Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ивченко, В. А. Миронова, Некоторые вопросы спектрального анализа случайных булевых функций с ограничениями, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 1, 90–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 11:52:18

Некоторые вопросы спектрального анализа случайных булевых функций с ограничениями

© 2013 г. Г. И. Ивченко, В. А. Миронова

Исследуются свойства спектра Уолша булевых функций от n переменных, случайно выбираемых из некоторых подмножеств всех таких функций. Выводятся соответствующие характеристические функции спектра и находятся точные и асимптотические (при $n \rightarrow \infty$) распределения различных его характеристик.

1. Введение

Пусть

$$V_n = \{v_0, v_1, \dots, v_{2^n-1}\}$$

есть n -мерное векторное пространство над полем из двух элементов, векторы которого упорядочены по возрастанию соответствующих им чисел, где $v_i = (v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{ni})$ отвечает двоичному представлению числа $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$:

$$i = v_{1i}2^{n-1} + v_{2i}2^{n-2} + \dots + v_{n-1,i}2 + v_{ni}.$$

Пусть, далее, $f: V_n \rightarrow \{0, 1\}$ есть булева функция от n переменных и $F_n = \{f\}$ — множество всех таких функций. Любую булеву функцию, как хорошо известно, можно представить в виде вектора

$$f_n = (f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_{2^n-1})) \equiv (f_{n0}, f_{n1}, \dots, f_{n,2^n-1}), \quad (1)$$

называемого ее таблицей истинности [1].

Целочисленная функция $w_f: V_n \rightarrow \mathbf{R}$, определяемая соотношением

$$w_f(u) = \sum_{x \in V_n} f(x)(-1)^{(u,x)}, \quad u \in V_n, \quad (2)$$

называется преобразованием Уолша булевой функции f ; величина $w_{ni} = w_f(v_i)$ называется спектральным коэффициентом функции f , отвечающим вектору v_i , а совокупность всех этих величин — вектор

$$w_n = (w_{n0}, w_{n1}, \dots, w_{n,2^n-1}) \quad (3)$$

называется спектром Уолша, или просто спектром функции f .

Напомним также, что символ $\|f\|$ обозначает вес функции f (число единичных компонент вектора (1)), и скалярное произведение векторов $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ из V_n вычисляется по формуле

$$(a, b) = a_1 b_1 \oplus \dots \oplus a_n b_n,$$

где $\oplus$ — знак сложения по модулю 2.

Известно, что функция f однозначно определяется своим спектром по формуле обращения:

$$f(x) = 2^{-n} \sum_{u \in V_n} w_f(u) (-1)^{(u, x)}, \quad x \in V_n. \quad (4)$$

Далее, введем матрицы

$$H_0 = (1),$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

и вообще,

$$H_k = \begin{pmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & -H_{k-1} \end{pmatrix} = H_1 \otimes H_{k-1}, \quad k \geq 2, \quad (5)$$

где $\otimes$ означает кронекеровское произведение.

Матрицы такого вида называются матрицами Сильвестра–Адамара [1, с. 396]. Отметим некоторые их свойства, необходимые нам в дальнейшем. Они симметричны:

$$H'_n = H_n;$$

удовлетворяют условию ортогональности

$$H_n H_n = 2^n I_{2^n},$$

где I_r есть единичная матрица порядка r , откуда следует, что

$$H_n^{-1} = 2^{-n} H_n;$$

наконец, имеют место представления

$$H_n = ((-1)^{(v_i, v_j)}) = (l'_0, l'_1, \dots, l'_{2^n-1}), \quad (6)$$

где вектор-строка

$$l_j = ((-1)^{(v_j, v_0)}, (-1)^{(v_j, v_1)}, \dots, (-1)^{(v_j, v_{2^n-1})})$$

есть $(+1, -1)$ последовательность для линейной функции

$$l_j(x) = (v_j, x), \quad x \in V_n;$$

при этом

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{(v_j, v_i)} = \begin{cases} 2^n, & i = 0, \\ 0, & i > 0; \end{cases} \quad (7)$$

в строках и столбцах матрицы H_n , за исключением первых строки и столбца, одинаковое число 1 и -1 .

В терминах матриц Сильвестра–Адамара, преобразование Уолша (2) и формула обращения (4) могут быть записаны в виде

$$w_n = f_n H_n, \quad f_n = 2^{-n} w_n H_n. \quad (8)$$

Булевы функции широко используются в задачах защиты информации, и потому они являются популярным объектом математического и криптографического анализа. Соответствующая литература огромна и она достаточно полно отражена в обзорах [2, 3]. Объект нашего интереса — спектр (3) булевой функции: многие криптографические свойства булевой функции выражаются именно в терминах ее спектральных характеристик. В последние годы для исследования спектра (3) весьма эффективно применяется вероятностный подход (см. [4–6] и библиографию в них), когда на множестве $F_n = \{f\}$ вводится та или иная вероятностная мера, приписывающая каждой функции этого множества соответствующий вес. Тогда спектр случайно выбранной функции становится случайным вектором, и для исследования различных его особенностей “в среднем” успешно применяются методы теории вероятностей, и в особенности ее предельные теоремы, позволяющие устанавливать полезные асимптотические (при $n \rightarrow \infty$) оценки для различных характеристик спектра.

Такой подход позволяет анализировать и ситуации, когда класс используемых булевых функций представляет собой то или иное подмножество множества F_n , например, подмножество

$$F_{nk} = \{f \in F_n : \|f\| = k\}$$

функций заданного веса k , $0 < k < 2^n$.

Для исследования спектральных свойств функций с таким ограничением естественно вводить вероятностную меру, сосредоточенную лишь на классе F_{nk} , например, равномерную, приписывающую каждой функции этого класса вес

$$|F_{nk}|^{-1} = \binom{2^n}{k}^{-1},$$

— такую модель мы будем называть кратко моделью F_{nk} .

Другой, важный для приложений пример, представляют симметрические булевы функции, иными словами, такие функции, которые принимают одно и то же значение на всех булевых векторах одинакового веса. Обзор общих свойств таких функций, накопленных результатов по их анализу, а также их криптографических применений имеется в [3, 8, 9]. Представляет интерес рассмотреть аналогичные вопросы и для подмножеств симметрических функций с ограничениями, подобными описанным выше.

Настоящая работа и посвящена анализу двух таких моделей с ограничениями. Для каждой модели выводится характеристическая функция спектра Уолша случайной булевой функции, и находятся точные и асимптотические (при $n \rightarrow \infty$) распределения различных его характеристик.

2. Модель F_{nk}

2.1. Характеристическая функция спектра случайной булевой функции

Общая конструкция вероятностной модели для булевых функций, предложенная в [5], имеет следующий вид.

