v_0 — R -приведенное специально R -приведенное слово, равное слову из подгруппы G_j с образующими A_j , $A_j \subset A$, то v_0 — слово на образующих A_j .

Доказательство. Пусть слово v_0 , удовлетворяющее условиям леммы, содержит буквы из множества $B_j = A \setminus A_j$ и равно некоторому слову $u_0^{-1} \in G_j$. Пусть $v_0 = v_{01} v v_{02}$, где $v_{01}, v_{02} \in G_j$, v начинается и оканчивается на буквы из B_j . Преобразуем равенство $v_0 = u_0^{-1}$ в равенство $v = u^{-1}$, где $u^{-1} = v_{01}^{-1} v_0^{-1} v_{02}^{-1}$, u^{-1} — R -приведено и специально R -приведено. Слово uv является приведенным и циклически приведенным, и $uv = 1$ в G . Тогда существует связная односвязная приведенная минимальная R -диаграмма M с граничным циклом $\alpha\beta$, где $\varphi(\alpha) = u$, $\varphi(\beta) = v$. Допустим, что M состоит из одной области D . Тогда α является ребром D , поэтому $|u| = 1$ и слово v является R -сократимым. Допустим, что M не содержит n областей $n > 1$. Тогда для M выполняется формула кривизны $\sum_M^* (4 - i(D)) \geq 6$. Тогда $\alpha \cap \beta = \{O_1, O_2\}$, где $O_1 = H(\alpha) = K(\beta)$, $O_2 = K(\alpha) = H(\beta)$. Покажем, что M не содержит деновских областей. Допустим противное. Пусть D — деновская область M . Тогда ∂D содержит либо точку O_2 , либо O_1 . Допустим, что $O_2 \in \partial D$, тогда $\partial D \cap \partial M = \gamma\delta$, где $\partial D \cap \alpha = \delta$, $\partial D \cap \beta = \gamma$. Учитывая строение метки $\varphi(\partial D)$ и условие $u \in G_j$, получаем, что $|\varphi(\delta)| = 1$ и $|\varphi(\gamma)| \geq 3$. Так как v является R -несократимым, справедливы равенства $i(D) = 2$ и $|\varphi(\gamma)| = 3$. В этом случае в M можно выделить связную односвязную поддиаграмму Γ , ограниченную в M слева областью D , справа областью D' , $\partial \Gamma = \alpha_1 c' \beta_1$, где $\partial \Gamma \cap \alpha = \alpha_1$, $\partial \Gamma \cap \beta = \beta_1$, $\partial D \cap \Gamma = c$, $\partial D' \cap \Gamma = c'$, $|c| = |c'| = 2$. Обозначим M_1 объединение D , Γ и D' и через $D_1, D_2, \dots, D_p$ — области, которые содержатся в Γ и граничат с β_1 . Как показано в леммах 19–22 в [6], все они являются простыми в M_1 и $3 \leq i(D_j) \leq 5$ для всех j , $1 \leq j \leq p$, кроме того, существует m , $1 \leq m \leq p$, такое, что $i(D_1) = i(D_2) = \dots = i(D_{m-1}) = 4$, $i(D_m) = 3$ в M_1 , а также и в M . Поэтому в M области $D, D_1, \dots, D_m$ образуют полосу, то есть v специально R -сократимо, что невозможно. Тогда M содержит как минимум три непересекающиеся полосы, что невозможно.

Пусть M — кольцевая R -диаграмма, v — произвольная точка, принадлежащая некоторому замкнутому ребру $e \in M$, $e = e'e''$, $e' \cap e'' = v$. Тогда замкнутый путь $l \in M$ с начальной и конечной точкой v

$$l = e'^{-1} e_1 \dots e_n t,$$

где $t = e'$, либо $t = e''^{-1}$, либо $l = e'' e'_1 \dots e'_n t'$, где $t' = e'$, либо $t' = e''^{-1}$ назовем циклическим в M , если l гомотопен τ , соответственно σ . Кратчайший из всех циклических путей кольцевой R -диаграммы M , проходящих через некоторую точку v , принадлежащую ребру e , $e \in M$, назовем циклическим геодезическим путем с началом и концом в v .

