Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Родин, Критерий полноты некоторых систем, содержащих P -множества о.-д. функций, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 1, 76–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:18:00

Критерий полноты некоторых систем, содержащих P -множества о.-д. функций

© 2013 г. А. А. Родин

В данной работе рассматривается некоторый класс подмножеств (P -множества) в функциональной системе автоматных отображений. Эти P -множества определяются с помощью классов Поста. Работа посвящена построению эффективных критериев распознавания полноты бесконечных систем автоматных отображений M таких, что $N \subseteq M$, $M \setminus N$ — конечно и N является некоторым P -множеством. По конечной добавке $M \setminus N$ критерий должен определять, полна система или нет. Приведено несколько разрешимых случаев.

1. Введение. Формулировка основных результатов

Через P обозначим множество всех ограниченно-детерминированных функций (автоматных отображений), входные и выходные переменные которых принимают значения из множества бесконечных последовательностей, составленных из нулей и единиц. Будем считать, что на множестве P определена операция суперпозиции [1]. Пусть $M \subseteq P$. Замыкание множества M относительно суперпозиции обозначим через $[M]$. Множество $M \subseteq P$ называется полным, если $[M] = P$.

Известно (см. [1]), что критерий полноты в P может быть сформулирован в терминах предполных классов. Множество $N \subset P$ называется предполным классом в P , если $[N] \neq P$, но $[N \cup \{f\}] = P$ для любой о.-д. функции $f \notin N$. Пусть $M \subseteq P$. Множество M является полным тогда и только тогда, когда M не содержится ни в одном из предполных в P классов. Таким образом, число предполных классов является важной характеристикой эффективности этого критерия. В. Б. Кудрявцевым показано, что мощность множества предполных классов в P равна континууму (см. [2]).

Пусть D — произвольный замкнутый класс алгебры логики. Обозначим через P_D множество ограниченно-детерминированных функций, в каждом состоянии которых реализуется функция алгебры логики, принадлежащая D . Систему P_D , определенную таким образом, будем называть P -множеством, порожденным классом D (термин предложен В. Б. Кудрявцевым). Оказывается, что если D — собственный класс Поста, то существует континуум предполных классов, содержащих P -множество P_D (см. [3]). В свете этого результата интерес представляет следующая теорема.

Пусть Ω^D — совокупность всех подмножеств M множества P , содержащих P -множество P_D и таких, что множество $M \setminus P_D$ конечно.

Теорема 1. Пусть класс Поста D содержит тождественную функцию алгебры логики и одну из констант. Тогда существует эффективный критерий для распознавания полноты множеств, принадлежащих совокупности Ω^D .

Заметим, что аналогичная теорема была доказана С. В. Алешиным для множеств D таких, что D содержит $\{0, 1, x, \bar{x}\}$ (см. [4]).

2. Обозначения

Прежде чем приступить к доказательству, введем ряд понятий и обозначений.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — о.-д. функция, задаваемая системой канонических уравнений

$$\begin{aligned} q^f(1) &= q_0^f; \\ q^f(t+1) &= \varphi^f(x_1(t), \dots, x_n(t), q^f(t)); \\ y^f(t) &= \psi^f(x_1(t), \dots, x_n(t), q^f(t)), \end{aligned}$$

где

$$Q^f = \{q_0^f, q_1^f, \dots, q_p^f\}$$

— множество ее состояний, а q_0^f — начальное состояние. В случае, когда ясно, о какой функции идет речь, верхний индекс, указывающий на функцию, к которой относится состояние, будем опускать. Функцию алгебры логики, реализуемую в состоянии q_i , обозначим через F_{q_i} .

Пусть $t \geq 1$, E_2^t — множество всех слов длины t , составленных из E_2 . Через $(E_2^t)^n$ будем обозначать множество всех наборов из n слов таких, что каждое слово набора принадлежит E_2^t . Пусть $i, j \in \{0, 1, \dots, p\}$. Будем считать, что состояние q_i t -достижимо из состояния q_j , если найдутся такие $a_1, a_2, \dots, a_n \in E_2^t$, что $\varphi(a_1, \dots, a_n, q_j) = q_i$. Состояние q_i достижимо из состояния q_j , если q_i t -достижимо из q_j для некоторого t .

Пусть D — некоторое замкнутое множество функций алгебры логики и $f \in P_D$. Очевидно, что тогда $\{F_{q_0}, F_{q_1}, \dots, F_{q_i}\} \subseteq D$.

Если F_{q_i} является функцией алгебры логики, существенно зависящей не менее чем от двух переменных, состояние q_i будем называть существенным, иначе — несущественным.

Если F_{q_i} является линейной функцией алгебры логики, состояние q_i будем называть линейным, иначе — нелинейным.

Если F_{q_i} является монотонной функцией алгебры логики, состояние q_i будем называть монотонным, иначе — немонотонным.

Будем считать, что состояния q_i и q_j связаны друг с другом, если состояние q_i достижимо из q_j и наоборот. При этом необязательно, чтобы $q_i \neq q_j$.

Подмножество $K \subset Q$ будем называть компонентой связности, если:

- (1) для любых $q_i, q_j \in K$, q_i и q_j связаны друг с другом;
- (2) если $q_i \in K$ и существует состояние $q_j \in Q$, такое что q_i и q_j связаны, то $q_j \in K$.

Понятно, что задача об отыскании компонент связности может быть решена за конечное число операций. Заметим, что могут существовать состояния, не лежащие ни в одной компоненте связности.

Рассмотрим произвольное состояние q , принадлежащее какой-либо компоненте связности K . Для этого состояния определим множество $A(q) \in (E_2^1)^n$, где n — число переменных, от которых зависит функция f , следующим образом: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A(q)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, q) \in K$. Иными словами, $A(q)$ — это множество переходов, по которым из состояния q нельзя покинуть компоненту связности, в которой оно находится.