Зададим на множестве $F_n = \{f\}$ вероятностную меру, приписывающую каждой функции этого множества вес $\mathbf{P}(f)$, и пусть

$$\varphi_n(t) = \mathbf{E} e^{itf'_n}, \quad t = t(t_0, t_1, \dots, t_{2^n-1}),$$

есть соответствующая характеристическая функция (вектор f_n определен в (1)):

$$\varphi_n(t) = \sum_{f \in F_n} e^{itf'_n} \mathbf{P}(f). \quad (9)$$

Тогда характеристическая функция случайного спектра w_n (см. (3)) есть

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) &= \mathbf{E} e^{itw'_n} = \mathbf{E} \exp\{i(tH_n)f'_n\} \\ &= \varphi_n(tH_n) = \varphi_n(tl'_0, tl'_1, \dots, tl'_{2^n-1}). \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношениями (9) и (10) и задается общая конструкция вероятностной модели на множестве всех булевых функций $F_n = \{f\}$, позволяющая, в принципе, проводить анализ спектра w_n для различных конкретных вариантов задания меры $\mathbf{P}(f)$. В [5] рассмотрен и детально проанализирован вариант, когда компоненты вектора f_n являются независимыми и одинаково распределенными бернуллиевскими случайными величинами с произвольным параметром. Здесь мы рассматриваем определенную во введении модель F_{nk} , когда мера $\mathbf{P}(f)$ сосредоточена на подмножестве булевых функций $F_{nk} = \{f \in F_n: \|f\| = k\}$ и она равномерная:

$$\mathbf{P}(f) = |F_{nk}|^{-1} = \binom{2^n}{k}^{-1}, \quad f \in F_{nk}. \quad (11)$$

Для этого случая характеристическая функция $\varphi_n(t) = \varphi_{nk}(t)$ принимает вид

$$\varphi_{nk}(t) = \sum_{f \in F_{nk}} e^{itf'_n} \mathbf{P}(f) = \binom{2^n}{k}^{-1} \sum_{0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq 2^n-1} e^{i(t_{j_1} + t_{j_2} + \dots + t_{j_k})}. \quad (12)$$

Здесь многомерная сумма может быть записана как коэффициент при z^k произведения $\prod_{j=0}^{2^n-1} (1 + ze^{itj})$, поэтому, используя оператор $[z^k] = \text{coef}_{z^k}$, получаем, что

$$\varphi_{nk}(t) = \binom{2^n}{k}^{-1} [z^k] \prod_{j=0}^{2^n-1} (1 + ze^{itj}). \quad (13)$$

Наконец, для характеристической функции $\Phi_n(t) = \Phi_{nk}(t)$ спектра такой случайной булевой функции, выбираемой с равной вероятностью из множества F_{nk} , из (10) имеет место представление

$$\Phi_{nk}(t) = \binom{2^n}{k}^{-1} [z^k] \prod_{j=0}^{2^n-1} (1 + ze^{itl'_j}), \quad (14)$$

где векторы l_j определены в (6).

Это представление является основой для анализа распределений различных характеристик спектра, чему посвящены следующие разделы.

2.2. Моменты спектра

Мы начинаем анализ модели F_{nk} с нахождения моментов спектра w_n (см. (3)). Это может быть сделано прямыми вычислениями.

Прежде всего, найдем первые и вторые моменты вектора f_n , определенного в (1).

Из (11) получаем, что для любого j

$$\mathbf{E} f_{nj} = \mathbf{P}(f_{nj} = 1) = \binom{2^n - 1}{k - 1} / \binom{2^n}{k} = \frac{k}{2^n}, \quad (15)$$

и при $j \neq s$

$$\mathbf{E} f_{nj} f_{ns} = \mathbf{P}(f_{nj} = f_{ns} = 1) = \binom{2^n - 2}{k - 2} / \binom{2^n}{k} = \frac{k(k - 1)}{2^n(2^n - 1)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{D} f_{nj} &= \mathbf{E} f_{nj} - (\mathbf{E} f_{nj})^2 = \frac{k(2^n - k)}{2^{2n}}, \\ \text{cov}(f_{nj}, f_{ns}) &= \mathbf{E} f_{nj} f_{ns} - \mathbf{E} f_{nj} \mathbf{E} f_{ns} = -\frac{k(2^n - k)}{2^{2n}(2^n - 1)}, \quad j \neq s. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим

$$c_{nk} = \frac{k(2^n - k)}{2^{2n}}, \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \quad (17)$$

и введем матрицу

$$B_n = (1 + a_n)I_{2^n} - a_n E_{2^n}, \quad (18)$$

где, напомним, I_r — единичная матрица порядка r , а E_r — матрица порядка r , все элементы которой равны 1.

Суммируя результаты (15)–(16), можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. В модели F_{nk} первые и вторые моменты случайной булевой функции имеют вид

$$\mathbf{E} f_n = \frac{k}{2^n} l_0, \quad \mathbf{D} f_n = c_{nk} B_n, \quad (19)$$

где вектор $l_0 = (1, \dots, 1)$, см. (5), а матрица B_n определена в (18).

Аналогичное утверждение для спектра w_n имеет следующий вид.

Теорема 2. В модели F_{nk} первые и вторые моменты спектра случайной булевой функции равны:

$$\mathbf{E}w_n = (k, 0, \dots, 0), \quad (20)$$

$$\mathbf{D}w_n = \frac{k(2^n - k)}{2^n - 1} I_{2^n}^{(0)}, \quad (21)$$

где $I_r^{(0)}$ означает единичную матрицу, у которой первый диагональный элемент заменен на 0.

Доказательство. Поскольку спектр w_n есть линейное преобразование (8) вектора f_n , то

$$\mathbf{E}w_n = (\mathbf{E}f_n)H_n, \quad \mathbf{D}w_n = H_n(\mathbf{D}f_n)H_n \quad (22)$$

(здесь учтено свойство симметричности матрицы H_n).

Формула (20) сразу следует из (19) и свойства ортогональности матрицы H_n .

Вычислим теперь матрицу (см. (18))

$$H_n B_n H_n = (1 + a_n)H_n H_n - a_n H_n E_{2^n} H_n. \quad (23)$$

Здесь, напомним,

$$H_n H_n = 2^n I_{2^n},$$

и непосредственно проверяется, что произведение $H_n E_{2^n} H_n$ есть матрица $2^{2^n} C_n$ где, в свою очередь, C_n есть матрица, у которой лишь первый диагональный элемент равен 1, а все остальные элементы равны 0. С учетом этого, формула (23) принимает вид

$$\begin{aligned} H_n B_n H_n &= (1 + a_n)2^n I_{2^n} - 2^{2^n} a_n C_n \\ &= \frac{2^{2^n}}{2^n - 1} (I_{2^n} - C_n). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом соотношений (22), (19) и (17), следует формула для дисперсии (21). Теорема доказана.

