Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Голощапов, П. В. Ролдугин, Оценка числа переменных булевых функций небольшого веса, не содержащих имплицинт меньшей длины, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 1, 45–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 05:22:18

Оценка числа переменных булевых функций небольшого веса, не содержащих имплицинт меньшей длины

© 2013 г. В. Н. Голощапов, П. В. Ролдугин

В статье рассматривается величина $n_{\max}^{(k)}(m)$ — максимальное количество переменных булевых функций фиксированного веса m , не имеющих имплицинт от k неизвестных. Полученные результаты о строении множества выполняющих векторов таких функций позволили получить оценки и, в ряде случаев, точные значения величины $n_{\max}^{(k)}(m)$ для $m < 3 \cdot 2^{k-1}$, $k \geq 3$.

1. Введение

Будем использовать следующие обозначения и определения. Через V_n обозначим множество двоичных векторов длины n . Для булевой функции f от n переменных обозначим через E_f множество ее выполняющих векторов, то есть

$$E_f = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V_n : f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1\};$$

весом функции f назовем величину

$$\|f\| = |E_f|.$$

Имплицентай булевой функции f является не равная константе булева функция g , такая что $f \cdot g = f$, что эквивалентно условию $E_f \subseteq E_g$, см. [1]. Иногда (см. [3]) используют понятие аннулятора булевой функции f : аннулятором называется такая функция h , что $f \cdot h = 0$. Очевидно, что h — аннулятор функции f тогда и только тогда, когда $\bar{h} = h \oplus 1$ является имплицентай функции f . В задаче минимизации ДНФ часто встречается понятие импликанты булевой функции f (см. [4]): импликантой называется такая функция q , что $f \cdot q = q$. Также очевидно, что q — импликанта функции f тогда и только тогда, когда $\bar{q}$ является имплицентай функции $\bar{f}$.

Длиной имплиценты назовем число ее существенных переменных; длину функции, равной фиксированной константе (0 или 1) на любых аргументах, будем считать равной 0. Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ отлична от константы, то обязательно существует имплицента функции f длины n — сама функция f . Функцией, не имеющей имплицента, отличных от f , является булева функция

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_n}$$

для некоторого произвольного вектора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V_n$. Поскольку для такой функции $\|f\| = 2^n - 1$, условие $E_f \subseteq E_g$ может выполняться только для функций $g \equiv 1$ или $g = f$. Для функций, имеющих вес меньше, чем $2^n - 1$, обязательно существует имплицента, отличная от f . При этом число существенных переменных имплиценты может совпадать или быть меньше, чем n . Приведем пример функции, у которой есть имплиценты, не совпадающие с f , но нет имплицент с числом существенных переменных, меньшим n .

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n.$$

Предположим, что функция g от k переменных является имплицентой функции f , и $1 \leq k < n$. Без ограничения общности считаем, что g зависит от переменных $x_1, \dots, x_k$. По определению, $E_f \subset E_g$, то есть $f \cdot g = f$. Следовательно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n)g(x_1, \dots, x_k) &= (x_1 \oplus \dots \oplus x_n)g(x_1, \dots, x_k) \\ &= (x_1 \oplus \dots \oplus x_k)g(x_1, \dots, x_k) \\ &\quad \oplus (x_{k+1} \oplus \dots \oplus x_n)g(x_1, \dots, x_k) \\ &= f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$(x_1 \oplus \dots \oplus x_k)\bar{g}(x_1, \dots, x_k) = (x_{k+1} \oplus \dots \oplus x_n)\bar{g}(x_1, \dots, x_k). \quad (1)$$

По определению имплиценты, g отлична от константы, следовательно, существует вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, такой, что $g(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$. Выберем $(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) \in V_{n-k}$ следующим образом: $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{n-1}$ определим произвольно, и положим

$$\alpha_n = \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_k \oplus \alpha_{k+1} \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1} \oplus 1.$$

Подставляя вместо переменных $x_1, \dots, x_n$ значения $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, получаем из (1) равенство

$$\alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_k = \alpha_{k+1} \oplus \dots \oplus \alpha_n,$$

что противоречит выбору α_n . Следовательно, у функции f нет имплицент длины k .

Для фиксированных натуральных значений n и m обозначим через $F_{n,m}$ множество всех булевых функций от n переменных веса m . Ясно, что множество $F_{n,m}$ не пусто тогда и только тогда, когда $m \leq 2^n$. Далее для натуральных значений $m, n, k, n > k$, рассмотрим множество

$$N_{n,m,k} = \{f \in F_{n,m} : f \text{ не имеет имплицент длины } k\}.$$

Если при фиксированных значениях m и k существует хотя бы одно непустое множество $N_{n,m,k}$, то рассмотрим величину

$$n_{\max}^{(k)}(m) = \max\{n : N_{n,m,k} \neq \emptyset\}.$$

Другими словами, $n_{\max}^{(k)}(m)$ равно максимальному числу переменных у булевой функции веса m , не имеющей имплицент длины k . Отметим, что в случае, когда существует бесконечно много значений n , для которых множество $N_{n,m,k}$ непусто, при фиксированных

значениях m и k , возможно равенство $n_{\max}^{(k)}(m) = \infty$. Далее мы покажем, что $n_{\max}^{(k)}(m) = \infty$ только при $k = 1$ и $m \geq 2$. Если при всех значениях n множества $N_{n,m,k}$ пусты, тогда положим $n_{\max}^{(k)}(m) = 0$.

Рассмотрим ряд элементарных свойств функции $n_{\max}^{(k)}(m)$.

Лемма 1. Пусть m и k — натуральные числа. Тогда

- (1) $n_{\max}^{(1)}(1) = 0$;
- (2) если $m \geq 2$, то $n_{\max}^{(1)}(m) = \infty$;
- (3) $n_{\max}^{(k)}(m) \geq n_{\max}^{(k+1)}(m)$;
- (4) если $k \geq 2$, то $n_{\max}^{(k)}(m) \leq 2^m$;
- (5) если $k \geq 2$ и $1 \leq m < 2^k$, то $n_{\max}^{(k)}(m) = 0$;
- (6) если $k \geq 2$ и $m \geq 2^k$, то $n_{\max}^{(k)}(m) > \log_2 m$;
- (7) если $k \geq 2$ и $m \geq 2^k$, то $n_{\max}^{(k)}(m) \geq k + 1$;
- (8) если $k \geq 2$, то $n_{\max}^{(k)}(m + 1) \geq n_{\max}^{(k)}(m)$.

Доказательство. Пусть $n > 1$. Если булева функция f от n переменных имеет вес 1, то

$$E_f = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\},$$

поэтому

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Любая функция

$$g = x_i^{\alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

является имплицентай f длины 1, поэтому все множества $N_{n,1,1}$ пусты и

$$n_{\max}^{(1)}(1) = 0.$$

Пункт 1 доказан.