Пусть $g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m)$ — функции алгебры логики и

$$S(g_1, \dots, g_n) = \bigcup_{(\beta_1, \dots, \beta_m) \in (E_2^1)^m} \{(g_1(\beta_1, \dots, \beta_m), \dots, g_n(\beta_1, \dots, \beta_m))\} \subseteq (E_2^1)^n.$$

Состояние q будем называть локально нелинейным, если найдутся линейные функции алгебры логики $g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m)$, такие что $S(g_1, \dots, g_n) \subseteq A(q)$ и $F_q(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$ является нелинейной функцией алгебры логики. Это означает, что на вход состояния q можно подать такие линейные функции алгебры логики, что оно останется нелинейным, но из него нельзя будет покинуть компоненту связности. Все остальные состояния назовем локально линейными. Заметим, что если состояние не принадлежит никакой компоненте, то оно локально линейно.

Состояние q будем называть локально существенным, если найдутся функции алгебры логики, существенно зависящие не более чем от одной переменной, $g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m)$, такие что $S(g_1, \dots, g_n) \subseteq A(q)$ и $F_q(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$ является функцией алгебры логики, существенно зависящей не менее чем от двух переменных.

Заметим, что локально нелинейное состояние не всегда является локально существенным, поскольку свойство локальной нелинейности проверяется на наборах произвольных линейных функций, а свойство локальной существенности — только на наборах функций, зависящих не более чем от одной переменной.

Будем говорить, что состояние q локально немонотонно, если найдутся монотонные функции алгебры логики $g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m)$, такие что $S(g_1, \dots, g_n) \subseteq A(q)$ и $F_q(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$ является немонотонной функцией алгебры логики.

Обозначим через $Q_i(t)$ подмножество Q , состоящее из всех состояний, t -достижимых из q_i . Рассмотрим последовательность множеств $Q_0(0), Q_0(1), Q_0(2), \dots$. Когда-нибудь среди них окажутся два одинаковых — $Q_0(i) = Q_0(j)$, $i \neq j$, поскольку количество всевозможных подмножеств Q конечно. Ясно, что тогда $Q_0(i+1) = Q_0(j+1)$, то есть, начиная с какого-то момента T , множества в этой последовательности будут чередоваться по циклу. Пусть s — длина этого цикла. Тогда положим

$$C_i = Q_0(T + i), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Длину цикла будем обозначать через $s(f)$ или просто через s , если ясно, о какой функции идет речь.

Введем понятие A -полноты (см. [5]). Пусть τ — произвольное натуральное число. Функции $g(x_1, \dots, x_n) = y_1$ и $h(x_1, \dots, x_n) = y_2$ являются τ -эквивалентными, если $y_1(t) = y_2(t)$ при $t \leq \tau$ для любых $x_1, \dots, x_n \in E_2^\infty$.

Говорим, что множество $M \subseteq P$ является τ -полным, если для любой о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P$ существует такая функция $f^M(x_1, \dots, x_n) = y_1$, $f^M \in [M]$, что f и f^M τ -эквивалентны.

Говорим, что множество $M \subseteq P$ является A -полным, если оно τ -полно для любого натурального τ . Также будем говорить, что $f \in A[M]$ (A -замыкание), если для любого натурального τ в замыкании M найдется функция f^M такая, что f^M τ -эквивалентна f .

3. Доказательство теоремы 1 для случая, когда порождающее множество содержит обе константы

Сначала рассмотрим случай порождающего множества

$$D_{01} = [\{0, 1, x\}].$$

Ясно, что у каждой функции из $P_{D_{01}}$ все состояния будут линейными, монотонными и несущественными.

Теорема 2. Пусть

$$M = P_{D_{01}} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Верно, что система M полна тогда и только тогда, когда она A -полна и в каждом из множеств C_i , $i = 1, 2, \dots, s$, содержится хотя бы одно локально нелинейное, хотя бы одно локально существенное и хотя бы одно локально немонотонное состояние.

Эффективный алгоритм распознавания полноты следует из теоремы 2, надо просто проверить выполнение ее условий. Леммы 1–4 показывают, что проверка указанных условий может быть осуществлена за конечное число операций. Леммы 5–7 доказывают необходимость этих условий, а леммы 8–10 — достаточность.

3.1. Доказательство необходимости условий теоремы 2

Лемма 1. Пусть f — произвольная о.-д. функция. Существует эффективный критерий проверки того, является ли ее состояние q локально нелинейным.

Доказательство. По определению, состояние q будет локально нелинейным только в том случае, если найдутся такие линейные функции алгебры логики $g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m)$, что

$$v(y_1, \dots, y_m) = F_q(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$$

является нелинейной функцией алгебры логики и $S(g_1, \dots, g_n) \subseteq A(q)$.

Как известно (см. [6]), для всякой нелинейной функции алгебры логики можно выбрать некоторые ее переменные и подставить вместо них константы 0 или 1 таким образом, что получится нелинейная функция алгебры логики, зависящая от двух переменных. Пусть $v(y_1, y_2, c_1, \dots, c_{m-2})$, где $c_i \in \{0, 1\}$ — нелинейная функция алгебры логики. Но

$$v(y_1, y_2, c_1, \dots, c_{m-2}) = F_q(g_1(y_1, y_2, c_1, \dots, c_{m-2}), \dots, g_n(y_1, y_2, c_1, \dots, c_{m-2})).$$

Ясно, что $\bigcup \{g_1(y_1, y_2, c_1, \dots, c_{m-2}), \dots, g_n(y_1, y_2, c_1, \dots, c_{m-2})\} \subseteq S(g_1, \dots, g_n)$. Таким образом, если условие нелинейности функции $F_q(g_1, \dots, g_n)$ выполнено для некоторых линейных функций $g_1, \dots, g_n$ и $S(g_1, \dots, g_n) \in A(q)$, то найдутся линейные функции алгебры логики $g'_1, \dots, g'_n$, зависящие не более чем от двух переменных, для которых эти условия также выполнены. Тогда ясно, что при проверке локальной нелинейности в качестве функций $g_1, \dots, g_n$ достаточно рассматривать функции алгебры логики, зависящие не более чем от двух переменных. Понятно, что возможно перебрать все наборы $(g_1, \dots, g_n)$ таких функций. Если для какого-то из них условия определения будут выполнены, то состояние будет локально нелинейным, если нет — то и не будет. Таким образом, эффективный критерий построен.