Добавим некоторые комментарии к полученному результату.

То, что первая компонента вектора w_n имеет вырожденное в точке k распределение, конечно же, сразу следует из определения (2):

$$w_{n0} = w_f(0) = \sum_{x \in V_n} f(x) = \|f\| = k, \quad f \in F_{nk}.$$

Что касается остальных компонент спектра, то они в рассматриваемой модели оказываются центрированными в нуле, некоррелированными и имеющими одинаковые дисперсии. При этом дисперсия

$$\mathbf{D}w_{nj} = \frac{k(2^n - k)}{2^n - 1}, \quad j \geq 1,$$

как функция параметра k , достигает своего максимального значения $2^{2(n-1)}/(2^n - 1)$ при $k = 2^{n-1}$; функции с таким весом называются сбалансированными.

2.3. Распределения спектральных коэффициентов

Перейдем теперь к вопросу о распределениях спектральных характеристик в модели F_{nk} и прежде всего найдем распределение отдельных компонент вектора w_n . Мы уже знаем, что первая компонента w_{n0} имеет вырожденное в точке k распределение. Для характеристической функции любого другого спектрального коэффициента w_{ns} , $s \geq 1$, из общей характеристической функции (14) приходим к представлению

$$\mathbf{E}e^{it_s w_{ns}} = \Phi_{nk}(t)|_{t_j=0, j \neq s} = \binom{2^n}{k}^{-1} [z^k] \prod_{j=0}^{2^n-1} (1 + ze^{it_s l_j(s)}),$$

где $l_j(s)$ — s -я компонента вектора l_j .

Но, в силу (7), при $s \geq 1$ среди чисел $l_j(s)$, $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, половина 1 и половина -1 , поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{it_s w_{ns}} &= \binom{2^n}{k}^{-1} [z^k] (1 + ze^{it_s})^{2^{n-1}} (1 + ze^{-it_s})^{2^{n-1}} \\ &= \binom{2^n}{k}^{-1} \sum_{r=0}^k \binom{2^{n-1}}{r} \binom{2^{n-1}}{k-r} e^{i(2r-k)t_s} \\ &= \sum_{r=0}^k h(r; 2^{n-1}, 2^{n-1}, k) e^{i(2r-k)t_s}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $H(2^{n-1}, 2^{n-1}, k) = \{h(r; 2^{n-1}, 2^{n-1}, k), r = 0, 1, \dots, k\}$ — гипергеометрическое распределение с параметрами $(2^{n-1}, 2^{n-1}, k)$.

Представление (24) дает вид одномерных распределений спектральных коэффициентов, что мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3. В модели F_{nk} случайная величина $\tilde{w}_{ns} = \frac{1}{2}(w_{ns} + k)$ при всех $s = 1, \dots, 2^n - 1$ имеет гипергеометрическое распределение $H(2^{n-1}, 2^{n-1}, k)$.

Таким образом, в рассматриваемой модели все спектральные коэффициенты, за исключением первого, имеют сдвинутое на величину k симметричное относительно нуля гипергеометрическое распределение на решетке целых чисел одинаковой четности с числом k :

$$\mathbf{P}(w_{ns} + k = 2r) = h(r; 2^{n-1}, 2^{n-1}, k), \quad r = 0, 1, \dots, k. \quad (25)$$

2.3.1. О моментах

В дополнение к теореме 2 отметим, что все нечетные моменты случайных величин w_{ns} , $s \geq 1$, равны нулю, а их четные моменты можно находить, используя известные соотношения для факториальных моментов гипергеометрического распределения:

$$\mathbf{E}(\tilde{w}_{ns})_j = (k)_j (2^{n-1})_j / (2^n)_j, \quad j \geq 1, \quad (26)$$

где

$$(a)_j = a(a-1)(a-2) \cdots (a-j+1).$$

2.3.2. Сходимость к биномиальному распределению

Используя известные асимптотики для гипергеометрического распределения, можно легко установить соответствующие предельные теоремы для спектральных коэффициентов.

Теорема 4. Пусть $n \rightarrow \infty$, а параметр k фиксирован. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{D}w_{ns} &= k + O(2^{-n}), & s \geq 1, \\ \mathbf{P}(w_{ns} + k = 2r) &= \binom{k}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 + \frac{b}{2^n} + O(2^{-2n})\right), & 0 \leq r \leq k, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$b = \frac{r}{2} - 2 \left(r - \frac{k}{2}\right)^2.$$

В силу симметрии распределения случайных величин w_{ns} , $s \geq 1$, сходимость к биномиальному распределению будет иметь место и в случае очень больших k , именно, когда $2^n - k$ конечно.

2.3.3. Сходимость к нормальному распределению

Имеет место следующая локальная предельная теорема.

Теорема 5. Пусть $n, k, 2^n - k \rightarrow \infty$, тогда

$$\mathbf{P}\left(\frac{w_{ns}}{\sqrt{k(1-k)2^{-n}}} = m\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-m^2/2}, \quad |m| \leq c < \infty. \quad (28)$$

На этом же пути можно получить и двумерные распределения, хотя это потребует уже больших усилий.

Рассмотрим две произвольные компоненты спектра (w_{nr}, w_{ns}) , $1 \leq r < s \leq 2^n - 1$, тогда их совместная характеристическая функция получается из (14) при подстановке $t_j = 0$, $j \neq r, s$, и имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{nk}(t_r, t_s) &= \mathbf{E} e^{i(t_r w_{nr} + t_s w_{ns})} \\ &= \binom{2^n}{k}^{-1} [z^k] \prod_{j=0}^{2^n-1} (1 + z e^{i(t_r l_j(r) + t_s l_j(s))}). \end{aligned} \quad (29)$$

В силу свойства ортогональности матриц Сильвестра–Адамара, среди пар $(l_j(r), l_j(s))$, $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, каждая комбинация $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ и $(-1, -1)$ встречается одинаковое число раз, равное 2^{n-2} , поэтому произведение в (29) принимает вид $\prod_{\beta_1, \beta_2 = \pm 1} (1 + z e^{i(\beta_1 t_r + \beta_2 t_s)})^{2^{n-2}}$. Раскладывая здесь каждый из четырех сомножителей по степеням z и выделяя, в соответствии с (29), коэффициент при z^k , получим представление

$$\psi_{nk}(t_r, t_s) = \binom{2^n}{k}^{-1} \sum_{m_1 + \dots + m_4 = k} \prod_{j=1}^4 \binom{2^{n-2}}{m_j} e^{it_r(m_1 + m_2 - m_3 - m_4) + it_s(m_1 - m_2 + m_3 - m_4)},$$

которое, в свою очередь, заменой $m_1 + m_2 - m_3 - m_4 = u$, $m_1 - m_2 + m_3 - m_4 = v$ приводится к виду

$$\psi_{nk}(t_r, t_s) = \binom{2^n}{k}^{-1} \sum_{m,u,v} \binom{2^n - 2}{m} \times \binom{2^{n-2}}{m - (u+v)/2} \binom{2^n - 2}{(k+u)/2 - m} \binom{2^n - 2}{(k+v)/2 - m} e^{it_r u + it_s v}. \quad (30)$$

Это и есть окончательное выражение для совместной характеристической функции пары спектральных коэффициентов, дающее одновременно и явный вид распределения этой пары, поскольку

$$\psi_{nk}(t_r, t_s) = \sum_{u,v} \mathbf{P}(w_{nr} = u, w_{ns} = v) e^{i(t_r u + t_s v)}.$$

Соответствующее утверждение о виде этого распределения формулируется следующим образом.