Пусть теперь $m \geq 2$. Для любого $n > 1$, такого что $m < 2^n$, рассмотрим любую такую функцию $f \in F_{n,m}$, что $\{(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)\} \subseteq E_f$. Поскольку $m \neq 2^n$, функция f не равна константе. Далее,

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n \vee \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \vee f'(x_1, \dots, x_n),$$

где f' — булева функция от переменных $x_1, \dots, x_n$, такая, что

$$E_{f'} = E_f \setminus \{(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)\}.$$

Покажем, что f не имеет имплицент длины 1. Действительно, для любого $i = 1, \dots, n$ и $\alpha \in \{0, 1\}$ верно, что

$$x_i^\alpha f = x_1^\alpha \cdots x_n^\alpha \vee f' \neq x_1 \cdots x_n \vee \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \vee f' = f;$$

поскольку $f'(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = 0$, левая часть на наборе $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ равна 0, а правая часть равна 1. Таким образом, для любого такого n , что $m < 2^n$, справедливо $N_{n,m,k} \neq \emptyset$ и, следовательно,

$$n_{\max}^{(1)}(m) = \infty.$$

Пункт 2 доказан.

Пусть $n > k + 1$. Предположим, что $N_{n,m,k} = \emptyset$. Тогда либо пусто множество $F_{n,m}$ и, следовательно, $N_{n,m,k+1} = \emptyset$; либо любая функция из $F_{n,m}$ имеет имплиценту длины k . Если g — имплицента длины k функции $f(x_1, \dots, x_n) \in F_{n,m}$, и x_i — несущественная переменная функции g , то функция $x_i \vee g$ также имплицента функции f , причем длины $k + 1$. Следовательно, любая функция из $F_{n,m}$ имеет имплиценту длины $k + 1$, поэтому $N_{n,m,k+1} = \emptyset$. Иными словами, при $n > k + 1$ из равенства $N_{n,m,k} = \emptyset$ следует тождество $N_{n,m,k+1} = \emptyset$, и это доказывает неравенство

$$n_{\max}^{(k)}(m) \geq n_{\max}^{(k+1)}(m).$$

Пункт 3 доказан.

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Докажем сначала, что $n_{\max}^{(2)}(m) \leq 2^m$. Покажем, что если $n > 2^m$, то у любой функции f от n переменных веса m найдется имплицента длины 2. Это будет означать, что при $n > 2^m$ все множества $N_{n,m,2}$ пусты и, следовательно, $n_{\max}^{(2)}(m) \leq 2^m$. Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ веса m . Пусть множество ее выполняющих векторов есть

$$E_f = \{(\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}): i = 1, \dots, m\}.$$

Рассмотрим для каждого $j = 1, \dots, n$ битовые векторы $(\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \dots, \alpha_j^{(m)})$. Это векторы длины m , и их n штук. Поскольку $n > 2^m$, среди указанных векторов найдутся два одинаковых вектора $(\alpha_u^{(1)}, \alpha_u^{(2)}, \dots, \alpha_u^{(m)}) = (\alpha_v^{(1)}, \alpha_v^{(2)}, \dots, \alpha_v^{(m)})$, $u, v = 1, \dots, n$, $u \neq v$. Это означает, что если $f(x_1, \dots, x_n) = 1$, то $x_u = x_v$. Тогда функция

$$g = x_u \vee \bar{x}_v$$

является имплицентой функции f . Действительно, если $f(x_1, \dots, x_n) = 1$, то $x_u = x_v$ и, следовательно,

$$g = x_u \vee \bar{x}_v = x_u \vee \bar{x}_u = 1.$$

Иными словами, $E_f \subseteq E_g$, поэтому

$$n_{\max}^{(2)}(m) \leq 2^m.$$

Осталось заметить, что по п. 3 при $k \geq 2$ выполняется соотношение

$$n_{\max}^{(k)}(m) \leq n_{\max}^{(2)}(m) \leq 2^m.$$

Пункт 4 доказан.

Рассмотрим $n > k$. Для тех n , при которых $m > 2^n$, верно, что $F_{n,m} = \emptyset$ и, поскольку $N_{n,m,k} \subset F_{n,m}$, верно, что $N_{n,m,k} = \emptyset$. Зафиксируем произвольное значение n , при котором $F_{n,m} \neq \emptyset$, то есть $m \leq 2^n$. Пусть $f \in F_{n,m}$. Рассмотрим множество k -мерных двоичных векторов $\{(\alpha_1, \dots, \alpha_k): \text{существуют такие } \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n, \text{ что } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1\}$. Так

как вес функции f равен m и по условию $m < 2^k$, то это множество не может содержать все векторы длины k ; обозначим отсутствующий вектор через $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_k)$. Далее, возьмем функцию

$$g(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha'_1} \dots x_k^{\alpha'_k} \oplus 1.$$

Длина функции g равна k . Если на некотором векторе $(x_1, \dots, x_n)$ выполнено равенство $f(x_1, \dots, x_n) = 1$, то $(x_1, \dots, x_k) \neq (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, и поэтому $g(x_1, \dots, x_n) = 1$. Иными словами, $E_f \subset E_g$, что означает, что g является имплицентовой длины k функции f . Таким образом, для каждой функции $f \in F_{n,m}$ существует имплицента длины k , то есть $N_{n,m,k} = \emptyset$. Значит, при всех значениях n $N_{n,m,k} = \emptyset$, и получаем, что

$$n_{\max}^{(k)}(m) = 0.$$

Пункт 5 доказан.

Если существует хотя бы одно значение n , $n > \log_2 m$, при котором $N_{n,m,k} \neq \emptyset$, то

$$n_{\max}^{(k)}(m) > \log_2 m.$$

Иными словами, достаточно привести хотя бы одну функцию $f \in F_{n,m}$, $n > \log_2 m$, не имеющую имплицент длины k . Возьмем

$$n_0 = [\log_2 m] + 1,$$

тогда $n_0 > \log_2 m$. Докажем неравенство

$$0 \leq m - 2^{n_0-1} < 2^{n_0-1}.$$

Действительно, $n_0 > \log_2 m$, следовательно, $m < 2^{n_0}$ или $m - 2^{n_0-1} < 2^{n_0-1}$. С другой стороны,

$$\log_2 m \geq [\log_2 m] = n_0 - 1,$$

поэтому $m \geq 2^{n_0-1}$ или $0 \leq m - 2^{n_0-1}$. Далее, рассмотрим функцию

$$f'(x_1, \dots, x_{n_0}) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_{n_0}.$$

Тогда

$$\|f'\| = |E_{f'}| = 2^{n_0-1}.$$

Добавим к множеству $E_{f'}$ еще $m - 2^{n_0-1}$ новых различных n_0 -мерных двоичных векторов, выбрав их произвольным образом; это возможно сделать именно ввиду неравенства $0 \leq m - 2^{n_0-1} < 2^{n_0-1}$. Полученное множество является множеством выполняющих векторов некоторой функции f , причем $f \in F_{n_0,m}$. Предположим, что функция g от k переменных является имплицентовой функции f . По определению, $E_f \subset E_g$; так как, по построению f , справедливо включение $E_{f'} \subset E_f$, верно, что $E_{f'} \subset E_g$, иными словами, g есть имплицента функции f' . Но, как показано в примере выше, функция f' не имеет имплицент от числа переменных, меньшего n_0 . По условию, $m \geq 2^k$, из этого следует, что $k \leq \log_2 m < n_0$, и получаем, что у функции f нет имплицент длины k . Таким образом, $N_{n_0,m,k} \neq \emptyset$ и $n_0 > \log_2 m$, то есть

$$n_{\max}^{(k)}(m) > \log_2 m.$$

Пункт 6 доказан.