Лемма 2. Пусть f — произвольная о.-д. функция. Существует эффективный критерий проверки, является ли ее состояние локально существенным.

Доказательство. По определению, состояние q локально существенно только в том случае, если найдутся такие функции алгебры логики, существенно зависящие не более, чем от одной переменной, $g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m)$, что $F_q(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$ является функцией алгебры логики, существенно зависящей не менее, чем от двух переменных. Число функций алгебры логики, зависящих не более чем от одной переменной, конечно, поэтому можно перебрать все наборы $(g_1, \dots, g_n)$ таких функций и проверить выполнение условий определения.

Лемма 3. Пусть f — произвольная о.-д. функция. Существует эффективный критерий проверки, является ли ее состояние локально немонотонным.

Доказательство. Рассмотрим множество наборов $A(q)$. Здесь возможны два случая.

1. Существуют два набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in A(q)$, такие, что $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ и $F_q(\tilde{\alpha}) > F_q(\tilde{\beta})$. Покажем, что в этом случае состояние является локально немонотонным. Действительно, $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$, без ограничения общности, можно считать, что $\alpha_1 < \beta_1, \dots, \alpha_i < \beta_i, \alpha_{i+1} = \beta_{i+1}, \dots, \alpha_n = \beta_n$, где $i \geq 1$. Тогда положим $g_1 = x, \dots, g_i = x, g_{i+1} = \alpha_{i+1}, \dots, g_m = \alpha_m$. Ясно, что $F_q(g_1, \dots, g_n) = \bar{x}$ — немонотонная функция и $S(g_1, \dots, g_n) = \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\} \subseteq A(q)$. Это и означает, что состояние локально немонотонно.

2. Не существует двух таких наборов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in A(q)$, что $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ и $F_q(\tilde{\alpha}) > F_q(\tilde{\beta})$. Рассмотрим любые такие монотонные функции алгебры логики $g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m)$, что $S(g_1, \dots, g_n) \in A(q)$. Пусть $\tilde{\gamma}, \tilde{\delta} \in E_2^m$ и $\tilde{\gamma} \leq \tilde{\delta}$. Тогда $g_1(\tilde{\gamma}) \leq g_1(\tilde{\delta}), \dots, g_n(\tilde{\gamma}) \leq g_n(\tilde{\delta})$. В силу условия второго случая получим, что

$$F_q(g_1(\tilde{\gamma}), \dots, g_n(\tilde{\gamma})) \leq F_q(g_1(\tilde{\delta}), \dots, g_n(\tilde{\delta})).$$

Отсюда следует, что $F_q(g_1, \dots, g_n)$ монотонна при всех монотонных $g_1, \dots, g_n$, удовлетворяющих условию $S(g_1, \dots, g_n) \in A(q)$. Таким образом, состояние q будет локально монотонным.

Эффективную процедуры проверки A -полноты системы M предоставляют следующие два утверждения.

Лемма 4. Система

$$M = P_{D_{01}} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}$$

является A -полной тогда и только тогда, когда в каждом из множеств $Q_0(0), Q_0(1), Q_0(2), \dots$ и т. д., определенных для функции f , содержится хотя бы одно нелинейное и хотя бы одно немонотонное.

Справедливость этой леммы вытекает из результатов, полученных в [5].

Следствие 1. Пусть

$$M = P_{D_{01}} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Существует эффективный критерий проверки, является ли эта система A -полной.

Это утверждение следует непосредственно из леммы 4: надо рассмотреть множества $Q_0(0), Q_0(1), \dots, Q_0(T), D_1, \dots, D_s$ и проверить наличие в каждом из них состояний указанного типа.

3.2. Доказательство достаточности условий теоремы 2

Пусть $U(h, q^h, s, j) \subseteq Q^h$ — подмножество состояний функции h . Будем считать, что $q_i^h \in U(h, q^h, s, j)$ тогда и только тогда, когда q_i^h достижимо из q^h и $q_i^h \in Q_0^h(T + sl + j)$ для некоторого l . Если среди состояний из множества $U(h, q^h, s, j)$ не окажется существенных состояний, состояние q^h будем называть j -несущественным.

Лемма 5. Пусть

$$M = P_{D_{01}} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}$$

и во множестве C_j для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ не содержится ни одного локально существенного состояния. Тогда для каждой функции $w(x_1, \dots, x_m) \in [M]$ из любого ее состояния q^w достижимо j -несущественное состояние.

Доказательство. Заметим, что любое состояние, достижимое из j -несущественного состояния, также будет j -несущественным.

Будем доказывать утверждение леммы индукцией по глубине суперпозиции. В качестве базы индукции выберем о.-д. функции из системы M ; очевидно, что для них утверждение леммы верно.

Рассмотрим теперь какую-либо суперпозицию $h(g_1, \dots, g_m) = w(x_1, \dots, x_k)$ над системой M . Пусть для функций $g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k), h(y_1, \dots, y_m)$ предположение индукции верно; покажем, что оно верно для $w(x_1, \dots, x_k)$.

Рассмотрим произвольное состояние q^w функции $w(x_1, \dots, x_k)$. Пусть оно достижимо из начального состояния q_0^w по набору $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k) \in (E_2^{\tau})^k$. Рассмотрим состояние

$$q_1^{g_1} = \varphi^{g_1}(\tilde{\alpha}, q_0^{g_1}).$$

Согласно предположению, существует такое τ_1 и такое $\tilde{\alpha}^1 = (\tilde{\alpha}_1^1, \dots, \tilde{\alpha}_n^1) \in (E_2^{\tau_1})^k$, что $\varphi^{g_1}(\tilde{\alpha}^1, q_1^{g_1})$ j -несущественно.