Теорема 5 ([2]). В группе Кокстера большого типа разрешима проблема сопряженности слов.

Теорема 6. Централизатор конечно порожденной подгруппы H группы Кокстера большого типа G есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора.

Доказательство. Пусть M — кольцевая R -диаграмма, v — произвольная точка, принадлежащая некоторому замкнутому ребру $e \in M$, $e = e'e''$, $e' \cap e'' = v$. Тогда замкнутый путь $l \in M$ с начальной и конечной точкой v

$$l = e'^{-1} e_1 \dots e_n t,$$

где $t = e'$, либо $t = e''^{-1}$, либо $l = e''e'_1 \dots e'_n t'$, где $t' = e'$ либо $t' = e''^{-1}$, назовем циклическим в M , если l гомотопен τ , соответственно σ . Кратчайший из всех циклических путей кольцевой R -диаграммы M , проходящих через некоторую точку v , принадлежащую ребру e , $e \in M$, назовем циклическим геодезическим путем с началом и концом в v .

Пусть u, v — слова, принадлежащие группе Кокстера большого типа, заданной на множестве образующих $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ с помощью матрицы Кокстера $(m_{ij})_{i,j \in J}$, $|J| = n$. Допустим, что слова u, v являются тупиковыми и сопряжены в G . Тогда существует кольцевая связная приведенная R -диаграмма с граничными циклами σ, τ , метками которых являются соответственно слова u, v .

Пусть $u = x$, $x \in \{a_i\}_{i=1, \dots, n}$, тогда из предыдущей леммы следует, что $v = y$, $y \in \{a_i\}$, $i = 1, \dots, n$, и диаграмма сопряженности этих слов состоит из $(s-i)$ -областей. Пусть $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_k = \tau$ — граничные циклы R -диаграмм, полученных из $M = M_0$ последовательным удалением $(s-i)$ -областей. Но тогда $\varphi(\sigma_i) = x_i$, $x_i \in \{a_i\}_{i=1, \dots, n}$ и любые два элемента x_{i-1}, x_i , $i = 1, \dots, n$, где $x = x_0$, $x_n = y$ сопряжены в $G_{x_{i-1}x_i}$ максимальным куском определяющего соотношения группы $G_{x_{i-1}x_i}$. Пусть

$$m_0 = \max\{m_{ij} < \infty \mid m_{ij} \text{ элементы матрицы Кокстера}\}.$$

Тогда длина d произвольного циклического геодезического пути из M заключена в пределах $|u| \leq d \leq |u| + 2m_0$.

Пусть слова u, v не являются образующими G . В этом случае u, v будут метками граничных циклов кольцевой R -диаграммы с условием $C(6)$. Слово u сопряжено с v , и u, v обладают свойством s и являются тупиковыми, поэтому $|u| = |v|$.

Если M — n -слойная диаграмма, $n > 1$, то длина циклического геодезического пути d не превосходит $|u|$. Пусть M — $(C-n)$ -слойная R -диаграмма, $n > 1$; выделим в ней максимальную n -слойную диаграмму M' и, удалив ее из M , получим диаграмму M_n . В M' длина d произвольного циклического пути не превосходит $|u|$. Укажем границы изменения длины циклического геодезического пути для M_n -диаграммы. Любая область $D \in M_n$ имеет $d(D) = 6$, тогда максимальная длина метки областей $D \in M_n$ не превышает $L = 6$. Используя формулу Р. Линдона (см. [3]) о числе площадей в односвязной R -диаграмме, получим что длина d циклического геодезического пути заключена в пределах

