Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Давидов, О разрешимости эквациональной теории коммутативных медиальных n -арных группоидов, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 1, 121–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 03:48:54

О разрешимости эквациональной теории коммутативных медиальных n -арных группоидов

© 2013 г. С. С. Давидов

В работе доказывается разрешимость эквациональной теории коммутативных медиальных n -арных группоидов с помощью построения алгоритма, решающего вопрос о выполнимости тождества $u = v$ в многообразии коммутативных медиальных n -арных группоидов.

1. Введение

Развитие алгебраической теории n -арных систем началось с выхода работы В. Дёрнте [1] по n -арным группам, которая была выполнена под руководством Эмми Нётер. В 40-х годах XX века по n -арным группам появились две работы, которые сыграли основополагающую роль в дальнейшем развитии теории n -арных алгебраических систем — это капитальная работа Поста [2] и богатая идеями работа С. А. Чунихина [3].

Алгебраические n -арные системы находят применения в различных областях математики, они существенно используются в теории многозначных логик, кибернетике, общей теории систем [4, 5]. Изучению алгебраических систем с одной операцией n -арности, превосходящей два, посвящены многие исследования, например, [6–13].

В настоящей работе доказывается разрешимость эквациональной теории коммутативных медиальных n -арных группоидов с помощью построения алгоритма, решающего вопрос о выполнимости тождества $u = v$ в многообразии коммутативных медиальных n -арных группоидов.

Алгебра $(A; \Omega)$ называется медиальной (абелевой, энтропийной), если она удовлетворяет сверхтождеству медиальности

$$f(g(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, g(x_{m1}, \dots, x_{mn})) = g(f(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, f(x_{n1}, \dots, x_{nm})),$$

где $f, g \in \Omega$. Медиальные системы изучались разными авторами [14–19], они связаны с понятием энтропии в теории информации [19] и находят приложения в кибернетике, экономике, физике и биологии.

Мы будем обозначать n -арные операции, определенные на множестве Q , скобками $(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1^n) = b$ или $[a_1 a_2 \dots a_n] = [a_1^n] = b$, где $a_1, a_2, \dots, a_n \in Q$.

2. n -арные термы и полутермы

Зафиксируем n символов $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$, которые в дальнейшем рассматриваются как унарные символы операций. Свободный моноид над множеством $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ обозначим через E . Каждый элемент $e \in E$ может быть однозначно выражен в виде

$$e = \prod_{i=1}^m a_i,$$

где $m \in \mathbb{N}$ и $a_i \in \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$, для всех $i = 1, \dots, m$. Число m назовем глубиной e и обозначим через $\partial(e)$. Для каждого $m \geq 0$ положим

$$E_m = \{e \in E \mid \partial(e) = m\}.$$

Введем обозначение

$$\alpha_i^{(j)} = \alpha_{i \oplus j},$$

где

$$i \oplus j \equiv i + j \pmod{n}.$$

Пусть X — произвольное множество. Через SW_X^* обозначим свободную алгебру над X в многообразии алгебр сигнатуры $\{+, 0, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$, состоящую из одной бинарной, одной нульарной и n унарных операционных символов, определяемую следующими тождествами:

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= x + (y + z), \\ x + y &= y + x, \\ x + 0 &= x, \\ \alpha_i(x + y) &= \alpha_i x + \alpha_i y, \\ \alpha_i 0 &= 0, \end{aligned}$$

для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Элементы алгебры SW_X^* будем называть n -арными полутермами над X . Очевидно, что каждый полутерм $s \in SW_X^*$ может быть представлен в виде

$$s = \sum_{i=1}^r e_i x_i,$$

где $r \in \mathbb{N}$, $e_i \in E$, $x_i \in X$; это выражение однозначно с точностью до порядка слагаемых. Целое число r называется длиной s и обозначается через $\lambda(s)$. Ясно, что $\lambda(s) = 0$ тогда и только тогда, когда $s = 0$.

Определим n -арную операцию на SW_X^* следующим образом:

$$(s_0^{n-1}) = (s_0 \cdots s_{n-1}) = \alpha_0 s_0 + \dots + \alpha_{n-1} s_{n-1}.$$

Полученный n -арный группоид будем обозначать через SW_X и называть n -арным группоидом (n -группоидом) полутермов над X . Элементы подалгебры алгебры SW_X , порожденной множеством X , обозначим через W_X и назовем n -арными термами над X ; в дальнейшем их будем называть просто термами.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 1. Пусть W_X — абсолютно свободный n -арный группоид (n -группоид) над X . Для каждого терма t над X имеет место один из следующих случаев:

- (1) $t \in X$;
- (2) существует единственная n -ка $u_1, \dots, u_n$ термов над X такая, что

$$t = (u_1^n) = (u_1, \dots, u_n).$$

Лемма 2. Пусть

$$t = \sum_{i=1}^r e_i x_i, \quad x_i \in X,$$

есть полутерм над X . Тогда t будет термом над X тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $r \geq 1$;
- (2) если $i, j \in \{1, \dots, r\}$ и $e_i = e_j f$ для некоторого $f \in E$, то $i = j$;
- (3) если $i \in \{1, \dots, r\}$ и $e_i = fag$ для некоторых $f, g \in E$ и $a \in \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$, то существуют $j_1, \dots, j_{n-1} \in \{1, \dots, r\}$ такие, что $e_{j_1} = fa^{(1)}h_1, \dots, e_{j_{n-1}} = fa^{(n-1)}h_{n-1}$ для некоторых $h_1, \dots, h_{n-1} \in E$.