Рассмотрим набор $\tilde{\beta}^1 = (\tilde{\beta}_1^1, \dots, \tilde{\beta}_k^1)$, где $\tilde{\beta}_i^1 = \widetilde{\alpha_i \alpha_i^1} \in E_2^{\tau + \tau_1}$ — конкатенация двух слов. Пусть

$$q_i^{g_2} = \varphi^{g_2}(\tilde{\beta}_1^1, \dots, \tilde{\beta}_k^1, q_0^{g_2}).$$

По предположению, существует такой набор $\tilde{\alpha}^2 = (\tilde{\alpha}_1^2, \dots, \tilde{\alpha}_n^2) \in E_2^{\tau_2}$, что $\varphi^{g_2}(\tilde{\alpha}^2, q_i^{g_2})$ j -несущественно.

Пусть $\tilde{\beta}^2 = (\tilde{\beta}_1^2, \dots, \tilde{\beta}_k^2)$, где $\tilde{\beta}_i^2 = \widetilde{\beta_i^1 \alpha_i^2} \in E_2^{\tau + \tau_1 + \tau_2}$ — конкатенация двух слов. Ясно, что состояния $\varphi^{g_1}(\tilde{\beta}^2, q_0^{g_1})$ и $\varphi^{g_2}(\tilde{\beta}^2, q_0^{g_2})$ являются j -несущественными состояниями функций g_1 и g_2 соответственно.

Точно таким же образом построим набор $\tilde{\beta}^m \in (E_2^{\tau + \tau_1 + \dots + \tau_m})^k$, такой, что состояния $\varphi^{g_i}(\tilde{\beta}^m, q_0^{g_i})$ есть j -несущественные состояния соответствующих функций. Это означает, что при подаче набора $\tilde{\beta}^m$ на вход суперпозиции в дальнейшем на вход состояния функции h будут подаваться несущественные функции алгебры логики в моменты $T + j + sl$. Рассмотрим состояние

$$q^h = \varphi^h(g_1(\tilde{\beta}^m), \dots, g_m(\tilde{\beta}^m), q_0^h),$$

в котором оказалась функция h .

Итак, по условию леммы, у функции h в моменты $T + j + sl$ достижимы лишь локально несущественные состояния. Это могут быть состояния трех типов:

- (1) несущественные состояния, лежащие в компоненте связности;
- (2) существенные состояния, лежащие в компоненте, которые не являются локально существенными;
- (3) состояния, лежащие вне компонент связности.

Будем считать, что

$$\tau + \tau_1 + \dots + \tau_k > T + j.$$

Несложно видеть, что τ_i можно выбрать сколь угодно большими.

Если состояние q^h является j -несущественным состоянием функции h , то ясно, что состояние $\varphi^w(\tilde{\beta}^m, q^w)$ j -несущественно и достижимо из q^w , следовательно, предположение индукции верно.

Пусть

$$S(q^h) = \bigcup_{\tilde{A} \in (E_2^t)^k} \{\varphi^h(g_1(\tilde{A}), \dots, g_m(\tilde{A}), q^h)\}$$

есть множество состояний функции h , которые достижимы из q^h по некоторому набору $g_1(\tilde{A}), \dots, g_m(\tilde{A})$. Рассмотрим множество

$$US(q^h) = U(h, q^h, s, j) \cap S(q^h).$$

Если в нем содержатся лишь несущественные состояния функции h , то состояние $\varphi^w(\tilde{\beta}^m, q^w)$ есть j -несущественное состояние функции w , достижимое из q^w , следовательно, предположение индукции верно.

Пусть это не так. Здесь могут быть два случая.

1. Пусть в $US(q^h)$ нет состояний третьего типа, но оказалось состояние второго типа q_i^h , в котором реализуется функция алгебры логики $F_{q_i^h}(F_{q^{s_1}}, \dots, F_{q^{s_m}})$, существенно зависящая не менее, чем от двух переменных, и достижимое из q^h по некоторому набору $(g_1(\tilde{A}), \dots, g_m(\tilde{A}))$. По доказанному выше, аргументы $F_{q^{s_1}}, \dots, F_{q^{s_m}}$, подаваемые на это состояние, будут существенно зависеть не более чем от одной переменной. Тогда существует такие $a_1, \dots, a_k \in E_2$, что $F_{q^{s_1}}(a_1, \dots, a_k), \dots, F_{q^{s_m}}(a_1, \dots, a_k) \notin A(q_i^h)$, поскольку состояние q_i^h не является локально существенным. Это означает, что при подаче на вход функции w , находящейся в этом состоянии, набора $a = (a_1, \dots, a_k)$, функция h покидает компоненту, в которой содержится q_i^h . Обратно в эту компоненту функция h не может вернуться, что следует из определения компоненты. Рассмотрим набор

$$\tilde{\gamma}_1 = \tilde{A}a = (A_1a_1, \dots, A_ka_k).$$

Ясно, что $q_i^h \notin U(h, \varphi^h(g_1(\tilde{\gamma}_1), \dots, g_m(\tilde{\gamma}_1)), q^h, s, j)$, так как функция h при таких начальных значениях входных данных уже побывала в компоненте, где лежит q_i^h , вышла из нее, и обратно вернуться уже не может. Если в $US(\varphi^h(g_1(\tilde{\gamma}_1), \dots, g_m(\tilde{\gamma}_1)), q^h)$ содержится еще какое-либо существенное состояние функции h , действуем таким же образом. Состояний второго типа конечное число, поэтому рано или поздно получим такой набор B , что $US(\varphi^h(g_1(\tilde{B}), \dots, g_m(\tilde{B})), q^h)$ не содержит ни одного существенного состояния функции h . Это означает, что состояние $US(\varphi^w(g_1(\tilde{B}), \dots, g_m(\tilde{B})), q^w)$ функции w j -несущественно и достижимо из q^w , откуда следует справедливость предположения индукции.