$$|u| \leq d \leq q(2|u|L + 4L)^2(3L + 2|u|) + 2L.$$

Пусть $w_1, w_2, \dots, w_m$ — образующие H , $H < G$; считаем, что $w_1 = w_{10}$ — тупиковое слово, удовлетворяющее условию s и $w_i = c_i w_{10} c_i^{-1}$ для всех i , $1 < i \leq m$, где w_{10} тоже обладает свойством s и является тупиковым; $\Delta(w_{10}, w_{10})$ — кольцевая связная приведенная R -диаграмма сопряженности слова w_{10} слову w_{10} . Введем обозначения $c = \max\{|c_1|, \dots, |c_m|\}$, где $|c_1| = 0$, $L = 2(m_0 + 1)$ и $S(w_i, w_i)$, $i = 1, \dots, m$, — множество слов, длины d_i которых заключены в пределах

$$|w_{10}| \leq d_i \leq q(2|w_i| + 2L)^2(2|w_i| + 3L) + 2L + 2|c|.$$

Рассмотрим последовательность

$$w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_p, w_1^{(p)}, \dots, w_n^{(p)}, \dots \quad (1)$$

где $H_i^{-1} w_1^{(i-1)} H_i = w_1^{(i)}, \dots, H_i^{-1} w_n^{(i-1)} H_i = w_n^{(i)}, H_i \in \{a_i\}$ для всех $i, 1 \leq i \leq p$, $w_j^{(s)} \in S(w_j, w_j)$ для всех $j, s, 1 \leq j \leq n, 1 \leq s \leq p$.

Последовательность (1) называется базисной. Базисную последовательность (1) назовем фундаментальной, если для всех $j, s, 0 \leq j < s < p$, наборы $(w_1^{(j)}, \dots, w_n^{(j)}), (w_1^{(s)}, \dots, w_n^{(s)})$ различны и существует целое $v, 0 \leq v < p$, такое что

$$w_1^{(v)} = w_1^{(p)}, \dots, w_n^{(v)} = w_n^{(p)}.$$

Лемма 29. Если последовательность (1) фундаментальная, то слово

$$H_1 H_2 \dots H_p H_v^{-1} \dots H_1^{-1}$$

принадлежит централизатору подгруппы H .

Доказательство очевидно.

Слово $H_1 H_2 \dots H_p H_v^{-1} \dots H_1^{-1}$, связанное с фундаментальной последовательностью (1), назовем базисным словом.

Лемма 30. Если последовательность (1) является фундаментальной базисной последовательностью, то

$$p \leq |S| = |S(w_1, w_1)| \dots |S(w_n, w_n)|.$$

Лемма 31. Число фундаментальных базисных последовательностей конечно.

Доказательство очевидно.

Лемма 32. Пусть $F \in C_G(H)$, $C_G(H)$ — централизатор H в G . Тогда существует разбиение F в произведение образующих

$$F = H_1 H_2 \dots H_m, \quad H_i \in \{a_i\}, \quad i = 1, \dots, m,$$

и базисная последовательность, связанная с данными разбиением F , то есть

$$w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_m, w_1^{(m)}, \dots, w_n^{(m)}.$$

Доказательство. Пусть $F \in C_G(H)$, $F \neq 1$, тогда имеет место система соотношений

$$F^{-1} w_1 F = w_1, \quad c_2 F^{-1} c_2^{-1} w_{20} c_2 F c_2^{-1} = w_{20}, \dots, c_n F^{-1} c_n^{-1} w_{n0} c_n F c_n^{-1} = w_{n0}.$$

Пусть для всех $i, 1 < i \leq n$, существуют X_i, Y_i, F_i такие, что $F \equiv X_i F_i Y_i$, где $\equiv$ означает графическое равенство, $c_i = c'_i X_i^{-1} = c''_i Y_i$. В результате получаем равенства

$$F^{-1} w_1 F = w_1, \quad c'_i F_i^{-1} c'^{-1}_{i-1} w_{i0} c'_i F_i c''^{-1}_{i-1} = w_{i0}, \quad 1 < i \leq n,$$

где каждое из слов $c'_i F_i c''^{-1}_{i-1}$ несократимо.

Рассмотрим кольцевые приведенные R -приведенные, специально R -приведенные R -диаграммы $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$ с граничными циклами $\sigma^{(i0)}, \tau^{(i0)}$, где $\varphi(\sigma^{(i0)}) = w_{i0}$,

$\varphi(\tau^{(i0)}) = w_{i0}^{-1}$, $1 \leq i \leq n$ (при $i = 1, w_{10} = w_1$), каждая из которых, соответственно, является диаграммой сопряженности для i -го соотношения.