Доказательство. Покажем, что множество всех полутермов $t \in SW_X$, удовлетворяющих условиям 1–3, есть подгруппоид SW_X , содержащий X . Ясно, что элементы X удовлетворяют этим условиям. Пусть

$$\begin{aligned} t_1 &= \sum_{i=1}^{r_1} e_i^1 x_i^1, \\ &\dots \\ t_n &= \sum_{i=1}^{r_n} e_i^n x_i^n, \quad e_i^j \in E, \quad x_i^j \in X, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} (t_1^n) &= (t_1 \cdots t_n) = \alpha_0 t_1 + \dots + \alpha_{n-1} t_n \\ &= \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_0 e_i^1 x_i^1 + \dots + \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_{n-1} e_i^n x_i^n; \end{aligned}$$

очевидно, что терм $(t_1^n) = (t_1 \cdots t_n)$ удовлетворяет условиям леммы.

С другой стороны, индукцией по $\lambda(t)$ нетрудно показать, что если t удовлетворяет условиям 1–3, то $t \in W_X$. Пусть $\lambda(t) = 1$, т.е. $t = e_1 x_1$, если e_1 отлично от единицы, то t не будет удовлетворять условиям 1–3, поэтому $e_1 = 1$ и $t = x$. Предположим, что утверждение справедливо для $\lambda(t) < r$. Положим

$$t = \sum_{i=1}^r e_i x_i.$$

Согласно условию 3, t можно представить в виде

$$\begin{aligned} t &= \alpha_0 \sum_{i=1}^{k_0} f_i^0 x_i^0 + \alpha_1 \sum_{i=k_0+1}^{k_1} f_i^1 x_i^1 + \dots + \alpha_{n-1} \sum_{i=k_{n-2}+1}^{k_{n-1}} f_i^{n-1} x_i^{n-1} \\ &= (u_0 u_1 \dots u_{n-1}). \end{aligned}$$

Для полутермов

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{i=1}^{k_0} f_i^0 x_i^0, \\ u_1 &= \sum_{i=k_0+1}^{k_1} f_i^1 x_i^1, \\ &\dots \\ u_{n-1} &= \sum_{i=k_{n-2}+1}^{k_{n-1}} f_i^{n-1} x_i^{n-1}, \end{aligned}$$

длины которых меньше r , выполняются условия 1–3; следовательно, по предположению индукции, $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} \in W_X$, поэтому $t \in W_X$.

Пусть

$$s = \sum_{i=1}^r e_i x_i$$

есть терм над X ; через $I^*(s)$ и $I(s)$ обозначим множества

$$\begin{aligned} I^*(s) &= \{e_i \mid i = 1, \dots, r\}, \\ I(s) &= \{e \in E \mid ef \in I^*(s), \text{ где } f \in E\}, \\ I_n(s) &= E_n \cap I(s). \end{aligned}$$

Элементы $I(s)$ назовем подтермами, входящими в s .

Пусть t есть терм над X . Тогда $I^*(t) \subseteq I(t)$. Более того, если $e \in I(t)$, то

$$\begin{aligned} e \in I^*(t) &\iff e\alpha_0 \notin I(t) \iff e\alpha_1 \notin I(t) \\ &\iff \dots \iff e\alpha_{n-1} \notin I(t). \end{aligned}$$

Глубиной термина t назовем число

$$\partial(t) = \max\{\partial(e) \mid e \in I(t)\}.$$

Очевидно, что $I_{\partial(t)}(t) \subseteq I^*(t)$ и $\partial(t)$ есть такое наибольшее целое число n , что $I_n(t) \neq \emptyset$.

Непосредственно из леммы 2 следует утверждение ниже.

Лемма 3. Пусть t есть терм над X . Множество $P = I(t)$ имеет следующие свойства:

- (1) P — конечное подмножество E и $1 \in P$;
- (2) если $e, f \in E$ и $ef \in P$, то $e \in P$;

(3) если $e \in E$, то

$$e\alpha_0 \in P \iff e\alpha_1 \in P \iff \dots \iff e\alpha_{n-1} \in P.$$

Обратно, если $P \subseteq E$ удовлетворяет свойствам 1, 2, 3, и $h: Q \rightarrow X$, где

$$Q = \{e \in P \mid e\alpha_i \notin P\}$$

для некоторого i , то полутерм

$$s = \sum_{e \in Q} eh(e)$$

является термом над X и $P = I(s)$.

Лемма 4. Пусть t есть терм над X и $e \in I(t)$. Тогда существует и единственна пара (w, u) такая, что w — полутерм, u — терм, и $t = w + eu$. Более того, если v — произвольный терм над X , то $w + ev$ также будет термом над X .

Доказательство. Положим

$$t = \sum_{i=1}^r e_i x_i, \quad x_i \in X.$$

Обозначим через J множество всех таких $j \in \{1, \dots, r\}$, что $e_j = ef$ для некоторого $f \in E$, т.е. это множество индексов тех коэффициентов термина t , которые начинаются с e . Для каждого $j \in J$ определим f_j следующим образом:

$$e_j = ef_j.$$

Положим

$$u = \sum_{j \in J} f_j x_j, \quad w = \sum_{j \notin J} e_j x_j.$$

Тогда

$$\begin{aligned} t = w + eu &= \sum_{j \notin J} e_j x_j + e \sum_{j \in J} f_j x_j \\ &= \sum_{j \notin J} e_j x_j + \sum_{j \in J} ef_j x_j \\ &= \sum_{j \notin J} e_j x_j + \sum_{j \in J} e_j x_j = \sum_{i=1}^r e_i x_i. \end{aligned}$$

То, что u — терм, следует из условий 1–3 леммы 3.