2. Пусть во множестве $US(q^h)$ есть хотя бы одно состояние третьего типа q_i^h . Рассмотрим набор $\tilde{\gamma}' = \tilde{A}a$, где $\tilde{A}$ — такой набор входных данных, по которому из состояния q^h можно перейти в q_i^h и a — произвольный набор входных данных длины 1. Ясно, что $q_i^h \notin U(h, \varphi^h(g_1(\tilde{\gamma}'), \dots, g_m(\tilde{\gamma}')), s, j)$, так как иначе состояние q_i^h лежало бы в какой-либо компоненте связности. Понятно, что аналогично можно построить набор B' , такой что в $U(h, \varphi^h(g_1(\tilde{B}'), \dots, g_m(\tilde{B}')), s, j)$ не содержится ни одного состояния третьего типа. Таким образом, этот случай сводится к случаю 1.

Непосредственно из леммы 5 следует, что система не полна, если в каком-то из множеств C_i , $i = 1, 2, \dots, s$, не содержится ни одного локально существенного состояния. Например, для сумматора по модулю два утверждение леммы 5 не выполнено и, следовательно, он не может содержаться в замыкании M .

Лемма 6. Пусть

$$M = P_{D_{01}} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Если в каком-то из множеств C_i , $i = 1, 2, \dots, s$, не содержится ни одного локально нелинейного состояния, то система M неполна.

Лемма 7. Пусть

$$M = P_{D_{01}} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Если в каком-то из множеств C_i , $i = 1, 2, \dots, s$, не содержится ни одного локально нелинейного состояния, то система M неполна.

Доказательство этих двух лемм полностью аналогично доказательству леммы 5.

Лемма 8. Пусть

$$M = P_{D_{01}} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Если в каждом из множеств C_i содержится хотя бы одно локально немонотонное состояние и система A -полна, то в замыкании системы содержится о.-д. функция отщипания.

Доказательство. Пусть множество C_i содержит локально немонотонное состояние q . Это означает, что состояние q достижимо из начального за время $T+i+sN$ для любого целого $N \geq 0$. Поскольку q — локально немонотонное состояние, существуют такие монотонные функции алгебры логики $g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)$, что $F_q(g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot))$ немонотонна, причем $S(g_1, \dots, g_n) \in A(q)$. Это означает, что для любого набора $a \in (E_2^1)^m$ существует набор из n слов $(e_1(a), \dots, e_n(a)) \in (E_2^{d(a)})^n$, таких, что

$$\varphi(g_1(a)e_1(a), \dots, g_n(a)e_n(a), q) = q.$$

Пусть $K = HOK(d(a) + 1, s)$ по всем $d(a) + 1$. Пусть $g_i(x_1, \dots, x_m) \in \{0, 1, x\}$, $i = 1, 2, \dots, n$; в лемме 3 показано, что функции g_i можно выбрать таким образом.

Пусть $a_1, \dots, a_n \in E_2^{T+i}$ таковы, что $q = \varphi(a_1, \dots, a_n, q_0)$. Построим вспомогательные о.-д. функции $h_1(y_1, \dots, y_m), \dots, h_n(y_1, \dots, y_m)$ следующим образом. Для функции h_j

$$q(0) = q_0;$$

$$\varphi(*, q_t) = q_{t+1}, \quad \psi(*, q_t) = a_j(t+1)$$

для всех $t < T + i$, здесь $*$ — любой набор входных данных длины 1, то есть переходы безусловны;

$$\begin{aligned} \varphi(a, q_{T+i}) &= q_{a,1}, & \psi(a, q_{T+i}) &= g_j(a); \\ \varphi(*, q_{a,l}) &= q_{a,l+1}, & \psi(*, q_{a,l}) &= e_j(a)(l) \end{aligned}$$

для $1 \leq l < K - 1, l \neq 0 \pmod{d(a) + 1}$), здесь $e_j(a)(l)$ — буква слова $e_j(a)$, имеющая порядковый номер, равный остатку числа l по модулю $d(a) + 1$;

$$\varphi(*, q_{a,l}) = q_{a,l+1}, \quad \psi(*, q_{a,l}) = g_j(a)$$

для $1 \leq l < K - 1, l = 0 \pmod{d(a) + 1}$);

$$\varphi(*, q_{a,l}) = q_{T+i}, \quad \psi(*, q_{a,l}) = e_j(a)(l)$$

для $l = K - 1$.

Полученная функция имеет только одно состояние, в котором реализуется функция алгебры логики, отличная от константы — состояние q_{T+i} , в котором реализуется функция из множества $\{0, 1, x\}$. Очевидно, функции $h_j \in P_{D_{01}}$, $j = 1, 2, \dots, n$, и если подать их на вход функции f вместо переменных x_j соответственно, получим функцию f_1 , у которой в моменты $T + i + KN$ достижимо только одно состояние (одинаковое для всех моментов), в котором реализуется отрицание. Аналогичным образом можно построить функцию f_2 , которая находится в немонотонном состоянии в моменты $T + i + s + KN$, и так далее. Используя функции из $P_{D_{01}}$, можно получить такую функцию F^i , у которой реализуется отрицание в моменты $T + i + sN$. Но это можно сделать для любого i , так как в каждом из множеств C_i содержится локально немонотонное состояние. А тогда можно получить такую функцию, у которой реализуется отрицание в любой момент времени, начиная с T . Учитывая A -полноту, получим о.-д. функцию отрицания.

Лемма 9. Пусть

$$M = P_{D_{01}} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Если в каждом из множеств C_i содержится хотя бы одно локально существенное состояние, система A -полна, и в замыкании M содержится о.-д. функция отрицания, то в замыкании системы содержится сумматор по модулю два.