Согласно п. 6,

$$n_{\max}^{(k)}(m) > \log_2 m,$$

а так как, по условию, $m \geq 2^k$, верно, что

$$n_{\max}^{(k)}(m) > \log_2 m \geq \log_2 2^k = k.$$

Следовательно,

$$n_{\max}^{(k)}(m) > k.$$

Пункт 7 доказан.

По п. 5,

$$n_{\max}^{(k)}(2) = n_{\max}^{(k)}(3) = \dots = n_{\max}^{(k)}(2^k - 1) = 0.$$

Пусть $m \geq 2^k$. Обозначим

$$n_0 = n_{\max}^{(k)}(m).$$

Из п. 4 и 6 следует, что $0 < n_0 < \infty$. Это означает, что существует функция $f \in F_{n_0, m}$, которая не имеет имплицент длины k . Из п. 6 также следует, что $n_0 > \log_2 m$, то есть $m < 2^{n_0}$, поэтому множество E_f не содержит всех векторов длины n_0 . Добавим в E_f любой новый вектор и рассмотрим полученное множество как множество выполняющих векторов некоторой функции f' . Тогда $f' \in F_{n_0, m+1}$ и $E_f \subset E_{f'}$. Если у функции f' существует имплицента g от k переменных, то, по определению, $E_{f'} \subset E_g$. Так как, по построению f' , справедливо включение $E_f \subset E_{f'}$, верно, что $E_f \subset E_g$, то есть g — имплицента функции f , что приводит к противоречию. Следовательно, у функции f' также нет имплицент от k переменных, то есть $N_{n_0, m+1, k} \neq \emptyset$, что дает неравенство

$$n_{\max}^{(k)}(m+1) \geq n_0 = n_{\max}^{(k)}(m).$$

Пункт 8 доказан.

Из п. 3 и 8 доказанной леммы следует, что функция $n_{\max}^{(k)}(m)$ является возрастающей по m и убывающей по k . Далее, в частности, получен вывод о том, что функция $n_{\max}^{(k)}(m)$ не является строго возрастающей по m .

Из определения функции $n_{\max}^{(k)}(m)$ легко получить следующее свойство.

Лемма 2. Если $f \in F_{n, m}$ и $n > n_{\max}^{(k)}(m)$, то у функции f существует имплицента от k переменных.

Это свойство позволит сформулировать некоторые из выводов леммы 1 следующим образом. Имплиценты длины 1 существуют у всех функций веса 1; для любого значения веса, большего 1, найдется функция без имплицент длины 1. Функция веса, меньшего 2^k , $k \geq 2$, всегда имеет имплиценту длины k . Функция веса m , зависящая более чем от 2^m переменных, всегда имеет имплиценты от любого числа переменных, больше либо равного двум.

В [2] в несколько другой терминологии найдено точное значение функции $n_{\max}^{(2)}(m)$.

Как видно из п. 4 леммы 1, существует верхняя оценка величины $n_{\max}^{(k)}(m)$. В настоящей работе для значений m , удовлетворяющих неравенству $m < 3 \cdot 2^{k-1}$, получены другие, более точные оценки, и, в ряде случаев, точные значения функции $n_{\max}^{(k)}(m)$.

2. Представление в виде комбинаторно полных матриц

Существует представление булевых функций, не имеющих имплицинт длины k или меньше, в виде специальных матриц. Приведем описание модели с доказательством некоторых свойств.

Двоичная матрица B размера $m \times n$, $n \geq k$, называется комбинаторно полной порядка k , если в любой ее подматрице размера $m \times k$ для любого булевого вектора $\vec{v} \in V_k$ найдется строка, равная $\vec{v}$. Иначе говоря, при выборе любых k столбцов в матрице B полученная подматрица должна содержать каждую из 2^k возможных строк (но необязательно только по одному разу). Обозначим через $n_{\max}^{(k)}(m)$ максимальное число столбцов, при котором существует комбинаторно полная порядка k матрица размера $m \times n_{\max}^{(k)}(m)$. Максимальной комбинаторно полной матрицей порядка k будем называть комбинаторно полную матрицу порядка k размера $m \times n_{\max}^{(k)}(m)$.

Приведем некоторые очевидные свойства комбинаторно полных матриц.

Лемма 3. Пусть B — комбинаторно полная порядка k матрица размера $m \times n$, $n \geq k$. Тогда справедливы следующие свойства:

- $m \geq 2^k$;
- если $k > 1$, то B является комбинаторно полной порядка k' для любого $1 \leq k' < k$;
- любая подматрица B , содержащая m строк и не менее k столбцов, является комбинаторно полной порядка k ;
- если матрица B' получена из матрицы B инвертированием любого столбца (то есть инвертированием всех его элементов), то B' является комбинаторно полной порядка k ;
- если матрица B' получена из матрицы B некоторой перестановкой ее столбцов, то B' является комбинаторно полной порядка k ;
- если матрица B' получена из матрицы B некоторой перестановкой ее строк, то B' является комбинаторно полной порядка k ;
- если матрица B' получена из матрицы B добавлением любого числа произвольных строк, то B' является комбинаторно полной порядка k .

Пусть f — булева функция от n переменных веса m . Обозначим через $\tilde{E}_f$ матрицу, строки которой являются выполняющими векторами f , то есть

$$\tilde{E}_f = \begin{pmatrix} (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}) \\ \vdots \\ (\alpha_1^{(m)}, \dots, \alpha_n^{(m)}) \end{pmatrix},$$

где $(\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}) \in E_f$, $i = 1, \dots, m$. Отметим, что число строк матрицы $\tilde{E}_f$ равно $\|f\| = m$, а число столбцов равно количеству переменных функции f , то есть n .

Далее покажем связь между комбинаторно полными матрицами порядка k и функциями, не имеющими имплицинт длины k .

Предложение 1. Булева функция f , отличная от константы, имеет имплиценту длины k тогда и только тогда, когда матрица $\tilde{E}_f$ не является комбинаторно полной порядка k .

Доказательство. Напомним (см. [1]), что имплицента называется элементарной, если существует ее запись в виде элементарной дизъюнкции. Сначала отметим, что отсутствие у булевой функции имплицент длины k приводит к отсутствию у нее элементарных имплицент длины k . Пусть g — имплицента функции $f(x_1, \dots, x_n)$, и g имеет k существенных переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$. Воспользовавшись заменой переменных $x_{i_j} = y_j$, $j = 1, \dots, k$, приходим к функции от k переменных $g(y_1, \dots, y_k)$. Представим функцию g в виде совершенной КНФ:

$$g = \prod_{(a_1, \dots, a_k) \in V_n \setminus E_g} (y_1^{a_1 \oplus 1} \vee \dots \vee y_k^{a_k \oplus 1}).$$

Рассмотрим любую из элементарных дизъюнкции K этой совершенной КНФ; очевидно, она имеет k существенных переменных. Далее, при любых значениях неизвестных

$$fK = (fg)K = f(gK) = fg = f,$$

то есть K является имплицентой функции f .