Покажем теперь единственность. Предположим, что

$$t = w_0 + eu_0, \quad w_0 \in SW_X, \quad u_0 \in W_X.$$

Предположим, что $e_i x_i$ является слагаемым в w_0 для некоторого $i \in J$. Возьмем $f \in E$ максимальной глубины, такой, что $efgx$ — слагаемое в w_0 и $efhy$ — слагаемое в eu_0 для некоторых $g, h \in E$ и $x, y \in X$. Отметим, что g и h не могут быть равны 1, поэтому

$$g = ag_0, \quad h = bh_0, \quad a, b \in \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\},$$

и $a \neq b$ ввиду максимальной глубины f . Для a и b возможны несколько случаев. Если $a = \alpha_0$, $b = \alpha_1$, то, поскольку $u_0 \in W_X$, eu_0 должен иметь слагаемое

$$ef\alpha_1^{(n-1)}h_1z = ef\alpha_0h_1z$$

для некоторого $h_1 \in E$ и $z \in X$, что противоречит максимальной $\partial(f)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Следовательно, e_ix_i — слагаемое в eu_0 для всех $i \in J$, и мы получаем, что $u_0 = u$. Теперь равенство $w = w_0$ очевидно.

Непосредственно из леммы 2 следует, что $t_1 = w + ev$ будет термом для любого терма v .

Пусть $t = w + eu$ есть терм, тогда терм u будем обозначать через $t_{[e]} = u$ и называть подтермом терма t , соответствующим e . Ясно, что $t_{[e]} \in X$ тогда и только тогда, когда $e \in I^*(t)$. Если

$$t = \sum_{i=1}^r e_ix_i,$$

то $t_{[e_i]} = x_i$ для всех $i = 1, \dots, r$. Терм $w + eu$ обозначим через $\sigma_{e:v}(t)$.

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 5. Пусть t, v есть термы над X , $n \geq 0$, $e \in I_m(t)$. Положим

$$s = \sigma_{e:v}(t).$$

Тогда

(1) $I_k(s) = I_k(t)$ для всех $k \in \{0, \dots, m\}$;

(2) $s_{[e]} = v$;

(3) если $f \in I_m(t)$ и $f \neq e$, то

$$s_{[f]} = t_{[f]};$$

(4) если $0 \leq k < m$, $x \in X$ и $g \in I_k(t)$, то

$$t_{[g]} = x \iff s_{[g]} = x.$$

Пусть t есть терм над X , $e_1, \dots, e_k$ есть подтермы t такие, что если $e_i = e_j f$ для любых $i, j \in \{1, \dots, k\}$ и для некоторого $f \in E$, то $i = j$ (такие подтермы называются независимыми). Из доказательства леммы 4 следует, что существует единственная $(k+1)$ -ка $w, u_1, \dots, u_k$ такая, что w есть полутерм над X , $u_1, \dots, u_k$ есть термы над X и

$$t = w + e_1u_1 + \dots + e_ku_k.$$

Получаем, что $u_1 = t_{[e_1]}, \dots, u_k = t_{[e_k]}$. Если $v_1, \dots, v_k$ есть произвольные термы, тогда $w + e_1v_1 + \dots + e_kv_k$ есть терм, который будем обозначать $\sigma_{e_1:v_1} \dots \sigma_{e_k:v_k}(t)$.

Пусть t есть терм, $n \geq 0$, и p есть подстановка множества $I_m(t)$. Обозначим через $e_1, \dots, e_k$ попарно различные элементы $I_m(t)$. Очевидно, что $e_1, \dots, e_k$ есть независимые подтермы t . Терм $\sigma_{e_1:v_1} \dots \sigma_{e_k:v_k}(t)$, где $v_i = t_{[p(e_i)]}$ для всех $i = 1, \dots, k$, обозначим через $p[t]$.

Утверждение ниже сразу следует из леммы 5.

Лемма 6. Пусть t есть терм над X , $n \geq 0$, и p есть подстановка множества $I_m(t)$. Тогда

- (1) $I_k(p[t]) = I_k(t)$ для всех $k \in \{0, \dots, m\}$;
- (2) если $e \in I_m(t)$, то $p[t]_{[e]} = t_{[p(e)]}$;
- (3) если $0 \leq k < m$, $x \in X$ и $e \in I_k(t)$, то $t_{[e]} = x$ тогда и только тогда, когда $p[t]_{[e]} = x$.

Пусть $m \in (n-1)\mathbb{N}$, $t_0, t_1, \dots, t_m$ есть термы над X , и $a_1, \dots, a_m$ — некоторые элементы из $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$. Индукцией по m определим терм $[t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n-3}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-2}, t_{2n-2}, \dots, t_{m-(n-1)}, t_{m-n}, \dots, t_{m-2}, t_{m-1}, a_{m-n}, \dots, a_{m-1}, a_m, t_m]$. Положим $\pi = (0 \ 1 \ 2 \ \dots \ (n-1)) \in S_n$.

Если $m = 0$, то $[t_0] = t_0$.

Если $m = n-1$, то

$$[t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, \alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_{n-2}^{(s)}, t_{n-1}] = (t_{\pi^{-s}(0)} t_{\pi^{-s}(1)} \cdots t_{\pi^{-s}(n-1)}),$$

где $s = 0, 1, \dots, n-1$. В частности,

$$\begin{aligned} [t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, t_{n-1}] &= (t_0 t_1 \cdots t_{n-1}), \\ [t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, t_{n-1}] &= (t_{n-1} t_0 \cdots t_{n-2}), \end{aligned}$$

и так далее.