Теорема 6. В модели F_{nk} для любых (r, s) , $1 \leq r < s \leq 2^n - 1$, справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(w_{nr} = u, w_{ns} = v) = \binom{2^n}{k}^{-1} \sum_m \binom{2^n - 2}{m} \times \binom{2^{n-2}}{m - (u+v)/2} \binom{2^n - 2}{(k+u)/2 - m} \binom{2^n - 2}{(k+v)/2 - m}. \quad (31)$$

Отметим некоторые свойства этого распределения.

- (1) Вероятности (31) отличны от нуля лишь для значений u и v , одинаковой четности с числом k .
- (2) Вероятности (31) не меняются при изменении знаков у переменных u и v (свойство симметрии).
- (3) Используя формулы для гипергеометрического распределения (см. (24)), распределение (31) можно записать также в виде

$$\mathbf{P}(w_{nr} + k = 2i, w_{ns} + k = 2j) = h(j; 2^{n-1}, 2^{n-1}, k) \times \sum_{m=0}^c h(m; 2^{n-2}, 2^{n-2}, j) h(i - m; 2^{n-2}, 2^{n-2}, k - j), \quad (32)$$

где $c = \min(i, j, i + j - k)$.

2.4. Линейные функционалы от спектра

Простейшими функционалами от спектра w_n являются линейные комбинации спектральных коэффициентов

$$L_{nk}(c) = c w'_n = \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j w_{nj}, \quad c = (c_0, c_1, \dots, c_{2^n-1}). \quad (33)$$

Характеристическая функция произвольного линейного функционала допускает представление (см. (14))

$$\mathbf{E}e^{i\tau L_{nk}(c)} = \mathbf{E}e^{i\tau c w'_n} = \Phi_{nk}(\tau c) = \binom{2^n}{k}^{-1} [z^k] \prod_{j=0}^{2^n-1} (1 + ze^{i\tau c l'_j}). \quad (34)$$

Эта, вообще говоря, весьма сложная формула значительно упрощается при выборе коэффициентов c в виде $c = l_r$, $r = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, поскольку, в силу ортогональности матриц Сильвестра–Адамара,

$$l_r l'_j = \begin{cases} 2^n, & r = j, \\ 0, & r \neq j. \end{cases}$$

Таким образом, из (34) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{i\tau L_{nk}(l_r)} &= \binom{2^n}{k}^{-1} [z^k] (1 + ze^{i\tau 2^n})(1 + z)^{2^n-1} \\ &= \binom{2^n}{k}^{-1} \left(\binom{2^n-1}{k} + \binom{2^n-1}{k-1} e^{i\tau 2^n} \right) \\ &= \left(1 - \frac{k}{2^n} \right) + \frac{k}{2^n} e^{i\tau 2^n}. \end{aligned} \quad (35)$$

В итоге мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 7. В модели F_{nk} для любого r , $0 \leq r \leq 2^n - 1$, линейный функционал

$$L_{nk}(l_r) = 1_r w'_n$$

имеет двухточечное распределение вида

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(L_{nk}(l_r) = 0) &= 1 - \frac{k}{2^n}, \\ \mathbf{P}(L_{nk}(l_r) = 2^n) &= \frac{k}{2^n}; \end{aligned} \quad (36)$$

при этом

$$\begin{aligned} \mathbf{E}L_{nk}(l_r) &= k, \\ \mathbf{D}L_{nk}(l_r) &= k(2^n - k). \end{aligned}$$

Добавим к этому результату некоторые комментарии. Двухточечность распределений рассматриваемых функционалов непосредственно следует из представления (8), так как всегда

$$L'_n \equiv (L_{nk}(l_0), \dots, L_{nk}(l_{2^n-1}))' = H_n w'_n = H_n H'_n f'_n = 2^n f'_n, \quad (37)$$

другими словами, сумма $l_r w'_n$ всегда принимает лишь значения 0 и 2^n , а соответствующие вероятности уже зависят от выбора модели. В целом же, распределение вектора $2^{-n} L_n$, определенного в (37), всегда совпадает с распределением вектора (таблицы истинности) f_n .

Выделим еще частный случай для суммы всех спектральных коэффициентов

$$L_{nk}(l_0) = \sum_{j=0}^{2^n-1} w_{nj}.$$

Для рассматриваемой модели F_{nk} в этой сумме первое слагаемое w_{n0} не случайно и равно k ; таким образом, сумма остальных слагаемых имеет двухточечное распределение

$$\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{2^n-1} w_{nj} = 2^n - k\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{2^n-1} w_{nj} = -k\right) = \frac{k}{2^n}. \quad (38)$$

Наконец, для случая сбалансированных функций (при $k = 2^{n-1}$) теорема 7 принимает следующий вид: случайные величины $2^{-n} L_{n,2^{n-1}}(l_r)$ имеют одно и то же распределение Бернулли $Bi(1, 1/2)$.

Еще один тип линейных функционалов, распределения которых могут быть точно описаны, представляет собой частичные суммы

$$S_{nk}(r) = \sum_{j=0}^{2^r-1} w_{nj}, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (39)$$

Теорема 8. В модели F_{nk} случайные величины $2^{-r} S_{nk}(r)$ имеют гипергеометрическое распределение $H(2^{n-r}, 2^n - 2^{n-r}, k)$:

$$\mathbf{P}(2^{-r} S_{nk}(r) = j) = h(j; 2^{n-r}, 2^n - 2^{n-r}, k), \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (40)$$

Доказательство. В силу рекуррентного свойства (5) матриц Сильвестра–Адамара, в матрице H_n ее первые 2^r строк представляют собой последовательные повторения блока H_r , и число таких повторений равно 2^{n-r} . Поэтому, обозначив через $l_j(r)$, $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, строки матрицы H_r , из (34) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{i\tau S_{nk}(r)} &= \mathbf{E} e^{i\tau l_0(r) w'_n} = \binom{2^n}{k}^{-1} [z^k] \prod_{j=0}^{2^r-1} (1 + z e^{i\tau l_0(r) l'_j(r)})^{2^{n-r}} \\ &= \binom{2^n}{k}^{-1} [z^k] [(1 + z e^{i\tau 2^r})(1 + z)^{2^r-1}]^{2^{n-r}} \\ &= \binom{2^n}{k}^{-1} \sum_{j=0}^k \binom{2^{n-r}}{j} \binom{2^n - 2^{n-r}}{k-j} e^{ij\tau 2^r}, \end{aligned}$$

что эквивалентно (40).