Рассмотрим элементарную дизъюнкцию длины k :

$$g = x_{i_1}^{a_1} \vee \dots \vee x_{i_k}^{a_k}.$$

Эта дизъюнкция является имплицентой функции f тогда и только тогда, когда

$$fg = f(x_{i_1}^{a_1} \vee \dots \vee x_{i_k}^{a_k}) = f.$$

Последнее равенство эквивалентно тому, что на всех векторах $(x_1, \dots, x_n)$, таких, что $x_{i_1} = a_1 \oplus 1$, $x_{i_2} = a_2 \oplus 1$, $\dots$, $x_{i_k} = a_k \oplus 1$ выполняется равенство $f(x_1, \dots, x_n) = 0$; иначе говоря, среди выполняющих векторов функции f нет таких, в которых на местах $i_1, \dots, i_k$ стояли бы значения $(a_1 \oplus 1, \dots, a_k \oplus 1)$ соответственно. По определению, это происходит тогда и только тогда, когда в столбцах $i_1, \dots, i_k$ матрицы $\tilde{E}_f$ не содержится строка $(a_1 \oplus 1, \dots, a_k \oplus 1)$, то есть матрица $\tilde{E}_f$ не является комбинаторно полной.

Заметим, что любая двоичная матрица B размера $m \times n$, $m \leq 2^n$, не содержащая одинаковых строк, задает булеву функцию f от n переменных веса m следующим образом:

$$\tilde{E}_f = B.$$

Следствие 1. При любых натуральных m, k , $k > 1$, $m \geq 2^k$, величина $n_{\max}^{(k)}(m)$ равна наибольшему из возможных количеству столбцов комбинаторно полной матрицы порядка k , содержащей m строк.

Доказательство. Рассмотрим класс комбинаторно полных матриц порядка k , содержащих m различных строк, записанных в лексикографическом порядке, и не менее $k + 1$ столбцов. Обозначим этот класс через $\alpha_{m,k}$. По предложению 1, любая булева функция f однозначно задает некоторую комбинаторно полную матрицу из этого класса следующим образом: $\tilde{E}_f = B$. Кроме того, любая матрица из $\alpha_{m,k}$, очевидно, задает некоторую булеву функцию f , не имеющую имплицент длины k . Следовательно, определено взаимно однозначное соответствие между функциями из объединения $\bigcup_{n \geq k+1} N_{n,m,k}$ и матрицами из $\alpha_{m,k}$. Иными словами, величина $n_{\max}^{(k)}(m)$ равна наибольшему из возможных количеству столбцов матрицы из класса $\alpha_{m,k}$. Обозначим это наибольшее значение количества столбцов через $\tilde{n}_{\max}^{(k)}(m)$, тогда

$$n_{\max}^{(k)}(m) = \tilde{n}_{\max}^{(k)}(m)$$

для любых m, k , удовлетворяющих условиям следствия.

Теперь рассмотрим класс всех комбинаторно полных матриц порядка k , содержащих m строк. Обозначим его через $A_{m,k}$. Очевидно, $\alpha_{m,k} \subset A_{m,k}$. Покажем, что в $A_{m,k}$ нет матриц, у которых число столбцов больше $\tilde{n}_{\max}^{(k)}(m)$. Предположим противное: пусть существует такая матрица $B_{m \times n} \in A_{m,n} \setminus \alpha_{m,n}$, что $n > \tilde{n}_{\max}^{(k)}(m)$. Так как $B \notin \alpha_{m,n}$, не выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- B содержит не более k столбцов, $n \leq k$;
- строки B не расположены в лексикографическом порядке;
- некоторые строки B одинаковы.

Пусть $n \leq k$. Так как

$$n_{\max}^{(k)}(m) \geq k + 1$$

по п. 7 леммы 1, верно, что

$$\tilde{n}_{\max}^{(k)}(m) \geq k + 1,$$

поэтому

$$\tilde{n}_{\max}^{(k)}(m) > n,$$

что невозможно.

Пусть строки B не расположены в лексикографическом порядке. Тогда перестановкой строк добьемся выполнения этого условия и получим матрицу B' размера $m \times n$, которая по лемме 3 является комбинаторно полной порядка k .

Далее, если некоторые строки B' одинаковы, то рассмотрим матрицу B'' размера $m_0 \times n$, в которой все повторяющиеся строки B' взяты только по одному разу, $m_0 \leq m$. Из определения комбинаторно полных матриц нетрудно видеть, что B'' также является комбинаторно полной порядка k , и $m_0 \geq 2^k$ по лемме 3. Следовательно, $B'' \in \alpha_{m_0,k}$, поэтому

$$n \leq \tilde{n}_{\max}^{(k)}(m_0).$$

Кроме того, по доказанному выше

$$\tilde{n}_{\max}^{(k)}(m_0) = n_{\max}^{(k)}(m_0),$$

а по п. 8 леммы 1

$$n_{\max}^{(k)}(m_0) \leq n_{\max}^{(k)}(m),$$

поэтому

$$n \leq n_{\max}^{(k)}(m),$$

что невозможно.

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{}^k & \overbrace{}^{n-k} \\ \hline L_k & \\ \hline S & \end{array} \right)_{m \times n}$$

Рис. 1. Приведенная комбинаторно полная матрица порядка k

3. Приведенная форма комбинаторно полной матрицы и связанный с ней граф

Введем следующие определения. Будем обозначать через L_k матрицу, составленную из всех строк V_k в лексикографическом порядке, то есть

$$L_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведенной комбинаторно полной матрицей порядка k или комбинаторно полной матрицей порядка k в приведенной форме будем называть комбинаторно полную матрицу вида, представленного на рис. 1.

Заметим, что, пользуясь леммой 3, любую комбинаторно полную порядка k матрицу можно привести к приведенному виду перестановкой строк. При этом приведенная форма для каждой матрицы определена неоднозначно. Далее будем считать, что $n \geq k + 1$. Определим граф $G(B)$ следующим образом: $G(B)$ — подграф k -мерного булева куба B_k , вершинами $G(B)$ являются строки, содержащиеся в L_k , но не содержащиеся в S . Очевидно, что если $m = 2^k + s$, $s < 2^k$, то множество вершин $G(B)$ непусто. Пусть W — компонента связности графа $G(B)$, вершинами которой являются строки $\vec{l}_{i_1}, \vec{l}_{i_2}, \dots, \vec{l}_{i_t}$ матрицы L_k , $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq 2^k$. Для W определим матрицу $M(W)$, которая является подматрицей B и состоит из строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_t$ и столбцов с номерами $k + 1, k + 2, \dots, n$. Покажем, что матрица $M(W)$ будет иметь специальный вид.

Предложение 2. Пусть $m = 2^k + s$, $s < 2^k$ и W — компонента связности графа $G(B)$, не являющаяся изолированной вершиной. Тогда матрица $M(W)$ содержит столбцы не более чем двух видов: $\beta^\downarrow$ или $\bar{\beta}^\downarrow$.