Если $m \geq m-1$, то

$$\begin{aligned} &[t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n-3}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-2}, \\ & t_{2n-2}, \dots, t_{m-(n-1)}, t_{m-n}, \dots, t_{m-2}, t_{m-1}, a_{m-n}, \dots, a_{m-1}, a_m, t_m] \\ &= [[t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n-3}, \\ & a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-2}, t_{2n-2}, \dots, a_{m-(n-1)}, t_{m-(n-1)}], \\ & t_{m-(n-2)}, \dots, t_{m-2}, t_{m-1}, a_{m-(n-2)}, \dots, a_{m-1}, a_m, t_m] \\ &= [u_0, u_1, \dots, u_{n-2}, \alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_{n-2}^{(s)}, u_{n-1}] \\ &= (u_{\pi^{-s}(0)} u_{\pi^{-s}(1)} \cdots u_{\pi^{-s}(n-1)}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_0 &= [t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n-3}, \\ & a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-2}, t_{2n-2}, \dots, a_{m-(n-1)}, t_{m-(n-1)}], \\ u_1 &= t_{m-(n-2)}, \\ &\dots \\ u_{n-3} &= t_{m-2}, \\ u_{n-2} &= t_{m-1}, \\ u_{n-1} &= t_m. \end{aligned}$$

Очевидно, что данный терм определен не для любых $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Лемма 7. Пусть t есть терм над X и $e = a_1 \cdots a_m \in I_m(t)$, $m \geq 0$. Тогда

$$(1) \quad t = [t_{[a_1 \dots a_m]}, t_{[a_1 \dots a_m^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_m^{(n-2)}]}, a_m, a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(n-2)}, t_{[a_1 \dots a_m^{(n-1)}]}, t_{[a_1 \dots a_{m-1}^{(1)}]}, \dots, \\ t_{[a_1 \dots a_{m-1}^{(n-2)}]}, a_{m-1}, a_{m-1}^{(1)}, \dots, a_{m-1}^{(n-2)}, t_{[a_1 \dots a_{m-1}^{(n-1)}]}, t_{[a_1 \dots a_{m-2}^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_{m-2}^{(n-2)}]}, a_{m-2}, a_{m-2}^{(1)}, \\ \dots, a_{m-2}^{(n-2)}, t_{[a_1 \dots a_{m-2}^{(n-1)}]}, \dots, t_{[a_1 a_2^{(n-1)}]}, t_{[a_1^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1^{(n-2)}]}, a_1, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n-2)}, t_{[a_1^{(n-1)}]}].$$

(2) если в терм над X , то

$$\sigma_{e:v}(t) = [t_{[a_1 \dots a_m]}, t_{[a_1 \dots a_m^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_m^{(n-2)}]}, a_m, a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(n-2)}, \\ t_{[a_1 \dots a_{m-1}^{(n-1)}]}, t_{[a_1 \dots a_{m-1}^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_{m-1}^{(n-2)}]}, a_{m-1}, a_{m-1}^{(1)}, \dots, a_{m-1}^{(n-2)}, \\ t_{[a_1 \dots a_{m-1}^{(n-1)}]}, t_{[a_1 \dots a_{m-2}^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_{m-2}^{(n-2)}]}, a_{m-2}, a_{m-2}^{(1)}, \dots, a_{m-2}^{(n-2)}, \\ t_{[a_1 \dots a_{m-2}^{(n-1)}]}, \dots, t_{[a_1 a_2^{(n-1)}]}, t_{[a_1^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1^{(n-2)}]}, \\ a_1, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n-2)}, t_{[a_1^{(n-1)}]}].$$

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы индукцией по $\lambda(t)$. Если $\lambda(t) = 1$, то $t = x$, и утверждение очевидно. При $\lambda(t) = n$ (случаи $\lambda(t) = 2, \dots, n-1$ для n -арных термов невозможны) получаем, что

$$t = (x_0^{n-1}) = \alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}, \quad t_{[\alpha_i]} = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Поэтому

$$[t_{[\alpha_i]}, t_{[\alpha_i^{(1)}]}, \dots, t_{[\alpha_i^{(n-2)}]}, \alpha_i, \alpha_i^{(1)}, \dots, \alpha_i^{(n-2)}, t_{[\alpha_i^{(n-1)}]}] \\ = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_0, \dots, x_{i-2}, \alpha_0^{(i)}, \alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{n-2}^{(i)}, x_{i-1}] \\ = (x_0 x_1 \dots x_{n-1}).$$

Предположим, что утверждение верно для $\lambda(t) < m$; докажем его для $\lambda(t) = m$. Поскольку t есть терм, то существуют термы $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ такие, что

$$t = (u_0^{n-1}) = \alpha_0 u_0 + \dots + \alpha_{n-1} u_{n-1}.$$

Длина термов $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ меньше m , поэтому для них справедливо предположение индукции. Пусть $e = a_1 \dots a_m \in I_m(t)$, тогда $a_1 = \alpha_i$ для некоторого $i = 0, 1, \dots, n-1$. Рассмотрим случай $a_1 = \alpha_i$. Тогда $a_2 \dots a_m \in I_{m-1}(u_i)$ и

$$[t_{[\alpha_i]}, t_{[\alpha_i^{(1)}]}, \dots, t_{[\alpha_i^{(n-2)}]}, \alpha_i, \alpha_i^{(1)}, \dots, \alpha_i^{(n-2)}, t_{[\alpha_i^{(n-1)}]}] \\ = [u_i, u_{i+1}, \dots, u_{n-1}, u_0, \dots, u_{i-2}, \alpha_0^{(i)}, \alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{n-2}^{(i)}, u_{i-1}] \\ = (u_0 u_1 \dots u_{n-1}).$$