Доказательство. Аналогично предыдущей лемме, построим функции $h_1(y_1, \dots, y_m), \dots, h_n(y_1, \dots, y_m)$, в каждом состоянии которых реализуется функция алгебры логики, существенно зависящая не более чем от одной переменной. Ясно, что они принадлежат замыканию M . Далее, аналогично лемме 8, построим функцию, в каждом состоянии которой реализуется функция, существенно зависящая не менее чем от двух переменных, начиная с момента T . Учитывая A -полноту, получим сумматор по модулю два.

Лемма 10. Пусть

$$M = P_{D_{01}} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Если в каждом из множеств C_i содержится хотя бы одно локально нелинейное состояние, система A -полна, и в замыкании M содержится сумматор, то система полна.

Доказательство. Аналогично предыдущим двум леммам, получим какую-либо о.-д. функцию, в каждом состоянии которой реализуется некоторая нелинейная функция алгебры логики. Используя сумматор по модулю два, тождественный 0 и тождественную 1, несложно получить о.-д. функцию, в каждом состоянии которой реализуется штрих Шеффера. Тогда, как нетрудно видеть, система M полна.

Теорема 2 полностью доказана.

3.3. Следствия из теоремы 2

Пусть теперь

$$M = P_{D_{01}} \cup \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Пусть

$$Q_0^M(T) = Q_0^{f_1}(T) \cup \dots \cup Q_0^{f_m}(T).$$

Рассмотрим последовательность множеств $Q_0^M(0), Q_0^M(1), Q_0^M(2), \dots$. Когда-нибудь среди них окажутся два одинаковых и, начиная с какого-то момента T^M , множества в этой последовательности будут чередоваться по циклу. Пусть s^M — длина этого цикла. Тогда положим

$$C_i^M = Q_0^M(T + i), \quad i = 1, 2, \dots, s^M.$$

Теорема 3. Пусть

$$M = P_{D_{01}} \cup \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Верно, что система M полна тогда и только тогда, когда она A -полна и в каждом из множеств D_i^M , $i = 1, 2, \dots, s$, содержится хотя бы одно локально нелинейное, хотя бы одно локально существенное и хотя бы одно локально немонотонное состояние.

Доказательство теоремы 2 легко переносится на этот случай, нужно показать справедливость аналогичных десяти лемм, которые формулируются и доказываются точно таким же образом.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть D — произвольный замкнутый класс алгебры логики, содержащий множество $\{0, 1, x\}$, и

$$M = P_D \cup \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Во множестве D могут содержаться нелинейные, немонотонные и существенные функции алгебры логики. Определим о.-д. функцию $f_L(D)$. Если в D содержится какая-либо нелинейная функция алгебры логики F_L , то $f_L(D)$ — функция с одним состоянием, в котором реализуется F_L . В противном случае, $f_L(D)$ — функция с одним состоянием, в котором реализуется константа 0. Аналогичным образом определим о.-д. функции $f_M(D)$ и $f_s(D)$. Пусть

$$M' = P_D \cup \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\} \cup \{f_L(D)\} \cup \{f_s(D)\} \cup \{f_M(D)\}.$$

Ясно, что

$$[M] = [M'].$$

Для системы M' справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть

$$M' = P_D \cup \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\} \cup \{f_L(D)\} \cup \{f_s(D)\} \cup \{f_M(D)\}.$$

Система M' полна тогда и только тогда, когда она A -полна и в каждом из множеств $C_i^{M'}$, $i = 1, 2, \dots, s$, содержится хотя бы одно локально нелинейное, хотя бы одно локально существенное и хотя бы одно локально немонотонное состояние.

Действительно, если в каком-то из C_i нет, к примеру, локально существенного состояния, это означает, что множество D не содержит ни одной существенной функции алгебры логики, и доказательство неполноты в этом случае аналогично доказательству леммы 5. Если в каждом из C_i есть состояния указанных типов, то можно провести процедуру, описанную в леммах 8–10 и получить полную систему.

4. Завершение доказательства теоремы 1

Рассмотрим теперь более общий случай, а именно, когда порождающее множество D состоит из тождественной функции алгебры логики и одной из констант. Без ограничения общности, можно выбрать в качестве порождающего множества

$$D_0 = \{0, x\}.$$

Пусть

$$M = P_{D_0} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Тогда для определения полноты этой системы достаточно проверить, существует ли в замыкании M тождественная единица. Если существует, то задача будет сведена к случаю $D = \{0, 1, x\}$, которая, как показано выше, алгоритмически разрешима. Если же в замыкании M не существует тождественной единицы, то система не полна. Таким образом, целью этой части является построение алгоритма проверки того, принадлежит ли тождественная единица замыканию M .

Введем несколько новых определений.

Константную о.-д. функцию, выход которой не зависит от входных переменных и является периодической последовательностью, будем обозначать через $p_1 p_2 \dots p_l \langle c_1 c_2 \dots c_s \rangle$, где $p_1 p_2 \dots p_l$ — предпериод, а $c_1 c_2 \dots c_s$ — период (не обязательно простой) выходной последовательности. Например, тождественную единицу в этих терминах можно обозначить через $\langle 1 \rangle$, или $\langle 11 \rangle$, или $1\langle 11 \rangle$.

Приведем несколько простых свойств таких функций.

Свойство 1. Пусть

$$M = P_D \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}$$

и $\langle 1 \rangle \in A[M]$, $\tilde{\alpha}_0 \langle \tilde{\alpha} \rangle \in [M]$, где $\tilde{\alpha} \in E_2^s$, $\tilde{\alpha}_0 \in E_2^T$ для некоторых натуральных T, s . Тогда $\tilde{\beta}_0 \langle \tilde{\alpha} \rangle \in [M]$ для любого $\tilde{\beta}_0 \in E_2^{T+ks}$, $k \geq 0$.