Отметим, что здесь экстремальные случаи $r = 1$ и $r = n$ соответствуют утверждениям предыдущих теорем 3 и 7.

2.5. Нулевые компоненты спектра

Важной для приложений является такая характеристика спектра, как число его нулевых компонент:

$$\mu_0(n, k) = \sum_{j=0}^{2^n-1} I(w_{nj} = 0), \quad (41)$$

здесь $I(A)$ означает индикатор события A .

Из формулы (25) следует, что в рассматриваемой модели спектральные коэффициенты w_{nj} при $j \geq 1$ могут принимать нулевые значения лишь при четных k (напомним, что всегда $w_{n0} = k$, и здесь предполагается, что $k > 0$). Поэтому далее считаем, что k четно. Исследование функционала (41) представляет уже гораздо более сложную задачу, и мы ограничимся здесь лишь отысканием его среднего и дисперсии (более полный анализ его распределения ждет своего решения).

С учетом (25), среднее находится просто:

$$\mathbf{E}\mu_0(n, k) = (2^n - 1)\mathbf{P}(w_{n1} = 0) = (2^n - 1)h\left(\frac{k}{2}; 2^{n-1}, 2^{n-1}, k\right). \quad (42)$$

Можно показать (рутинные выкладки опускаем), что как функция параметра k это среднее достигает своего минимального значения при $k = 2^{n-1}$, то есть для сбалансированных функций. При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0(n, 2^{n-1}) &= (2^n - 1)h(2^{n-2}; 2^{n-1}, 2^{n-1}, 2^{n-1}) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{(n+3)/2} \end{aligned} \quad (43)$$

(асимптотика справедлива при больших значениях n). Таким образом, для сбалансированных функций число нулевых компонент спектра имеет в среднем порядок квадратного корня из их общего числа 2^n .

Далее положим для краткости, $I_j = I(w_{nj} = 0)$. Тогда из (41) получаем, что

$$\mathbf{D}\mu_0(n, k) = \sum_{j=1}^{2^n-1} \mathbf{D}I_j + \sum_{r \neq s} \text{cov}(I_r, I_s).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{D}I_j &= \mathbf{P}(w_{n1} = 0)(1 - \mathbf{P}(w_{n1} = 0)) \\ &= h\left(\frac{k}{2}; 2^{n-1}, 2^{n-1}, k\right) \left(1 - h\left(\frac{k}{2}; 2^{n-1}, 2^{n-1}, k\right)\right) \equiv a_{nk}, \end{aligned}$$

и при $r \neq s$ (см. (32))

$$\begin{aligned} \text{cov}(I_r, I_s) &= \mathbf{P}(w_{nr} = 0, w_{ns} = 0) - \mathbf{P}(w_{nr} = 0)\mathbf{P}(w_{ns} = 0) \\ &= h\left(\frac{k}{2}; 2^{n-1}, 2^{n-1}, k\right) \\ &\quad \times \sum_m \left(h\left(m; 2^{n-2}, 2^{n-2}, \frac{k}{2}\right)\right)^2 - \left(h\left(\frac{k}{2}; 2^{n-1}, 2^{n-1}, k\right)\right)^2 \equiv b_{nk}. \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений, окончательное выражение для дисперсии принимает вид

$$\mathbf{D}\mu_0(n, k) = (2^n - 1)a_{nk} + (2^n - 1)(2^n - 2)b_{nk}. \quad (44)$$

3. Модель S_{nr}

3.1. Определение модели и многочлены Кравчука

Пусть S_n — множество симметрических булевых функций от n переменных $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_n = \{0, 1\}^n$, другими словами, таких функций, которые принимают одно и то же значение на всех векторах x одинакового веса

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Симметрические функции находят широкое применение в криптографической теории и практике, и их анализу посвящено значительное число работ (см. [3, 8, 9] и библиографию в них).

Обозначим $f(x) = f_k$, если $\|x\| = k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда, вместо таблицы истинности (вектора размерности 2^n), для симметрической функции f можно использовать более экономное ее представление через двоичный вектор $\tilde{f}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ размерности $n + 1$. Напомним кратко некоторые элементы спектральной теории таких функций.

Преобразование Уолша (2) произвольной симметрической функции f также является симметрической функцией и, обозначив $w_f(u) = w_m$, если $\|u\| = m$, спектральные коэффициенты w_m в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$w_m = \sum_{k=0}^n f_k P_k(m; n), \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (45)$$

где

$$P_k(m; n) = \sum_j (-1)^j \binom{m}{j} \binom{n-m}{k-j}$$

есть известные в анализе многочлены Кравчука [6].

Будем далее под спектром симметрической функции f понимать вектор

$$\bar{w}_n = (w_0, w_1, \dots, w_n). \quad (46)$$

Тогда с использованием матрицы Кравчука

$$P_n = (P_k(m; n))_{k,m=0,1,\dots,n}, \quad (47)$$

систему (45) можно записать в матричном виде:

$$\bar{w}_n = \tilde{f}_n P_n, \quad (48)$$

а формулу обращения — в виде

$$\tilde{f}_n = 2^{-n} \bar{w}_n P_n. \quad (49)$$

Из этих соотношений видно, что в рассматриваемой модели ключевую роль играют свойства многочленов Кравчука; эти свойства достаточно детально описаны в [6] и будут нами использованы по ходу изложения без дополнительных ссылок.