По предположению индукции,

$$u_i = [u_{i[a_2 \dots a_m]}, u_{i[a_2 \dots a_m^{(1)}]}, \dots, u_{i[a_2 \dots a_m^{(n-2)}]}, a_m, a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(n-2)}, \\ u_{i[a_2 \dots a_m^{(n-1)}]}, u_{i[a_2 \dots a_{m-1}^{(1)}]}, \dots, u_{i[a_2 \dots a_{m-1}^{(n-1)}]}, \dots, u_{i[a_2 a_3^{(n-1)}]}, \\ u_{i[a_2^{(1)}]}, \dots, u_{i[a_2^{(n-2)}]}, a_2, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(n-2)}, u_{i[a_2^{(n-1)}]}].$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 t &= [t_{[\alpha_i]}, t_{[\alpha_i^{(1)}]}, \dots, t_{[\alpha_i^{(n-2)}]}, \alpha_i, \alpha_i^{(1)}, \dots, \alpha_i^{(n-2)}, t_{[\alpha_i^{(n-1)}]}] \\
 &= [u_i, t_{[a_1^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1^{(n-2)}]}, a_1, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n-2)}, t_{[a_1^{(n-1)}]}] \\
 &= [[u_{i[a_2 \dots a_m]}, u_{i[a_2 \dots a_m^{(1)}]}, \dots, u_{i[a_2 \dots a_m^{(n-2)}]}, a_m, a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(n-2)}, \\
 &\quad u_{i[a_2 \dots a_m^{(n-1)}]}, u_{i[a_2 \dots a_{m-1}^{(1)}]}, \dots, u_{i[a_2 \dots a_{m-1}^{(n-1)}]}, \dots, u_{i[a_2 a_3^{(n-1)}]}, \\
 &\quad u_{i[a_2^{(1)}]}, \dots, u_{i[a_2^{(n-2)}]}, a_2, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(n-2)}, u_{i[a_2^{(n-1)}]}], \\
 &\quad t_{[a_1^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1^{(n-2)}]}, a_1, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n-2)}, t_{[a_1^{(n-1)}]}],
 \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
 u_{i[a_2 \dots a_m]} &= t_{[a_1 a_2 \dots a_m]}, \\
 u_{i[a_2 \dots a_m^{(1)}]} &= t_{[a_1 a_2 \dots a_m^{(1)}]}, \\
 u_{i[a_2 \dots a_m^{(2)}]} &= t_{[a_1 a_2 \dots a_m^{(2)}]}, \\
 &\dots \\
 u_{i[a_2^{(n-1)}]} &= t_{[a_1 a_2^{(n-1)}]}.
 \end{aligned}$$

Второе утверждение леммы непосредственно следует из первого.

3. Коммутативные медиальные n -арные группоиды

Пусть Q есть n -арный группоид. Обозначим через $\bar{a}$ последовательность $a_1^n \in Q^n$, через $i(\bar{a})$ — последовательность $\{a_1^{i-1}, a_{i+1}^n\}$. Такую последовательность назовем i -м сечением последовательности $\bar{a} = \{a_1^n\}$. Отображение, определяемое равенством

$$\begin{aligned}
 L_i(\bar{a})x &= (a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) \\
 &= (a_1^{i-1} x a_{i+1}^n)
 \end{aligned}$$

называется i -й трансляцией относительно последовательности $\bar{a}$ или трансляцией относительно i -го сечения последовательности $\bar{a}$ (см. [6]).

Назовем n -арный группоид Q сократимым, если трансляции $L_i(\bar{a})$ инъективны для всех $\bar{a} \in Q^n$ и $i = 1, 2, \dots, n$.

Конгруэнция θ n -арного группоида Q называется сократимой, если для любых $\bar{a} \in Q^n$ и любого $i = 1, 2, \dots, n$ включение $(L_i(\bar{a})x, L_i(\bar{a})y) \in \theta$ влечет включение $(x, y) \in \theta$.

Если θ есть сократимая конгруэнция n -арного группоида Q , тогда фактор-группоид Q/θ будет сократимым группоидом.

Назовем n -арный группоид медиальным (абелевым), если он удовлетворяет тождеству

$$((x_{11} \dots x_{1n})(x_{21} \dots x_{2n}) \dots (x_{n1} \dots x_{nn})) = ((x_{11} \dots x_{n1})(x_{12} \dots x_{n2}) \dots (x_{1n} \dots x_{nn})).$$

Назовем n -арный группоид коммутативным, если он удовлетворяет тождеству

$$(x_1 x_2 \dots x_n) = (x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \dots x_{\tau(n)}),$$

где τ — произвольная подстановка из S_n .

Лемма 8. В коммутативном медиальном n -арном группоиде выполняется тождество

$$\begin{aligned} & ((x_1 \cdots x_n)(x_{n+1} \cdots x_{2n}) \cdots (x_{(n-1)n+1} \cdots x_{nn})) \\ & = ((x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)})(x_{\tau(n+1)} \cdots x_{\tau(2n)}) \cdots (x_{\tau((n-1)n+1)} \cdots x_{\tau(nn)})), \end{aligned}$$

где τ — произвольная подстановка из S_{n^2} .