Доказательство. Положим $B' = (B_1^\downarrow, \dots, B_k^\downarrow)$. Обозначим через $L(W)$ подматрицу L_k , составленную из строк — вершин W . Очевидно, все строки $L(W)$ различны. По условию, W не является изолированной вершиной, поэтому в W есть хотя бы одно ребро, причем смежные вершины в W представляют собой строки, отличающиеся в одной и только в одной координате (по построению $G(B)$). Рассмотрим пару таких строк, отличающихся в координате с номером $x \in \{1, \dots, k\}$:

$$\vec{l}(W)_{i_1} = (\beta_1, \dots, \beta_{x-1}, \alpha, \beta_{x+1}, \dots, \beta_k),$$

$$\vec{l}(W)_{i_2} = (\beta_1, \dots, \beta_{x-1}, \bar{\alpha}, \beta_{x+1}, \dots, \beta_k), \quad \alpha, \beta_q \in \{0; 1\}, \quad q \in \{1, \dots, k\} \setminus x.$$

Далее, рассмотрим матрицу $B'' = (B_1^\downarrow, \dots, B_{x-1}^\downarrow, B_{x+1}^\downarrow, \dots, B_k^\downarrow)$; она содержит строку вида $(\beta_1, \dots, \beta_{x-1}, \beta_{x+1}, \dots, \beta_k)$ по крайней мере дважды: они очевидным образом получаются из строк $\vec{L}(W)_{i_1}$ и $\vec{L}(W)_{i_2}$ удалением координаты с номером x . Пусть это $\vec{B}_{j_1}''$ и $\vec{B}_{j_2}''$. Покажем, что B'' содержит указанную строку не более чем дважды. Действительно, пусть существует $\vec{B}_{j_3}'' = (\beta_1, \dots, \beta_{x-1}, \beta_{x+1}, \dots, \beta_k)$. Тогда в матрице B' строка с номером j_3 имеет вид $\vec{B}_{j_3}' = (\beta_1, \dots, \beta_{x-1}, \gamma, \beta_{x+1}, \dots, \beta_k)$, где $\gamma \in \{0, 1\}$. Но тогда $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \bar{\alpha}$, поэтому $\vec{B}_{j_3}' = \vec{L}(W)_{i_1}$ или $\vec{B}_{j_3}' = \vec{L}(W)_{i_2}$. Следовательно, $\vec{B}_{j_3}'$ не может принадлежать матрице L_k , поскольку все ее строки различны. Кроме того, $\vec{B}_{j_3}'$ не лежит в S , поскольку в этом случае $\vec{L}(W)_{i_1}$ или $\vec{L}(W)_{i_2}$ не лежали бы в $L(W)$ по построению $G(B)$. Но тогда $\vec{B}_{j_3}'$ не принадлежит B' , что невозможно. Таким образом, матрица B'' содержит строку вида $(\beta_1, \dots, \beta_{x-1}, \beta_{x+1}, \dots, \beta_k)$ ровно дважды.

Так как матрица B комбинаторно полна, то ее подматрица, составленная из столбцов $(B_1^\downarrow, \dots, B_{x-1}^\downarrow, B_{x+1}^\downarrow, \dots, B_k^\downarrow, B_{k+1}^\downarrow)$, содержит обе строки $(\beta_1, \dots, \beta_{x-1}, \beta_{x+1}, \dots, \beta_k, 0)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_{x-1}, \beta_{x+1}, \dots, \beta_k, 1)$. По доказанному выше, у данной подматрицы существуют только две строки вида $(\beta_1, \dots, \beta_{x-1}, \beta_{x+1}, \dots, \beta_k, *)$ — это строки с номерами j_1 и j_2 . Следовательно, $b_{j_1, k+1} = \bar{b}_{j_2, k+1}$. Итак, если строки $\vec{B}_{j_1}'$ и $\vec{B}_{j_2}'$ принадлежат матрице $L(W)$ и отличаются в одной и только в одной координате, то $b_{j_1, k+1} = \bar{b}_{j_2, k+1}$.

Поскольку W — компонента связности, то для любых двух строк $\vec{L}(W)_{i_1}, \vec{L}(W)_{i_2} \in L(W)$ существует такая последовательность строк $\vec{L}(W)_{j_1}, \dots, \vec{L}(W)_{j_p}$, что $j_1 = i_1$, $j_p = i_2$, и для любого $r \in \{1, \dots, p-1\}$ строки $\vec{L}(W)_{j_r}$ и $\vec{L}(W)_{j_{r+1}}$ отличаются в одной и только в одной координате. Пусть $L(W)$ состоит из строк $\vec{B}_{j_1}', \dots, \vec{B}_{j_t}'$. Тогда можно определить весь набор $(b_{j_1, k+1}, \dots, b_{j_t, k+1})$ однозначно с точностью до выбора $b_{j_1, k+1}$. Следовательно, набор $(b_{j_1, k+1}, \dots, b_{j_t, k+1})$ может быть только двух видов. Докажем, что эти два вида будут отличаться инвертированием всего набора.

Выше было показано, что если $\vec{B}_{j_1}'$ и $\vec{B}_{j_2}'$ принадлежат матрице $L(W)$ и отличаются в одной и только в одной координате, то $b_{j_1, k+1} = \bar{b}_{j_2, k+1}$. Векторы $\vec{B}_{j_1}'$ и $\vec{B}_{j_2}'$, очевидно, имеют разную четность. Поэтому в наборе $(b_{j_1, k+1}, \dots, b_{j_t, k+1})$ одинаковые элементы соответствуют строкам $L(W)$ одинаковой четности. Следовательно, возможны только два случая. В первом случае в наборе $(b_{j_1, k+1}, \dots, b_{j_t, k+1})$ на местах, соответствующих четным строкам $L(W)$, стоят единицы, а на местах, соответствующих нечетным строкам $L(W)$, стоят нули. Во втором случае в наборе $(b_{j_1, k+1}, \dots, b_{j_t, k+1})$ на местах, соответствующих четным строкам $L(W)$, стоят нули, а на местах, соответствующих нечетным строкам $L(W)$, стоят единицы. Очевидно, второй случай отличается от первого инвертированием всего набора $(b_{j_1, k+1}, \dots, b_{j_t, k+1})$. Аналогичные рассуждения можно провести для любого столбца из $(B_{k+1}^\downarrow, \dots, B_n^\downarrow)$. Осталось заметить, что матрица $M(W)$ представляет собой подматрицу B , составленную из строк с номерами $j_1, \dots, j_t$ и столбцов с номерами $k+1, \dots, n$.

Предложение 3. В условиях предложения 2 матрица $M(W)$ имеет строки только двух видов: $\vec{\gamma}$ или $\vec{\bar{\gamma}}$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $C = (C_1^\downarrow, \dots, C_{n-k}^\downarrow)$, имеющую столбцы только

двух видов: $\beta^\downarrow = (b_1, \dots, b_{n-k})^T$ или $\bar{\beta}^\downarrow = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-k})^T$. Положим

$$(\bar{\beta})^x = \begin{cases} (b_1, \dots, b_k), & x = 1, \\ (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k), & x = 0; \end{cases}$$

$$(\beta^\downarrow)^x = ((\bar{\beta})^x)^T.$$

Тогда

$$C = ((\beta^\downarrow)^{x_1}, \dots, (\beta^\downarrow)^{x_{n-k}}), \quad x_j \in \{0; 1\}, \quad j = 1, \dots, n-k.$$

Любая строка матрицы C выглядит следующим образом:

$$\vec{C}_i = (b_i^{x_1}, b_i^{x_2}, \dots, b_i^{x_{n-k}}) = (x_1^{b_i}, x_2^{b_i}, \dots, x_{n-k}^{b_i}) = (\vec{x})^{b_i}.$$

Следовательно, строки матрицы C могут быть только двух видов: $\vec{x}$ или $\vec{\bar{x}}$.