Далее, пусть на множестве S_n задана некоторая вероятностная мера $\mathbf{P}$, приписывающая каждому вектору $\tilde{f}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ вес $\mathbf{P}(\tilde{f}_n)$ и

$$\varphi_n(\bar{t}) = \mathbf{E} e^{i\bar{t}\tilde{f}_n'}, \quad \bar{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n), \quad (50)$$

есть соответствующая характеристическая функция. Тогда характеристическая функция спектра $\bar{w}_n$ с учетом (48) принимает вид

$$\begin{aligned}\Phi_n(\bar{t}) &= \mathbf{E} e^{i\bar{t}\bar{w}'_n} = \mathbf{E} e^{i(\bar{t}P'_n)\bar{f}'_n} = \varphi_n(\bar{t}P'_n) \\ &= \varphi_n\left(\sum_{m=0}^n t_m P_k(m; n), k = 0, 1, \dots, n\right).\end{aligned}\quad (51)$$

Это общее представление может быть основой для исследования случайного спектра симметрической булевой функции при различных конкретизациях вероятностной меры $\mathbf{P}$, и в качестве таковой здесь мы рассматриваем случай, когда мера $\mathbf{P}$ сосредоточена на подмножестве

$$S_{nr} = \{\bar{f}_n : \|\bar{f}_n\| = r\}$$

при некотором r , $0 < r < n$, и на этом подмножестве она равномерна:

$$\mathbf{P}(\bar{f}_n) = \binom{n+1}{r}^{-1}, \quad \bar{f}_n \in S_{nr}.$$

В этом случае мы будем говорить о случайной симметрической булевой функции ранга r , а саму модель будем кратко называть моделью S_{nr} . Для этого случая формула (50) принимает вид

$$\varphi_{nr}(\bar{t}) = \sum_{\bar{f}_n \in S_{nr}} e^{i\bar{t}\bar{f}'_n} \mathbf{P}(\bar{f}_n) = \binom{n+1}{r}^{-1} \sum_{0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n} e^{i(t_{j_1} + t_{j_2} + \dots + t_{j_r})}.$$

Здесь многомерная сумма может быть записана как коэффициент при z^r произведения $\prod_{j=0}^n (1 + ze^{it_j})$, поэтому окончательно получаем, что

$$\varphi_{nr}(\bar{t}) = \binom{n+1}{r}^{-1} g[z^r] \prod_{j=0}^n (1 + ze^{it_j}),$$

а (см. (51))

$$\Phi_{nr}(\bar{t}) = \binom{n+1}{r}^{-1} [z^r] \prod_{k=0}^n \left(1 + z \exp \left\{ i \sum_{m=0}^n t_m P_k(m; n) \right\}\right). \quad (52)$$

Представление (52) и является основой для дальнейшего анализа.

3.2. Моменты спектра

Общие формулы для первых и вторых моментов случайного спектра $\bar{w}_n = (w_0, \dots, w_n)$ в рассматриваемой модели следуют из представления (48):

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \bar{w}_n &= \mathbf{E} \bar{f}_n P_n, \\ \mathbf{D} \bar{w}_n &= (\text{cov}(w_l, w_m))_0^n = P'_n \mathbf{D} \bar{f}_n P_n.\end{aligned}\quad (53)$$

Здесь для любого j

$$\mathbf{E} f_j = \mathbf{P}(f_j = 1) = \binom{n}{r-1} / \binom{n+1}{r} = \frac{r}{n+1},$$

и при $j \neq s$

$$\mathbf{E} f_j f_s = \mathbf{P}(f_j = f_s = 1) = \binom{n-1}{r-2} / \binom{n+1}{r} = \frac{r(r-1)}{n(n+1)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{D} f_j &= \mathbf{E} f_j - (\mathbf{E} f_j)^2 = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2}, \\ \text{cov}(f_j, f_s) &= \mathbf{E} f_j f_s - \mathbf{E} f_j \mathbf{E} f_s = -\frac{r(n-r+1)}{n(n+1)^2}, \quad j \neq s. \end{aligned}$$

Обозначив

$$a_{nr} = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2},$$

дисперсионную матрицу случайного вектора $\bar{f}_n$ можно, следовательно, записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \bar{f}_n &= a_{nr} \left(I_{n+1} - \frac{1}{n} (E_{n+1} - I_{n+1}) \right) \\ &= a_{nr} \left(\frac{n+1}{n} I_{n+1} - \frac{1}{n} E_{n+1} \right) \equiv a_{nr} B_n, \end{aligned} \quad (54)$$

где, напомним, I_k есть единичная матрица порядка k , а E_k — матрица порядка k , все элементы которой равны 1.

Учитывая, что

$$P_k(0; n) = \binom{n}{k},$$

а при $m > 0$

$$\sum_k P_k(m; n) = 0,$$

находим средние значения спектра:

$$\mu_m(n) = \mathbf{E} w_m = \frac{r}{n+1} \sum_{k=0}^n P_k(m; n) = \frac{r}{n+1} \cdot \begin{cases} 2^n, & m = 0, \\ 0, & m > 0. \end{cases} \quad (55)$$

Далее, из (53) и (54) находим

$$\mathbf{D} \bar{w}_n = a_{nr} P'_n B_n P_n = a_{nr} \left(\frac{n+1}{n} P'_n P_n - \frac{1}{n} P'_n E_{n+1} P_n \right).$$

Здесь

$$P'_n P_n = \|\sigma_{lm}(n)\|,$$

где

$$\sigma_{lm}(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } l + m \text{ нечетно,} \\ (-1)^{m+(l+m)/2} \frac{2^{2n}}{\pi} B\left(\frac{l+m+1}{2}, n - \frac{l+m-1}{2}\right), & \text{если } l + m \text{ четно,} \end{cases} \quad (56)$$

и $B(a, b)$ — бета-функция:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Наконец, прямая проверка дает, что

$$P'_n E_{n+1} P_n = 2^{2n} C_{n+1},$$

где матрица C_{n+1} состоит из нулей, за исключением первого элемента, который равен 1. В итоге получаем следующее представление для дисперсионной матрицы спектра:

$$\mathbf{D} \bar{w}_n = a_{nr} \left(\frac{n+1}{n} \|\sigma_{lm}(n)\| - \frac{2^{2n}}{n} C_{n+1} \right). \quad (57)$$

Подведем итог в виде следующего утверждения.

Теорема 9. В модели S_{nr} элементы спектра $\bar{w}_n = (w_0, w_1, \dots, w_n)$ имеют нулевые средние значения, за исключением элемента w_0 , см. (55), элементы с номерами разной четности некоррелированы, см. (56), а для дисперсий справедливы представления

$$d_m^2(n) = \mathbf{D} w_m = a_{nr} \cdot \begin{cases} \frac{n+1}{n} \sigma_0^2(n) - \frac{2^{2n}}{n}, & m = 0, \\ \frac{n+1}{n} \sigma_m^2(n), & m > 0, \end{cases} \quad (58)$$

где

$$\sigma_m^2(n) = \frac{2^{2n}}{\pi} B\left(m + \frac{1}{2}, n - m + \frac{1}{2}\right), \quad (59)$$

при этом $\sigma_{n-m}^2(n) = \sigma_m^2(n)$.