Для любого непустого множества X обозначим через C_X множество всех тождеств над X , выполняющихся во всех коммутативных медиальных n -арных группоидах. Нетрудно видеть, что C_X есть наименьшая конгруэнция W_X такая, что W_X/C_X есть коммутативный медиальный n -группоид, она будет вполне инвариантной конгруэнцией, и n -группоид W_X/C_X есть свободный коммутативный группоид ранга $\text{Card}(X)$.

Для всех $t \in W_X$, $x \in X$ и $m \geq 0$ положим

$$P_m(x, t) = \text{Card}\{e \in I_m(t) \mid t_{[e]} = x\}.$$

Таким образом, $P_m(x, t)$ есть число вхождений x глубины m в t .

Лемма 9. Пусть $m \in (n-1)\mathbb{N}$, иными словами, $m = (n-1)k$, $a_{ij} \in \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$, и $t_0^{(i)}, t_1^{(i)}, \dots, t_m^{(i)} \in W_X$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда для любых $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} C_X \ni & (([t_0^1, t_1^1, \dots, t_{n-2}^1, a_{11}, a_{11}^{(1)}, \dots, a_{11}^{(n-2)}, t_{n-1}^1, t_n^1, \dots, t_{2n-3}^1, a_{12}, a_{12}^{(1)}, \dots, a_{12}^{(n-2)}, \\ & t_{2n-2}^1, \dots, t_{m-1}^1, a_{1k}, a_{1k}^{(1)}, \dots, a_{1k}^{(n-2)}, t_m^1] \\ & \cdots [t_0^i, t_1^i, \dots, t_{n-2}^i, a_{i1}, a_{i1}^{(1)}, \dots, a_{i1}^{(n-2)}, t_{n-1}^i, t_n^i, \dots, t_{2n-3}^i, a_{i2}, a_{i2}^{(1)}, \dots, a_{i2}^{(n-2)}, \\ & t_{2n-2}^i, \dots, t_{m-1}^i, a_{ik}, a_{ik}^{(1)}, \dots, a_{ik}^{(n-2)}, t_m^i] \\ & \cdots [t_0^j, t_1^j, \dots, t_{n-2}^j, a_{j1}, a_{j1}^{(1)}, \dots, a_{j1}^{(n-2)}, t_{n-1}^j, t_n^j, \dots, t_{2n-3}^j, a_{j2}, a_{j2}^{(1)}, \dots, a_{j2}^{(n-2)}, \\ & t_{2n-2}^j, \dots, t_{m-1}^j, a_{jk}, a_{jk}^{(1)}, \dots, a_{jk}^{(n-2)}, t_m^j] \\ & \cdots [t_0^n, t_1^n, \dots, t_{n-2}^n, a_{n1}, a_{n1}^{(1)}, \dots, a_{n1}^{(n-2)}, t_{n-1}^n, t_n^n, \dots, t_{2n-3}^n, a_{n2}, a_{n2}^{(1)}, \dots, a_{n2}^{(n-2)}, \\ & t_{2n-2}^n, \dots, t_{m-1}^n, a_{nk}, a_{nk}^{(1)}, \dots, a_{nk}^{(n-2)}, t_m^n]), \\ & ([t_0^1, t_1^1, \dots, t_{n-2}^1, a_{11}, a_{11}^{(1)}, \dots, a_{11}^{(n-2)}, t_{n-1}^1, t_n^1, \dots, t_{2n-3}^1, a_{12}, a_{12}^{(1)}, \dots, a_{12}^{(n-2)}, \\ & t_{2n-2}^1, \dots, t_{m-1}^1, a_{1k}, a_{1k}^{(1)}, \dots, a_{1k}^{(n-2)}, t_m^1] \\ & \cdots [t_0^j, t_1^j, \dots, t_{n-2}^j, a_{j1}, a_{j1}^{(1)}, \dots, a_{j1}^{(n-2)}, t_{n-1}^j, t_n^j, \dots, t_{2n-3}^j, a_{j2}, a_{j2}^{(1)}, \dots, a_{j2}^{(n-2)}, \\ & t_{2n-2}^j, \dots, t_{m-1}^j, a_{jk}, a_{jk}^{(1)}, \dots, a_{jk}^{(n-2)}, t_m^j] \\ & \cdots [t_0^i, t_1^i, \dots, t_{n-2}^i, a_{i1}, a_{i1}^{(1)}, \dots, a_{i1}^{(n-2)}, t_{n-1}^i, t_n^i, \dots, t_{2n-3}^i, a_{i2}, a_{i2}^{(1)}, \dots, a_{i2}^{(n-2)}, \\ & t_{2n-2}^i, \dots, t_{m-1}^i, a_{ik}, a_{ik}^{(1)}, \dots, a_{ik}^{(n-2)}, t_m^i] \\ & \cdots [t_0^n, t_1^n, \dots, t_{n-2}^n, a_{n1}, a_{n1}^{(1)}, \dots, a_{n1}^{(n-2)}, t_{n-1}^n, t_n^n, \dots, t_{2n-3}^n, a_{n2}, a_{n2}^{(1)}, \dots, a_{n2}^{(n-2)}, \\ & t_{2n-2}^n, \dots, t_{m-1}^n, a_{nk}, a_{nk}^{(1)}, \dots, a_{nk}^{(n-2)}, t_m^n])). \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по m . При $m = 0$ утверждение следует из закона коммутативности. Допустим, что утверждение леммы верно для чисел, меньших