Далее, воспользуемся предложением 3, чтобы сформулировать и доказать теорему, описывающую свойства графа $G(B)$.

Теорема 1. Пусть B_0 — комбинаторно полная порядка k матрица размера $m \times n$, где $m = 2^k + s$, $s < 2^k$, $n \geq k + 1$; и пусть B — приведенная форма матрицы B_0 . Если граф $G(B)$ содержит t_1 изолированных вершин и t_2 компонент связности порядка не менее 2, то:

$$2s \geq 2^k - t_1 - 2t_2 \quad \text{если } n \geq 2k, \quad (a)$$

$$2s \geq 2^k - t_1 - 2^{2k-n+1}t_2 \quad \text{если } n < 2k. \quad (b)$$

Доказательство. Пусть W_i , $i = 1, \dots, t_1 + t_2$, — все компоненты связности графа $G(B)$. Каждая компонента связности — подматрица L_k , причем подматрицы W_i , $i = 1, \dots, t_1$, содержат одну строку, остальные содержат не менее двух строк. Тогда матрицы $M(W_i)$, $i = 1, \dots, t_1$, содержат по одной строке, и по предложению 3 каждая матрица $M(W_i)$, $i = t_1 + 1, \dots, t_1 + t_2$, содержит не более двух различных строк. Следовательно, всего в матрицах $M(W_i)$, $i = 1, \dots, t_1 + t_2$, содержится не более $t_1 + 2t_2$ различных строк. Если матрица S (см. рис. 1) содержит s' различных строк, то граф $G(B)$ состоит из $2^k - s'$ вершин, поэтому всего в матрицах $M(W_i)$, $i = 1, \dots, t_1 + t_2$, содержится $2^k - s'$ строк.

Если $n \geq 2k$, то положим $B' = (B_{k+1}^\downarrow, B_{k+2}^\downarrow, \dots, B_{2k}^\downarrow)$ и обозначим через $m(W_i)$ подматрицу B' , составленную из всех общих элементов B' и $M(W_i)$, $i = 1, \dots, t_1 + t_2$. Из сказанного выше следует, что матрицы $m(W_i)$, $i = 1, \dots, t_1 + t_2$, содержат в общем счете $2^k - s'$ строк, из которых не более $t_1 + 2t_2$ различных. Для комбинаторной полноты матрицы B необходимо наличие 2^k различных строк в B' . При этом B' содержит только $s' + s$ строк, не принадлежащих матрицам $m(W_i)$, $i = 1, \dots, t_1 + t_2$. Следовательно, $s' + s \geq 2^k - (t_1 + 2t_2)$. Осталось заметить, что $s \geq s'$, поэтому $2s \geq 2^k - t_1 - 2t_2$.

Если $n < 2k$, то положим $B' = (B_{k+1}^\downarrow, B_{k+2}^\downarrow, \dots, B_n^\downarrow)$ и аналогично определим матрицы $m(W_i)$, $i = 1, \dots, t_1 + t_2$. Пусть $B'' = (B_{n-k+1}^\downarrow, \dots, B_k^\downarrow, B_{k+1}^\downarrow, \dots, B_n^\downarrow)$, обозначим ее строки $\vec{\beta}^{(i)} = (\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_{2k-n}^{(i)}, \beta_{2k-n+1}^{(i)}, \dots, \beta_k^{(i)})$, $i = 1, \dots, 2^k + s$. Как и в случае $n \geq 2k$, матрицы $m(W_i)$, $i = 1, \dots, t_1 + t_2$, содержат не более $t_1 + 2t_2$ различных строк. Поэтому строк $\vec{\beta}^{(i)}$, для которых $(\beta_{2k-n+1}^{(i)}, \dots, \beta_k^{(i)})$ принадлежит некоторой матрице $m(W_i)$, $i = 1, \dots, t_1 + t_2$, может быть не более чем $t_1 + 2^{2k-n} \cdot 2t_2$ вариантов. Остальных строк $\vec{\beta}^{(i)}$ в B' содержится $s' + s$, поэтому для комбинаторной полноты матрицы B необходимо выполнение условия $s' + s \geq 2^k - (t_1 + 2^{2k-n} \cdot 2t_2)$, поэтому $2s \geq 2^k - t_1 - 2^{2k-n+1}t_2$.

4. Оценки величины $n_{\max}^{(k)}(m)$ при небольших значениях m

Начнем с минимального значения $m = 2^k$.

Предложение 4. Для любого натурального $k > 1$ справедливо равенство

$$n_{\max}^{(k)}(2^k) = k + 1.$$

Доказательство. Пусть

$$n_{\max}^{(k)}(2^k) \geq k + 2.$$

Тогда существует комбинаторно полная порядка k матрица, содержащая 2^k строк и $k + 2$ столбцов. Перестановкой строк приведем матрицу B к каноническому виду. Очевидно, граф $G(B)$ совпадает с B_k и имеет единственную компоненту связности, содержащую все строки из V_k . Поэтому определенная выше матрица $M(B_k)$ будет иметь вид $M(B_k) = (B_{k+1}^\downarrow, B_{k+2}^\downarrow)$. По предложению 3, матрица $M(B_k)$ содержит строки только двух видов. Так как матрица B является комбинаторно полной порядка $k \geq 2$, то по лемме 3 она должна быть комбинаторно полной порядка 2. Однако подматрица $(B_{k+1}^\downarrow, B_{k+2}^\downarrow)$ содержит строки только двух видов, поэтому B не является комбинаторно полной порядка 2, приходим к противоречию. Следовательно,

$$n_{\max}^{(k)}(2^k) \leq k + 1.$$

Но по п. 7 леммы 1 верно обратное неравенство

$$n_{\max}^{(k)}(2^k) \geq k + 1,$$

таким образом, верно равенство

$$n_{\max}^{(k)}(2^k) = k + 1.$$

Теорема 1 позволяет получить ограничения на величину $n_{\max}^{(k)}(m)$ для небольших значений m .

Предложение 5. Пусть $k \geq 3$, $m = 2^k + s$, $s < k$. Тогда справедлива оценка

$$n_{\max}^{(k)}(m) \leq 2k - \log_2(2^{k-1} - (k - 1)).$$

Доказательство. Пусть матрица B размера $m \times n$ является комбинаторно полной порядка k в приведенной форме. Булев куб B_k является k -связным графом. Так как по условию $s < k$, то граф $G(B)$ получен из B_k удалением не более чем $k - 1$ вершин. Следовательно, $G(B)$ содержит только одну компоненту связности W и не содержит изолированных вершин. По теореме 1, если $n \geq 2k$, то $2s \geq 2^k - 2$, а так как $s < k$, верно, что $k > 2^{k-1} - 1$. При $k \geq 3$ последнее неравенство не выполняется, поэтому $n < 2k$. Следовательно, по теореме 1

$$2s \geq 2^k - 2^{2k-n+1},$$

поэтому

$$(k - 1) \geq 2^{k-1} - 2^{2k-n}, \quad n \leq 2k - \log_2(2^{k-1} - (k - 1)).$$

При $k \geq 4$ можно уточнить оценку, полученную в предложении 5. Случай $k = 3$ рассмотрим отдельно в следующем примере.