Обозначим через $O^{(i0)}$ начальную точку на $\sigma^{(i0)}$ и через $O'^{(i0)}$ — начальную точку на $\tau^{(i0)}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда в диаграмме $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$, $i = 1, \dots, n$, содержится путь η_i , $\alpha(\eta_i) = O^{(i0)}$, $\omega(\eta_i) = O'^{(i0)}$ с $\varphi(\eta_1) = F$, $\varphi(\eta_i) = c'_i F_i c_i''^{-1}$, $i = 2, \dots, n$, где $\alpha(\eta)$, $\omega(\eta)$ — соответственно начало и конец пути η . Пусть

$$\varphi(\eta_1) = F = H_1^{(1)} H_2^{(1)} \dots H_{m(1)}^{(1)}$$

— разбиение F в диаграмме $\Delta(w_{10}, w_{10})$ на образующие. Тогда

$$F \equiv X_i F_i Y_i = H_1^{(1)} \dots H_{\alpha(i)}^{(1)} H_{\alpha(i)+1}^{(1)} \dots H_{\beta(i)}^{(1)} H_{\beta(i)+1}^{(1)} \dots H_{m(1)}^{(1)},$$

где

$$X_i = H_1^{(1)} \dots H_{\alpha(i)}^{(1)}, \quad F_i = H_{\alpha(i)+1}^{(1)} \dots H_{\beta(i)}^{(1)}, \quad Y_i = H_{\beta(i)+1}^{(1)} \dots H_{m(1)}^{(1)}.$$

С другой стороны, каждое $\varphi(\eta_i) = c'_i F_i c_i''^{-1}$ в соответствующей диаграмме $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$ разбивается на образующие

$$\varphi(\eta_i) = H_1^{(i)} \dots H_{\alpha(i)}^{(i)} H_{\alpha(i)+1}^{(i)} \dots H_{\beta(i)}^{(i)} H_{\beta(i)+1}^{(i)} \dots H_{m(i)}^{(i)},$$

где

$$c'_i = H_1^{(i)} \dots H_{\alpha(i)}^{(i)}, \quad F_i = H_{\alpha(i)+1}^{(i)} \dots H_{\beta(i)}^{(i)}, \quad c_i''^{-1} = H_{\beta(i)+1}^{(i)} \dots H_{m(i)}^{(i)}.$$

Отсюда следуют соотношения

$$F_i = H_{\alpha(i)+1}^{(1)} \dots H_{\beta(i)}^{(1)} = H_{\alpha(i)+1}^{(i)} \dots H_{\beta(i)}^{(i)}.$$

Заметим, что разбиение X_i определяется разбиением F . Аналогично, разбиение Y_j также определяется разбиением F . Следовательно, X_i , Y_j на искомое разбиение F не влияют. В качестве искомого возьмем разбиение $\varphi(\eta_1) = F$ в диаграмме $\Delta(w_{10}, w_{10})$. Получим разбиение $F = H_1 H_2 \dots H_m$ и последовательность $w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}$, $H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}$, $H_2, \dots, H_m, w_1^{(m)}, \dots, w_n^{(m)}$, связанную с полученным разбиением и удовлетворяющую следующим условиям:

$$H_i^{-1} w_1^{(i-1)} H_i = w_1^{(i)}, \dots, H_i^{-1} w_n^{(i-1)} H_i = w_n^{(i)}, H_i \in \{a_i\},$$

для всех i , $1 \leq i \leq m$, и $w_j^{(s)} \in S(w_j, w_j)$ для всех j, s , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq s \leq m$.

Лемма 33. Множество всех базисных слов порождает централизатор подгруппы H .

Доказательство очевидно.

Из лемм 29–33 следует справедливость теоремы 6.

Следствие 4. Централизатор произвольного элемента $w \in G$ есть конечно порожденная подгруппа в G и существует алгоритм, выписывающий образующие этого централизатора.