Свойство 2. Пусть

$$M = P_D \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}$$

и $\tilde{\alpha}_0 \langle \tilde{\alpha} \rangle \in [M]$, где $\tilde{\alpha} \in E_2^s$, $\tilde{\alpha}_0 \in E_2^T$ для некоторых натуральных T, s . Тогда $\tilde{\alpha}_0 \langle \tilde{\beta}_1 \dots \tilde{\beta}_n \rangle \in [M]$ для любых $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n \in E_2^s$, $\tilde{\beta} \leq \tilde{\alpha}$, $n > 0$.

Пусть $B \subseteq E_2^s$. Обозначим через $\Gamma_T(B)$ множество всех бесконечных последовательностей, представимых в виде $ab_1b_2\dots$, где $a \in E_2^T$, $b_i \in B$.

Пусть $[\Gamma_T(B)]$ — множество бесконечных последовательностей. Будем считать, что $\gamma \in [\Gamma_T(B)]$ тогда и только тогда, когда существует такое $\gamma' \in \Gamma_T(B)$, что γ и γ' различаются не более чем в конечном числе разрядов.

Состояния о.-д. функции f , в которых реализуются функции алгебры логики, не сохраняющие ноль, будем называть несохраняющими ноль.

Пусть, как и ранее, $Q_0(t)$ — множество состояний функции f , достижимых из начального за t шагов. Начиная с какого-то момента времени, эти множества будут чередоваться по циклу, то есть $Q_0(t) = C_j$, если t представимо в виде $T + j + ks$, где T — длина предпериода, $s(f)$ — длина цикла, $k \geq 0$, $j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$. Зафиксируем некоторое множество двоичных наборов

$$A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq E_2^s.$$

Построим ориентированный граф $G_f(A)$ с пометками на ребрах, вершинами которого являются состояния из множества C_1 . Пусть $q, p \in C_1$. В $G_f(A)$ существует ребро, ведущее из q в p , если и только если существуют $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \in A$ такие, что

$$\varphi(\beta_1, \dots, \beta_n, q) = p.$$

Припишем этому ребру метку $\bar{\psi}(\beta_1, \dots, \beta_n, q)$, то есть тот набор, который является выходом функции f , находящейся в состоянии q , по наборам $\beta_1, \dots, \beta_n$. Таким образом, в графе могут быть кратные ребра и петли. Очевидно, что граф конечен, поэтому в нем можно найти все простые циклы за конечное время. Выберем двоичные наборы, приписанные ребрам, которые входят хотя бы в один простой цикл и обозначим их множество через $I_f(A)$ — образ набора A относительно функции f .

Множество наборов $A \subseteq E_2^s$ назовем 0-полным, если для любых таких $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E_2^s$, что $\tilde{\alpha} \geq \tilde{\beta}$ и $\tilde{\alpha} \in A$ имеет место включение $\tilde{\beta} \in A$.

Теперь можно сформулировать основную теорему этой части.

Теорема 5. Пусть

$$M = P_{D_0} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Тогда M содержит тождественную единицу если и только если $\langle 1 \rangle \in A[M]$ и для любого 0-полного $A \subset E_2^{s(f)}$ верно, что $I_f(A) \setminus A \neq \emptyset$.

Аналогом лемм про A -полноту в этом случае является лемма 11. Необходимые и достаточные условия следуют из лемм 12, 13 и 14 соответственно.

Лемма 11. Пусть

$$M = P_{D_0} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Тогда $\langle 1 \rangle \in A[M]$ в том и только в том случае, когда в каждом из множеств $Q_0(0), Q_0(1), \dots, Q_0(T + s)$ существует состояние, несохраняющее ноль.

Доказательство этой леммы также может быть получено с помощью небольшой модификации результатов из [5].

Лемма 12. Пусть

$$M = P_{D_0} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Если существует некоторое 0-полное множество $A \subset E_2^{s(f)}$, такое, что $I_f(A) \setminus A = \emptyset$, то M не содержит истинностную единицу.

Доказательство. Покажем, что в этом случае все функции системы M сохраняют множество бесконечных последовательностей $[\Gamma_T(A)]$. Рассмотрим бесконечную последовательность $f(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, где $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in [\Gamma_T(A)]$. По определению, существует такое натуральное k , что $\gamma_i \in \Gamma_{T+sk}(A)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда в момент $T+sk$ функция f находится в одном из состояний множества C_1 . В следующие s моментов выход f равен одному из наборов, приписанных ребрам графа $G_f(A)$, в последующие s моментов имеем аналогичную ситуацию, и так далее. Учитывая, что по ребрам, не входящим ни в один цикл, можно пройти не более чем один раз, заключаем, что $f(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in [\Gamma_{T+sk}(I_f(A))] \subseteq [\Gamma_T(A)]$. Ясно, что если все функции системы сохраняют $[\Gamma_T(A)]$, то и любая их суперпозиция сохраняет это множество. Отсюда следует, что истинностная единица не принадлежит замыканию M , поскольку она не сохраняет $[\Gamma_T(A)]$ ни для какого 0-полного $A \subset E_2^{s(f)}$.

Лемма 13. Пусть

$$M = P_{D_0} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}, \quad \langle 1 \rangle \in A[M].$$

Пусть $A \subset E_2^{s(f)}$ — 0-полное множество, такое, что $I_f(A) \setminus A \neq \emptyset$ и $p_1 p_2 \dots p_T \langle \tilde{\alpha} \rangle \in [M]$ при всех $p_1, p_2, \dots, p_T \in E_2$, при всех $\tilde{\alpha} \in A$. Тогда существует такое 0-полное множество $B \supset A$, что $p_1 p_2 \dots p_T \langle \tilde{\beta} \rangle \in [M]$ при всех $p_1, p_2, \dots, p_T \in E_2$, при всех $\tilde{\beta} \in B$.