Пример 2. Пусть $k = 3$, $m = 2^k + s$, $s < k$. Воспользовавшись результатом предложения 5, получаем оценку

$$n_{\max}^{(3)}(10) \leq 5.$$

Существует матрица, для которой достигается эта оценка. Действительно, рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{5 \times 10}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрица B^T является комбинаторно полной порядка 3. Таким образом,

$$n_{\max}^{(3)}(10) = 5.$$

Известно также, что

$$n_{\max}^{(3)}(8) = 4$$

(по предложению 4). Поскольку функция $n_{\max}^{(k)}(m)$ не убывает по m , то $n_{\max}^{(3)}(9) \in \{4; 5\}$. Предположим, что $n_{\max}^{(3)}(9) = 5$. При $m = 9$ граф $G(B)$ содержит одну компоненту связности порядка $2^k - 1$ и не имеет изолированных вершин. Следовательно, по теореме 1(b) имеем $2 \geq 8 - 4$, что невозможно. Следовательно,

$$n_{\max}^{(3)}(9) = 4.$$

Далее, рассмотрим случай комбинаторно полных матриц порядка $k \geq 4$.

Теорема 2. Пусть $k \geq 4$, $m = 2^k + s$, $s < k$. Тогда справедливо тождество:

$$n_{\max}^{(k)}(m) = k + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x - 1 - \log_2 x.$$

Исследуем ее на монотонность:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x \ln 2}.$$

При $x \geq 2$ $f'(x) > 0$, поэтому $f(x)$ строго возрастает на промежутке $[2; +\infty)$. Так как $f(2) = 0$, при $x \geq 3$ $f(x) > 0$, то есть $x - 1 - \log_2 x > 0$. Следовательно, $2^{x-1} > x$. Поскольку $k \geq 4$, в последнем неравенстве произведем замену $x = k - 1$ и получим $2^{k-2} > k - 1$, что эквивалентно неравенству $(2^{k-1} - 2^{k-2}) > k - 1$. Тогда

$$\log_2(2^{k-1} - (k - 1)) > k - 2.$$

А так как по предложению 5

$$n_{\max}^{(k)}(m) \leq 2k - \log_2(2^{k-1} - (k-1)),$$

верно неравенство $n_{\max}^{(k)}(m) < k + 2$, поэтому $n_{\max}^{(k)}(m) \leq k + 1$. По п. 7 леммы 1, верно неравенство $n_{\max}^{(k)}(m) \geq k + 1$ и в итоге получаем, что

$$n_{\max}^{(k)}(m) = k + 1.$$

Следствие 2. При $k \geq 3$ функция $n_{\max}^{(k)}(m)$ не является строго возрастающей.

Доказательство. При $k = 3$, согласно примеру 2,

$$n_{\max}^{(3)}(9) = 4.$$

С другой стороны, по предложению 4,

$$n_{\max}^{(3)}(8) = 4,$$

поэтому при $k = 3$ функция $n_{\max}^{(k)}(m)$ возрастает нестрого. Отметим, что это не единственное исключение — пусть $k \geq 4$, тогда по теореме 2

$$n_{\max}^{(k)}(2^k + k - 1) = n_{\max}^{(k)}(2^k + k - 2) = \dots = n_{\max}^{(k)}(2^k) = k + 1.$$

Предложение 3 можно использовать для получения оценки числа столбцов комбинаторно полной матрицы B , для которой граф $G(B)$ содержит достаточно большую компоненту связности, не являющуюся изолированной вершиной или ребром. Чем больше порядок компоненты связности, тем лучшую оценку числа столбцов можно получить, используя следующее утверждение.

Предложение 6. Пусть B_0 — комбинаторно полная порядка k матрица размера $m \times n$, где $m = 2^k + s$, $s < 2^k$, $n \geq 2k$; и пусть B — приведенная форма матрицы B_0 . Если граф $G(B)$ содержит компоненту связности порядка $l \geq 3$, то справедлива оценка

$$n \leq n_{\max}^{(k)}(m - [(l+1)/2] + 1) + \min\{k; l-1\}.$$

Доказательство. Пусть W — компонента связности графа $G(B)$ порядка l . Тогда по предложению 3 матрица $M(W)$ содержит строки только двух видов, поэтому в $M(W)$ существует, по крайней мере, $[(l+1)/2]$ одинаковых строк. Если $l \geq k$, то рассмотрим матрицу $B' = (B_{k+1}^\downarrow, B_{k+2}^\downarrow, \dots, B_{2k}^\downarrow)$, которая содержит $M(W)$ как подматрицу, и поэтому также имеет, по крайней мере, $[(l+1)/2]$ одинаковых строк. Покажем, что B' содержит не более $n_{\max}^{(k)}(m - [(l+1)/2] + 1)$ столбцов. Действительно, предположим, что B' содержит хотя бы $n_{\max}^{(k)}(m - [(l+1)/2] + 1) + 1$ столбцов. Тогда рассмотрим B'' — подматрицу B' , в которой из $[(l+1)/2]$ одинаковых строк матрицы B' взята только одна, то есть B'' имеет размер $(m - [(l+1)/2] + 1) \times (n_{\max}^{(k)}(m - [(l+1)/2] + 1) + 1)$. Матрица B' является комбинаторно полной порядка k , поэтому B'' также является комбинаторно полной порядка k , поскольку в ней не изменилось число различных строк. Тогда существует комбинаторно полная порядка k матрица размером $(m - [(l+1)/2] + 1) \times (n_{\max}^{(k)}(m - [(l+1)/2] + 1) + 1)$, что противоречит определению $n_{\max}^{(k)}(m)$. Итак, B' содержит не более чем $n_{\max}^{(k)}(m - [(l+1)/2] + 1)$ столбцов, поэтому B содержит не более $n_{\max}^{(k)}(m - [(l+1)/2] + 1) + k$ столбцов.

Пусть теперь $l < k$. Тогда в W не существует строк, отличающихся более чем в $l - 1$ координатах, поэтому все строки W содержат $k - l + 1$ координат, значение которых постоянно. Пусть это координаты с номерами $i_1, i_2, \dots, i_{k-l+1}$. Тогда положим $B' = (B_{i_1}^\downarrow, B_{i_2}^\downarrow, \dots, B_{i_{k-l+1}}^\downarrow, B_{k+1}^\downarrow, B_{k+2}^\downarrow, \dots, B_{2k}^\downarrow)$. Как и в случае $l \geq k$, B' содержит не более $n_{\max}^{(k)}(m - [(l + 1)/2] + 1)$ столбцов, поэтому B содержит не более $n_{\max}^{(k)}(m - [(l + 1)/2] + 1) + l - 1$ столбцов.