Заметим, что централизатор элемента в группах Кокстера большого типа в общем случае не является циклической подгруппой. Рассмотрим группу

$$G = \langle a, b, c, d; aba = bab, aca = cac, \\ ada = dad, bcb = cbc, bdb = dbd, cdc = dcd, a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1 \rangle$$

и слово $w = dacdbcab$ из G . Слово w обладает свойством s и является тупиковым. Следовательно, оно не является равным или сопряженным ни одному слову с числом образующих, меньшим трех. И так как w удовлетворяет равенству $awa = w$, централизатор w не является циклической подгруппой.

Заметим также, что в общем случае группы Кокстера большого типа не являются гиперболическими группами. Рассмотрим группу

$$G = \langle a, b, c; aba = bab, aca = cac, bcb = cbc, a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1 \rangle.$$

Данная группа содержит свободную абелеву подгруппу

$$\langle (abc)^2, (bac)^2; (abc)^2(bac)^2 = (abc)^2(bac)^2 \rangle,$$

а потому не может быть гиперболической. Действительно,

$$\begin{aligned} bacbacabcabc &= bacbacabcabc = habcbachcabac = abachabcbabc \\ &= abachabcbabc = abacabachbac = abcachabcbac \\ &= abcachabcbac = abcachcabac = abcachcabac. \end{aligned}$$

Теорема 7. В группе Кокстера большого типа разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

Доказательство. Доказательство данной теоремы сведем к доказательству теоремы 6.

Пусть даны множества слов $w_1, w_2, \dots, w_m$ и $v_1, v_2, \dots, v_m$. Необходимо установить, существует ли z , $z \in G$, такое, что $\&_{i=1}^m (z^{-1}w_i z = v_i)$.

Пусть слова $w_1 = w_{i0}$, $v_1 = v_{i0}$ обладают свойством s и являются тупиковыми. Пусть

$$w_i = a_i w_{i0} a_i^{-1}, \quad v_i = b_i v_{i0} b_i^{-1}, \quad i = 2, \dots, m$$

где w_{i0} , v_{i0} обладают свойством s и являются тупиковыми. Если предположить, что эти множества сопряжены, то $|w_{i0}| = |v_{i0}|$ для всех $i = 1, \dots, m$, и если какое-то из w_{i0} есть образующий $x \in \{a_i\}$, то сопряженное ему слово v_{i0} — тоже образующий $y \in \{a_i\}$. Пусть $\Delta(w_{i0}, v_{i0})$ — кольцевая связная приведенная R -диаграмма сопряженности слов w_{i0} , v_{i0} ,

$$|a| = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_m|\}, \quad |b| = \max\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_m|\},$$

где $|a_1| = |b_1| = 0$, $L = 2(m_0 + 1)$.

Обозначим через $S(w_i, v_i)$, $i = 1, \dots, m$, множество всех слов, длина d_i которых заключена в пределах

$$|w_{i0}| \leq d_i \leq q((|w_i| + |v_i|)L + 2L)^2((|w_i| + |v_i|)L + 3L) + 2L + (|a| + |b|).$$

Для всех i , $i = 1, \dots, n$, положим $w_i = w_i^{(0)}$ и рассмотрим базисные последовательности, соответствующие множеству слов $w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}$,

$$w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_k, w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}, \quad (2)$$

где $w_i^{(j)} \in S(w_i, v_i)$ для всех $i, 1 \leq i \leq n$, и $j, 0 \leq j \leq k$.

Базисная последовательность (2) называется особой, если она не содержит фундаментальную последовательность либо является пустой, то есть все $H_i = 1$. Слово $H_1 H_2 \dots H_k$, соответствующее особой базисной последовательности, назовем особым базисным словом.

Если $w_1^{(k)} = v_1, \dots, w_n^{(k)} = v_n$ в базисной последовательности (2), то слова $w_1, \dots, w_n$ обобщенно сопряжены словам $v_1, \dots, v_n$.

Лемма 34. Если (2) является особой базисной последовательностью, то $k \leq |S| = |S(w_1, v_1)| \dots |S(w_n, v_n)|$.