Доказательство. Из того, что $I_f(A) \setminus A \neq \emptyset$, следует, что в графе $G_f(A)$ существует ребро с меткой $\tilde{\alpha} \in E_2^s$, $\tilde{\alpha} \notin A$, причем это ребро принадлежит некоторому простому циклу. Пусть длина этого цикла равна l . Тогда ясно, что для любого $k = 0, \dots, l-1$ найдутся о.-д. функции $g_1^k = \tilde{\gamma}_1^0 \langle \tilde{\gamma}_1^1 \dots \tilde{\gamma}_1^l \rangle, \dots, g_n^k = \tilde{\gamma}_n^0 \langle \tilde{\gamma}_n^1 \dots \tilde{\gamma}_n^l \rangle$, $D\tilde{\gamma}_i^0 \in E_2^T + ks$, $\tilde{\gamma}_i^j \in A$, такие, что

$$f(g_1^k, \dots, g_n^k) = \tilde{\alpha}_k^0 \langle \tilde{\alpha}^1 \dots \tilde{\alpha}^l \rangle,$$

где $\tilde{\alpha}^1 = \tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}_k^0 \in E_2^{T+sk}$. Это следует из определения графа $G_f(A)$ и того, что любое состояние множества C_1 достижимо из начального за время $T+sk$. Согласно свойствам 1 и 2, $g_1^k, \dots, g_n^k \in [M]$, следовательно, $\tilde{\alpha}_k^0 \langle \tilde{\alpha}^1 \dots \tilde{\alpha}^l \rangle \in [M]$.

Рассмотрим о.-д. функцию $h(x_1, \dots, x_l) = y$. Положим $y(t) = x_i(t)$, если t представимо в виде $T + Nls + (i-1)s + d + 1$, $d < s$, для некоторого натурального N , и $y(t) = x_1$, если $t \leq T$. Ясно, что $h(x_1, \dots, x_l) \in P_{D_0}$ и

$$h(\tilde{\alpha}_0^0 \langle \tilde{\alpha}^1 \dots \tilde{\alpha}^l \rangle, \dots, \tilde{\alpha}_l^0 \langle \tilde{\alpha}^1 \dots \tilde{\alpha}^l \rangle) = \tilde{\alpha}_0^0 \langle \tilde{\alpha} \rangle \in [M].$$

Отсюда и из свойства 2 следует, что $\tilde{\beta}^0 \langle \tilde{\beta} \rangle \in [M]$ для всех $\tilde{\beta}^0 \in E_2^T$, $\tilde{\beta} \leq \tilde{\alpha}$. Возьмем в качестве B множество наборов $\tilde{\beta}$ таких, что либо $\tilde{\beta} \leq \tilde{\alpha}$, либо $\tilde{\beta} \in A$, и заключаем, что для него утверждение леммы верно.

Лемма 14. Пусть

$$M = P_{D_0} \cup \{f(x_1, \dots, x_n)\}, \quad \langle 1 \rangle \in A[M],$$

и пусть для любого 0-полного $A \subset E_2^{s(f)}$ верно, что $I_f(A) \setminus A \neq \emptyset$. Тогда $[M]$ содержит тождественную единицу.

Доказательство. Рассмотрим $A(0) = \{0^{s(f)}\}$. Ясно, что $A(0)$ 0-полно и $\tilde{\alpha}_0 \langle \tilde{\alpha} \rangle \in [M]$ для любых $\tilde{\alpha}_0 \in E_2^T$, $\tilde{\alpha} \in A(0)$. Тогда по лемме 12 получаем, что существует некоторое 0-полное $A(1) \supset A(0)$, обладающее такими же свойствами. Другими словами, можно построить цепочку вложений $A(0) \subset A(1) \subset A(2) \subset \dots$ такую, что все множества 0-полны и $\tilde{\alpha}_0 \langle \tilde{\alpha} \rangle \in [M]$ для любых $\tilde{\alpha}_0 \in E_2^T$, $\tilde{\alpha} \in A(k)$, $k \geq 0$. Поскольку всевозможных подмножеств множества $E_2^{s(f)}$ конечное число, на некотором шаге приходим к $A(i) = E_2^{s(f)}$. Отсюда и будет следовать, что $\langle 1 \rangle \in [M]$.

Таким образом, теорема 5 полностью доказана.

Доказательство теоремы 5 легко переносится на более общий случай, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть класс Поста D содержит константу 0, но не содержит 1. Пусть

$$M = P_D \cup \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Тогда M содержит тождественную единицу если и только если $\langle 1 \rangle \in A[M]$ и для любого 0-полного $A \subset E_2^{s^M}$ существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $I_{f_i}(A) \setminus A \neq \emptyset$.

Из теорем 4 и 6 следует справедливость теоремы 1. Действительно, с помощью теоремы 6 можно проверить, существуют ли в замыкании системы обе тождественные константы. Если существуют, то дальнейшая проверка полноты осуществляется с помощью теоремы 4.

Автор выражает благодарность профессору С. В. Алешину и профессору В. А. Буевичу за ценные замечания, возникшие при обсуждении данной работы, а также академику РАН, профессору В. Б. Кудрявцеву за внимание к работе.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
2. Кудрявцев В. Б., О мощности множеств предполных множеств некоторой функциональной системы, связанной с автоматами. *Проблемы кибернетики* (1965) **13**, 45–74.
3. Родин А. А., О континуальности множества специальных предполных классов во множестве автоматных отображений. *Интеллектуальные системы* (2012) **16**, 329–334.
4. Alešin S. V., Über ein Vollständigkeitskriterium für Superpositionen von Automatenabbildungen. *Rostocker Math. Kolloq.* (1977) **3**, 119–132.
5. Буевич В. А., *Условия A-полноты для конечных автоматов*, 1–2. Издательство МГУ, Москва, 1986, 1987.
6. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.

Статья поступила 18.02.2013.