m , и докажем его для m . Для простоты предположим, что $a_{ik} = \alpha_0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} & [t_0^i, t_1^i, \dots, t_{n-2}^i, a_{i1}, a_{i1}^{(1)}, \dots, a_{i1}^{(n-2)}, t_{n-1}^i, t_n^i, \dots, t_{2n-3}^i, \\ & a_{i2}, a_{i2}^{(1)}, \dots, a_{i2}^{(n-2)}, t_{2n-2}^i, \dots, t_{m-1}^i, a_{ik}, a_{ik}^{(1)}, \dots, a_{ik}^{(n-2)}, t_m^i] \\ & = ([t_0^i, t_1^i, \dots, t_{n-2}^i, a_{i1}, a_{i1}^{(1)}, \dots, a_{i1}^{(n-2)}, \dots, t_{m-(n-1)}^i] t_{m-(n-2)}^i \cdots t_m^i) \end{aligned}$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Согласно предположению индукции,

$$\begin{aligned} CX \ni & (([t_0^1, t_1^1, \dots, t_{n-2}^1, a_{11}, \dots, a_{11}^{(n-2)}, \dots, t_{m-(n-1)}^1] \\ & \cdots [t_0^i, t_1^i, \dots, t_{n-2}^i, a_{i1}, \dots, a_{i1}^{(n-2)}, \dots, t_{m-(n-1)}^i] \\ & \cdots [t_0^j, t_1^j, \dots, t_{n-2}^j, a_{j1}, \dots, a_{j1}^{(n-2)}, \dots, t_{m-(n-1)}^j] \\ & \cdots [t_0^n, t_1^n, \dots, t_{n-2}^n, a_{n1}, \dots, a_{n1}^{(n-2)}, \dots, t_{m-(n-1)}^n]), \\ & ([t_0^1, t_1^1, \dots, t_{n-2}^1, a_{11}, \dots, a_{11}^{(n-2)}, \dots, t_{m-(n-1)}^1] \\ & \cdots [t_0^j, t_1^j, \dots, t_{n-2}^j, a_{j1}, \dots, a_{j1}^{(n-2)}, \dots, t_{m-(n-1)}^j] \\ & \cdots [t_0^i, t_1^i, \dots, t_{n-2}^i, a_{i1}, \dots, a_{i1}^{(n-2)}, \dots, t_{m-(n-1)}^i] \\ & \cdots [t_0^n, \dots, t_{n-2}^n, a_{n1}, \dots, a_{n1}^{(n-2)}, \dots, t_{m-(n-1)}^n]), \end{aligned}$$

и, так как CX есть конгруэнция и рассматриваемый n -группоид коммутативен, получаем требуемое утверждение.

Лемма 10. Пусть $t \in W_X$, $m \geq 0$, и $e, f \in I_m(t)$. Тогда $(t, \tau_{e,f}[t]) \in CX$, где $\tau_{e,f}$ есть транспозиция, определенная на $I_m(t)$, переставляющая e и f .

Доказательство. Докажем лемму индукцией по длине t . Если $t \in X$, т.е., $m = 0$, то $t = \tau_{e,f}[t]$, что и требуется. Пусть $t = (u_0 u_1 \cdots u_{n-1})$ и $m \geq 1$. Положим

$$e = a_1 \cdots a_m, \quad f = b_1 \cdots b_m.$$

Возможны следующие случаи.

Пусть $a_1 = b_1 = \alpha_i$. Тогда

$$\tau_{e,f}[t] = (u_0 \cdots u_{i-1} \tau_{a_2 \cdots a_m, b_2 \cdots b_m}[u_i] u_{i+1} \cdots u_{n-1}).$$

По предположению индукции, $(u_i, \tau_{a_2 \cdots a_m, b_2 \cdots b_m}[u_i]) \in CX$, поэтому $(t, \tau_{e,f}[t]) \in CX$, так как CX есть конгруэнция.

Теперь пусть $a_1 = \alpha_i$, $b_1 = \alpha_j$, и $i \neq j$. Тогда

$$\tau_{e,f}[t] = (u_0 \cdots u_{i-1} \sigma_{a_2 \cdots a_m: t[f]}(u_i) u_{i+1} \cdots u_{j-1} \sigma_{b_2 \cdots b_m: t[e]}(u_j) u_{j+1} \cdots u_{n-1}).$$