Подчеркнем, что зависимость дисперсий от параметра r проявляется лишь через коэффициент

$$a_{nr} = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2}.$$

В дальнейшем мы будем проводить асимптотический анализ модели S_{nr} в следующих условиях:

$$n \rightarrow \infty, \quad r = r(n) \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha = r/n < 1. \quad (60)$$

Используя асимптотическую формулу Стирлинга для гамма-функции

$$\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}, \quad x \rightarrow \infty,$$

из (58)–(59) получаем, что в условиях (60) при фиксированном m

$$d_m^2(n) \sim \frac{\alpha(1-\alpha)}{\pi} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{2^{2n}}{n^{m+1/2}}, \quad (61)$$

и

$$d_m^2(n) \sim \alpha(1-\alpha) \sqrt{\frac{2}{\pi n}} 2^{2n} m^m (n-m)^{n-m} n^{-n},$$

если $n, m, n-m \rightarrow \infty$.

Отметим также следующие свойства дисперсий, являющиеся прямым следствием известных свойств бета-функции (см. (59)):

- (1) симметрия: $d_m^2(n) = d_{n-m}^2(n)$, $m > 0$,
- (2) монотонность: $d_m^2(n) > d_{m+1}^2(n)$, $0 \leq m \leq n/2 - 1$.

Далее, нетрудно убедиться в том, что с ростом m дисперсии весьма быстро убывают, достигая своего минимального значения, асимптотически равного $\alpha(1-\alpha)\sqrt{2/(\pi n)}2^n$, при $m = [n/2]$.

Рассмотрим, наконец, коэффициент корреляции

$$\rho_{lm}(n) = \frac{\text{cov}(w_l, w_m)}{\mathbf{D}w_l \mathbf{D}w_m}.$$

Из (56)–(59) имеем, что при $0 < l < m$ и четном $l+m$ (при нечетном $l+m$ коэффициент корреляции равен нулю)

$$\begin{aligned} \rho_{lm}(n) &= \frac{\sigma_{lm}(n)}{\sigma_l(n)\sigma_m(n)} \\ &= \frac{(-1)^{l+(l+m)/2} B\left(\frac{l+m+1}{2}, n - \frac{l+m-1}{2}\right)}{\sqrt{B\left(l + \frac{1}{2}, n - l + \frac{1}{2}\right) B\left(m + \frac{1}{2}, n - m + \frac{1}{2}\right)}}. \end{aligned}$$

Применение формулы Стирлинга дает при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном m

$$\begin{aligned} \lim \rho_{lm}(n) &= \rho_{lm} \\ &= (-1)^{l+(l+m)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{l+m+1}{2}\right)}{\sqrt{\Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}} \end{aligned} \quad (62)$$

(этот результат справедлив и при $l = 0$, так как (см. (58)) добавление $2^{2n}/n$ на асимптотику дисперсии $d_0^2(n)$ (см. (61)) влияния не оказывает). Если здесь, в свою очередь, и $m \rightarrow \infty$ (l остается фиксированным), то правая часть в (62) стремится к нулю, имея порядок $O(m^{1/2}2^{-m/2})$, то есть корреляция между спектральными коэффициентами w_l и w_m неограниченно уменьшается с увеличением расстояния $m-l$ между ними.

Рассмотрим, например, корреляцию между крайними симметричными коэффициентами w_l и w_{n-l} , $l \geq 0$, n четно. В силу свойства симметрии дисперсии (при $l = 0$ это свойство выполняется асимптотически при $n \rightarrow \infty$)

$$\rho_{l,n-l}(n) = (-1)^{l+n/2} \frac{B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)}{B\left(l + \frac{1}{2}, n-l + \frac{1}{2}\right)} = O\left(\frac{n^l}{2^n}\right),$$

так что этот коэффициент корреляции весьма быстро стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$ (этот результат понадобится нам в дальнейшем).

3.3. Распределения спектральных коэффициентов

Перейдем теперь к вопросу о распределениях спектральных характеристик в модели S_{nr} и, прежде всего, найдем распределение отдельных компонент вектора $\bar{w}_n$. Для характеристической функции произвольного спектрального коэффициента w_m , $m \geq 0$, из общей характеристической функции (52) получаем представление

$$\mathbf{E} e^{it_m w_m} = \Phi_{nr}(\bar{t})|_{t_j=0 \atop j \neq m} = \binom{n+1}{r}^{-1} [z^r] \prod_{k=0}^n (1 + z \exp\{it_m P_k(m; n)\}).$$

Отсюда можно записать явное выражение характеристической функции в виде

$$\mathbf{E} e^{it w_m} = \binom{n+1}{r}^{-1} \sum_{0 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} \exp\{it(P_{k_1}(m; n) + \dots + P_{k_r}(m; n))\},$$

из которого сразу следует, что случайная величина w_m имеет равномерное распределение на множестве $\{P_{k_1}(m; n) + P_{k_2}(m; n) + \dots + P_{k_r}(m; n), 0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n\}$. В частности, первый спектральный коэффициент w_0 принимает с одинаковыми вероятностями $\binom{n+1}{r}^{-1}$ все значения вида $\binom{n}{k_1} + \binom{n}{k_2} + \dots + \binom{n}{k_r}$, $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n$.

Аналогично можно выписать в явном виде и совместные (двумерные и т. д.) распределения спектральных коэффициентов, но они, очевидно, мало пригодны для практического использования. Более информативными в рассматриваемой модели являются соответствующие асимптотические распределения, к выводу которых мы и переходим. Итак, далее мы будем предполагать выполненными асимптотические условия (60).

Прежде всего, мы установим следующее ключевое свойство модели S_{nr} .

Лемма 1. В модели S_{nr} распределение вектора $\bar{f}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ совпадает с условным распределением независимых и одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ с произвольным параметром при условии, что их сумма равна r .

Доказательство. Действительно, распределение вектора $\bar{f}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ сосредоточено на множестве двоичных векторов веса r и оно равномерное. В свою очередь, если существует представление

$$\mathbf{P}(\xi_j = \varepsilon) = \alpha^\varepsilon (1 - \alpha)^{1-\varepsilon}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\xi_j = \varepsilon_j, j = 0, 1, \dots, n \mid \sum_j \xi_j = r\right) &= \frac{\mathbf{P}\left(\xi_j = \varepsilon_j, j = 0, 1, \dots, n, \sum_j \xi_j = r\right)}{\mathbf{P}\left(\sum_j \xi_j = r\right)} \\ &= \frac{\alpha^r (1 - \alpha)^{n+1-r}}{\binom{n+1}{r} \alpha^r (1 - \alpha)^{n+1-r}} = \binom{n+1}{r}^{-1}, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

Таким образом, компоненты вектора $\tilde{f}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ являются в нашей модели условно независимыми случайными величинами, а спектральные коэффициенты (см. (45)) представляют собой линейные разделимые статистики от них (см. [7]), асимптотическая теория которых хорошо разработана. Применение центральной предельной теоремы для разделимых статистик, которая справедлива при условии, что дисперсия статистики неограниченно возрастает — эти условия у нас выполняются, позволяет сформулировать следующий основной результат.