Доказанная в утверждении 6 оценка формально верна и для случаев $l = 1$ или $l = 2$. Однако полученные неравенства не несут содержательной нагрузки. В частности, подставив $l = 1$, получим $n \leq n_{\max}^{(k)}(m)$, а при $l = 2$ имеем соотношение $n \leq n_{\max}^{(k)}(m) + 1$. Покажем, при каком значении m числа строк матрицы B граф $G(B)$ точно содержит компоненту связности порядка $l \geq 3$.

Предложение 7. Пусть B_0 — комбинаторно полная порядка k матрица, содержащая m строк, где $m = 2^k + s$, $s < 2^k$; и пусть B — приведенная форма матрицы B_0 . Если $s < 2^{k-1}$, то $G(B)$ содержит компоненту связности порядка $l \geq 3$.

Доказательство. Если $s < 2^k$, то граф $G(B)$ получен из k -мерного булева куба B_k удалением менее 2^{k-1} вершин. Обозначим через S множество удаленных из B_k вершин, $|S| < 2^{k-1}$. Индукцией по $k \geq 2$ докажем следующий факт, из которого будет следовать искомое утверждение: если граф G получен из B_k удалением менее 2^{k-1} вершин, то он содержит компоненту связности порядка $l \geq 3$.

Пусть $k = 2$. Следовательно, граф G получен из B_2 удалением одной вершины или совпадает с B_2 , поэтому G содержит компоненту связности порядка $l \geq 3$.

Пусть теперь $k > 2$, и пусть утверждение верно для любого k' , $2 \leq k' < k$. Докажем его справедливость для $k' = k$. Булев куб можно представить в виде объединения двух его граней, то есть подграфов, образованных фиксацией любой координаты некоторым значением. Пусть, например, $B_k = \Gamma_1^{(0)} \cup \Gamma_1^{(1)}$, где $\Gamma_1^{(j)}$ — все вершины B_k , у которых первая координата равна j , $j \in \{0, 1\}$. Тогда $\Gamma_1^{(0)} \cap \Gamma_1^{(1)} = \emptyset$. Далее,

$$S = S \cap B_k = (S \cap \Gamma_1^{(0)}) \cup (S \cap \Gamma_1^{(1)}),$$

причем $(S \cap \Gamma_1^{(0)}) \cap (S \cap \Gamma_1^{(1)}) = \emptyset$. Следовательно,

$$|S| = |S \cap \Gamma_1^{(0)}| + |S \cap \Gamma_1^{(1)}| < 2^{k-1},$$

как было сказано выше. Для выполнения последнего неравенства необходимо, чтобы для некоторого $j \in \{0, 1\}$ выполнялось условие $|S \cap \Gamma_1^{(j)}| < 2^{k-2}$. Грань $\Gamma_1^{(j)}$ представляет собой $(k - 1)$ -мерный булев куб B_{k-1} с точностью до обозначения вершин. Положим $S' = S \cap \Gamma_1^{(j)}$, $|S'| < 2^{k-2}$, и воспользуемся предположением индукции для графа $G' = \Gamma_1^{(j)} \setminus S'$. Тогда G' содержит компоненту связности порядка $l \geq 3$, а так как граф G' является подграфом G , то G содержит компоненту связности порядка $l \geq 3$.

Пользуясь предложениями 6 и 7, можно получить очередную оценку для $n_{\max}^{(k)}(m)$.

Предложение 8. Пусть $m = 2^k + s$, $k \leq s < 2^{k-1}$, $k \geq 4$. Тогда справедлива оценка

$$n_{\max}^{(k)}(m) \leq k(s - k + 2) + 1.$$

Доказательство. Пусть B — максимальная комбинаторно полная порядка k матрица размера $m \times n$ в приведенной форме, $n = n_{\max}^{(k)}$. Если $n < 2k$, то доказываемая оценка верна. Действительно, так как по условию $s \geq k$, верно, что

$$2k < k(s - k + 2) + 1.$$

Далее считаем, что $n \geq 2k$.

Согласно предложению 7, граф $G(B)$ содержит компоненту связности порядка $l \geq 3$. Следовательно, по предложению 6 справедлива оценка

$$n \leq n_{\max}^{(k)}(m - [(l + 1)/2] + 1) + \min\{k; l - 1\} \leq n_{\max}^{(k)}(m - 1) + k.$$

Далее, нетрудно убедиться, что если комбинаторно полная порядка k матрица B' в приведенной форме имеет $m - i$ строк, $i = 0, \dots, s$, то граф $G(B')$ также содержит компоненту связности порядка $l \geq 3$, поэтому для B' также можно воспользоваться оценкой из предложения 6. Следовательно, справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} n &\leq n_{\max}^{(k)}(m - 1) + k \leq n_{\max}^{(k)}(m - 2) + 2k \\ &\leq \dots \leq n_{\max}^{(k)}(2^k + k - 1) + (m - 2^k + k + 1)k. \end{aligned}$$

Но по теореме 2

$$n_{\max}^{(k)}(2^k + k - 1) = k + 1.$$

Подставив

$$n = n_{\max}^{(k)}(m), \quad m = 2^k + s,$$

получим

$$n_{\max}^{(k)}(m) \leq k(s - k + 2) + 1.$$

Согласно предложению 7, если матрица B , являясь комбинаторно полной порядка k , содержит менее $3 \cdot 2^{k-1}$ строк, то граф $G(B)$ будет содержать компоненту связности порядка $l \geq 3$, что позволяет воспользоваться предложением 6 и получить ограничение на число столбцов матрицы B . Однако, если матрица содержит хотя бы $3 \cdot 2^{k-1}$ строк, то предложением 6 воспользоваться не удастся, поскольку справедливо следующее утверждение.

Предложение 9. Пусть $m = 3 \cdot 2^{k-1}$. Тогда существует такая комбинаторно полная порядка k матрица B , содержащая m строк, что граф $G(B)$ не содержит компонент связности порядка $l > 1$.

Доказательство. Рассмотрим комбинаторно полную порядка k матрицу B , содержащую m строк, следующего вида. Пусть B дана в некоторой приведенной форме, и пусть матрица S (см. рис. 1) размера $2^{k-1} \times k$ не содержит одинаковых строк, причем все ее строки имеют одинаковую четность. Булев куб B_k является двудольным графом, причем каждая его вершинная доля — это совокупность векторов одинаковой четности. Следовательно, при таком выборе S множество вершин графа $G(B)$ представляет собой вершинную долю B_k , но вершинная доля не может содержать ребер, поэтому $G(B)$ в этом случае будет состоять только из изолированных вершин.

Список литературы

1. Самофалов К. Г., Романкевич А. М., Валуйский В. Н., Каневский Ю. С., Пиневич М. М., *Прикладная теория цифровых автоматов*. Вища школа, Киев, 1987.
2. Ролдугин П. В., Тарасов А. В., О булевых функциях без верхних бионктивных аналогов. *Математические вопросы криптографии* (2013) **4**, №1, 123–140.
3. Cusick T. W., Stănică P., *Cryptographic Boolean functions and applications*. Elsevier, Amsterdam, 2009.
4. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Высшая школа, Москва, 2001.

Статья поступила 15.06.2012.