Лемма 35. Число особых базисных последовательностей конечно.

Доказательство очевидно.

Лемма 36. Пусть F — какое-то решение системы $\mathfrak{A}_{i=1}^n(z^{-1}w_i z = v_i)$, тогда существует разбиение F в произведение кусков $H_1 H_2 \dots H_m$, $H_i \in \{a_i\}$, $i = 1, \dots, m$, и базисная последовательность, связанная с данным разбиением F

$$w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_m, w_1^{(m)}, \dots, w_n^{(m)}, \quad (3)$$

где $w_1^{(m)} = v_1, \dots, w_n^{(m)} = v_n$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 32.

Лемма 37. Пусть F — какое-то решение системы $\mathfrak{A}_{i=1}^n(z^{-1}w_i z = v_i)$ и (3) — базисная последовательность, соответствующая данному разбиению F . Тогда из последовательности (3) можно выделить особую подпоследовательность такую, что соответствующее ей базисное слово F является решением системы.

Доказательство. Если система $\mathfrak{A}_{i=1}^n(z^{-1}w_i z = v_i)$ такова, что $w_i \equiv v_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, то в качестве особой базисной подпоследовательности рассмотрим пустую подпоследовательность с $F \equiv 1$. Если последовательность (3) не содержит фундаментальных подпоследовательностей, то $F' = F$. Если (3) не является особой, то существуют целые числа $v, k, 0 \leq v < k < m$, такие, что $w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, \dots, H_v, w_1^{(v)}, \dots, w_n^{(v)}, H_{v+1}, \dots, H_k, w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}$ является фундаментальной последовательностью. Вычеркнув из (3) подпоследовательность $H_{v+1}, w_1^{(v+1)}, \dots, w_n^{(v+1)}, H_{v+2}, \dots, H_k, w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}$, получим базисную последовательность слов, являющуюся решением системы. Если полученная базисная последовательность не является особой, то применим к ней указанный выше процесс.

Из лемм 34–37 следует справедливость теоремы 7.

Теорема 8. Пусть G — конечно определенная группа Кокстера большого типа и $\{w_i\}_{i=1, \dots, m}, \{v_i\}_{i=1, \dots, m}$ — слова из G . Если F — какое-то решение системы $\mathfrak{A}_{i=1}^n(z^{-1}w_i z = v_i)$, то множество слов $C_G(H)F$, где $C_G(H)$ — централизатор подгруппы H , порожденной словами $\{w_i\}_{i=1, \dots, m}$, является множеством всех решений системы.

Теорема 9. Существует алгоритм, позволяющий для любого конечного множества слов из конечно определенной группы Кокстера G большого типа выписать образующие их нормализатора.

Доказательство очевидно.

Список литературы

1. Appel K., On Artin groups and Coxeter groups of large type. *Contemp. Math.* (1984) **33**, 50–78.
2. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., Решение проблемы сопряженности слов в группах Кокстера большого типа. *Чебышевский сборник* (2003) **4**, №1(5), 10–33.
3. Линдон Р., Шупп П., *Комбинаторная теория групп*. Наука, Москва, 1980.
4. Безверхний В. Н., Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина большого типа. В сб.: *Алгоритмические проблемы теорий групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов*. Тульский гос. пед. инст., Тула, 1986, с. 26–61.
5. Гриндлингер М. Д., О проблеме сопряженности и совпадений с антицентром в теории групп. *Сиб. матем. журнал*. (1996) **7**, 785–803.
6. Безверхний В. Н., О нормализаторах элементов в группах. В сб.: *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов*. Тульский гос. пед. инст., Тула, 1994.
7. Безверхний В. Н., Решение обобщенной проблемы сопряженности слов в $C(p)$ & $T(q)$ -группах. *Изв. Тульского гос. унив.* (1998) **4**, №3, 5–13.
8. Безверхний В. Н., Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа. *Фундаментальная и прикладная матем.* (1999) **5**, №1, 1–38.

Статья поступила 14.10.2003.