Теорема 10. Пусть выполняются условия (60). Тогда распределение произвольного спектрального коэффициента w_m , $m \geq 0$ — фиксировано, асимптотически нормально с параметрами $\mu_m(n)$, см. (55), и $d_m^2(n)$, см. (61).

Замечание 1. В силу свойства симметрии дисперсий $d_m^2(n)$ (для $m = 0$ это свойство выполняется асимптотически), такое же утверждение справедливо и для симметричного коэффициента w_{n-m} .

Замечание 2. Свойство асимптотической нормальности при сформулированных условиях имеет место и для произвольных конечномерных распределений спектральных коэффициентов в рассматриваемой модели. Отметим при этом следующую особенность этой модели: нормировки корней из дисперсий в соответствующей предельной нормальной теореме имеют разный порядок для разных спектральных коэффициентов. Именно, как следует из соотношения (61), при $n \rightarrow \infty$ и ограниченных значениях m дисперсии $d_m^2(n) = \mathbf{D}w_m$ весьма быстро убывают с увеличением m :

$$\frac{d_{m+1}(n)}{d_m(n)} = O(n^{-1/2}).$$

Отсюда следует, что спектральные коэффициенты весьма сильно “разделены”. Например, обозначив

$$w_m^* = \frac{w_m - \mu_m(n)}{d_m(n)}, \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

получаем (далее аргумент n для краткости опускаем):

$$\mathbf{P}(|w_{m+1} - \mu_{m+1}| < |w_m - \mu_m|) = \mathbf{P}\left(|w_{m+1}^*| < |w_m^*| \frac{d_m}{d_{m+1}}\right) \rightarrow 1.$$

В частности, это означает, что максимальными среди спектральных коэффициентов являются крайние из них.

Более детально эти важные для приложений вопросы мы обсудим ниже.

Будем под w_0 понимать далее центрированную величину $w_0 - 2^n r / (n + 1)$, остальные спектральные коэффициенты в нашем случае центрированы в нуле, и рассмотрим следующую характеристику спектра:

$$\Delta_m(n) = \frac{1}{d_m} \max_{m \leq k \leq n-m} |w_k|, \quad m \geq 0. \quad (63)$$

Как следует из теоремы 10 и замечания 2, в силу асимптотической некоррелированности, а следовательно, и асимптотической независимости крайних спектральных коэффициентов, при $n \rightarrow \infty$ и ограниченных значениях m предельное распределение величины

$$\delta_m(n) = \max(|w_m^*|, |w_{n-m}^*|) \quad (64)$$

существует и имеет вид

$$\mathbf{P}(\delta_m(n) < x) = \mathbf{P}(|w_m^*| < x, |w_{n-m}^*| < x) \rightarrow (2\Phi(x) - 1)^2, \quad x > 0, \quad (65)$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Такое же предельное распределение в этих условиях имеет и определенная в (63) характеристика. Чтобы установить это, достаточно показать, что величина

$$\Delta'_m(n) = \frac{1}{d_m} \max_{m+1 \leq k \leq n-m-1} |w_k|$$

стремится по вероятности к нулю. Используя неравенство Чебышева, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Delta'_m(n) > \varepsilon) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=m+1}^{n-m-1} \{|w_k| > \varepsilon d_m\}\right) \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n-m-1} \mathbf{P}(|w_k| > \varepsilon d_m) \leq \sum_{k=m+1}^{n-m-1} \frac{d_k^2}{\varepsilon^2 d_m^2}. \end{aligned} \quad (66)$$

Из (61) и свойства монотонности дисперсий следует, что

$$\frac{d_k^2}{d_m^2} = \begin{cases} O(n^{-1}) & \text{при } k = m+1 \text{ и } k = n-m-1, \\ O(n^{-2}) & \text{при } m+2 \leq k \leq n-m-2. \end{cases}$$

Поэтому вся сумма в правой части (66) есть величина $O(n^{-1})$, что и требовалось показать.

Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 11. При $n \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $m \geq 0$ в условиях (60) случайная величина (63) имеет предельную функцию распределения $(2\Phi(x) - 1)^2$, $x > 0$.

Замечание 3. Аналогичными рассуждениями можно также установить, что если рассмотреть характеристику

$$\Delta_{m,s}(n) = \frac{1}{d_{\min(m,s)}} \max_{m \leq k \leq n-s} |w_k|, \quad m \neq s, \quad (67)$$

то при любых фиксированных m и s она имеет предельную функцию распределения $2\Phi(x) - 1$, $x > 0$, такую же, как и случайная величина $|w_{\min(m,s)}^*|$.

Эти результаты позволяют заключить, что с вероятностью, стремящейся к 1, максимальными среди всех (либо части) спектральных коэффициентов являются крайние из них. Если же говорить более конкретно, то структура спектра $\bar{w}_n = (w_0, w_1, \dots, w_n)$ случайной симметрической булевой функции в модели $S_{n,r}$ и при выполнении условий (60) устроена асимптотически следующим образом.

Максимальным коэффициентом является w_0 : он принимает значения в окрестности точки $\alpha 2^n$, а размер этой окрестности имеет порядок $O(2^n/n^{1/4})$; все остальные коэффициенты принимают значения в окрестностях нуля, причем размеры соответствующих окрестностей резко различаются: для w_n разброс имеет порядок $O(2^n/n^{1/4})$, для w_1 и w_{n-1} — порядок $O(2^n/n^{3/4})$, для w_2 и w_{n-2} — порядок $O(2^n/n^{5/4})$, и т. д.

Список литературы

1. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. МЦНМО, Москва, 2004.
2. Логачев О. А., Сальников А. Л., Яценко В. В., *Булевы функции в теории кодирования и криптологии*. МЦНМО, Москва, 2004.
3. Cusick T. W., Stănică P., *Cryptographic Boolean functions and applications*. Elsevier, Amsterdam, 2009.
4. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Спектр случайной булевой функции и его производящая функция. *Математические вопросы криптографии* (2011) **2**, №2, 41–54.
5. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Стохастические булевы функции и их спектры. *Математические вопросы криптографии* (2012) **3**, №3, 21–34.
6. Сегё Г., *Ортогональные многочлены*. Физматлит, Москва, 1962.
7. Ивченко Г. И., Иванов В. А., Медведев Ю. И., Дискретные задачи в теории вероятностей. *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн., матем. статист., теор. киберн.* (1984) **22**, 3–60.
8. Canteaut A., Videau M., Symmetric Boolean functions. *IEEE Trans. Inform. Theory* (2005) **51**, 2791–2811.
9. Peng J., Wu Q., Kan H., On symmetric Boolean functions with high algebraic immunity on even number of variables. *IEEE Trans. Inform. Theory* (2011) **57**, 7205–7220.

Статья поступила 06.02.2013.