Согласно лемме 7,

$$\begin{aligned}
 t = & (u_0 \cdots u_{i-1} [u_{i[a_2 \cdots a_m]}, u_{i[a_2 \cdots a_m^{(1)}]}, \dots, u_{i[a_2 \cdots a_m^{(n-2)}]}, a_m, a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(n-2)}, \\
 & u_{i[a_2 \cdots a_m^{(n-1)}]}, u_{i[a_2 \cdots a_{m-1}^{(1)}]}, \dots, u_{i[a_2 \cdots a_{m-1}^{(n-2)}]}, \\
 & a_{m-1}, a_{m-1}^{(1)}, \dots, a_{m-1}^{(n-2)}, \dots, a_2, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(n-2)}, u_{i[a_2^{(n-1)}]}] u_{i+1} \\
 & \cdots u_{j-1} [u_{j[b_2 \cdots b_m]}, u_{j[b_2 \cdots b_m^{(1)}]}, \dots, u_{j[b_2 \cdots b_m^{(n-2)}]}, b_m, b_m^{(1)}, \dots, b_m^{(n-2)}, \\
 & u_{j[b_2 \cdots b_m^{(n-1)}]}, u_{j[b_2 \cdots b_{m-1}^{(1)}]}, \dots, u_{j[b_2 \cdots b_{m-1}^{(n-2)}]}, \\
 & b_{m-1}, b_{m-1}^{(1)}, \dots, b_{m-1}^{(n-2)}, \dots, b_2, b_2^{(1)}, \dots, b_2^{(n-2)}, u_{j[b_2^{(n-1)}]}] u_{j+1} \cdots u_{n-1})
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \tau_{e,f}[t] = & (u_0 \cdots u_{i-1} [u_{j[a_2 \cdots a_m]}, u_{i[a_2 \cdots a_m^{(1)}]}, \dots, u_{i[a_2 \cdots a_m^{(n-2)}]}, a_m, a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(n-2)}, \\
 & u_{i[a_2 \cdots a_m^{(n-1)}]}, u_{i[a_2 \cdots a_{m-1}^{(1)}]}, \dots, u_{i[a_2 \cdots a_{m-1}^{(n-2)}]}, \\
 & a_{m-1}, a_{m-1}^{(1)}, \dots, a_{m-1}^{(n-2)}, \dots, a_2, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(n-2)}, u_{i[a_2^{(n-1)}]}] u_{i+1} \\
 & \cdots u_{j-1} [u_{j[b_2 \cdots b_m]}, u_{j[b_2 \cdots b_m^{(1)}]}, \dots, u_{j[b_2 \cdots b_m^{(n-2)}]}, b_m, b_m^{(1)}, \dots, b_m^{(n-2)}, \\
 & u_{j[b_2 \cdots b_m^{(n-1)}]}, u_{j[b_2 \cdots b_{m-1}^{(1)}]}, \dots, u_{j[b_2 \cdots b_{m-1}^{(n-2)}]}, \\
 & b_{m-1}, b_{m-1}^{(1)}, \dots, b_{m-1}^{(n-2)}, \dots, b_2, b_2^{(1)}, \dots, b_2^{(n-2)}, u_{j[b_2^{(n-1)}]}] u_{j+1} \cdots u_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Следовательно, согласно лемме 9, $(t, \tau_{e,f}[t]) \in C_X$.

Лемма 11. Пусть $t \in W_X$, $m \geq 0$, и p есть подстановка множества $I_m(t)$. Тогда $(t, p[t]) \in C_X$.

Лемма 11 следует из леммы 10, поскольку любая подстановка представима в виде произведения транспозиций.

Определим бинарное отношение S_X на W_X следующим образом:

$$(u, v) \in S_X \iff P_m(x, u) = P_m(x, v)$$

для всех $x \in X$ и $m \geq 0$.

Лемма ниже следует непосредственно из определения.

Лемма 12. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n \in W_X$, $m \geq 0$, и $x \in X$. Тогда

$$P_m(x, (t_1 t_2 \cdots t_n)) = P_{m-1}(x, t_1) + P_{m-1}(x, t_2) + \dots + P_{m-1}(x, t_n),$$

где $P_{-1}(x, t) = 0$.

Лемма 13. Пусть $t \in W_X$, $m \geq 0$, $x \in X$, и g есть эндоморфизм W_X . Тогда

$$P_m(x, g(t)) = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^m P_i(y, t) P_{m-i}(x, g(y)).$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по длине t . Если $\lambda(t) = 1$, то $t = x$. В этом случае все первые сомножители суммы $\sum_{y \in X} \sum_{i=0}^m P_i(y, t) P_{m-i}(x, g(y))$ равны нулю, кроме одного при $y = x$, кроме того, $P_i(x, x) = 0, i > 0, P_0(x, x) = 1$. Следовательно, эта сумма равна $P_m(x, g(t))$. Тем самым базис индукции установлен.

Пусть $t = (u_0 u_1 \dots u_{n-1})$ и для термов $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ лемма верна. Согласно лемме 12 и предположению индукции,

$$\begin{aligned}
 & P_m(x, g(u_0 u_1 \dots u_{n-1})) \\
 &= P_m(x, (g(u_0) g(u_1) \dots g(u_{n-1}))) \\
 &= P_{m-1}(x, g(u_0)) + P_{m-1}(x, g(u_1)) + \dots + P_{m-1}(x, g(u_{n-1})) \\
 &= \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^{m-1} P_i(y, u_0) P_{m-1-i}(x, g(y)) + \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^{m-1} P_i(y, u_1) P_{m-1-i}(x, g(y)) \\
 &\quad + \dots + \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^{m-1} P_i(y, u_{n-1}) P_{m-1-i}(x, g(y)) \\
 &= \sum_{y \in X} \left(\sum_{i=0}^{m-1} P_i(y, u_0) P_{m-1-i}(x, g(y)) + \sum_{i=0}^{m-1} P_i(y, u_1) P_{m-1-i}(x, g(y)) \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \sum_{i=0}^{m-1} P_i(y, u_{n-1}) P_{m-1-i}(x, g(y)) \right) \\
 &= \sum_{y \in X} \left(\sum_{i=0}^{m-1} P_{i-1}(y, u_0) P_{m-i}(x, g(y)) + \sum_{i=0}^{m-1} P_{i-1}(y, u_1) P_{m-i}(x, g(y)) \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \sum_{i=0}^{m-1} P_{i-1}(y, u_{n-1}) P_{m-i}(x, g(y)) \right) \\
 &= \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^m (P_{i-1}(y, u_0) + P_{i-1}(y, u_1) + \dots + P_{i-1}(y, u_{n-1})) P_{m-i}(x, g(y)) \\
 &= \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^m P_i(y, (u_0 u_1 \dots u_{n-1})) P_{m-i}(x, g(y)).
 \end{aligned}$$

Предложение 1. Верно, что S_X есть вполне инвариантная сократимая конгруэнция W_X , причем $C_X \subseteq S_X$.

Доказательство. Очевидно, что S_X есть отношение эквивалентности. Покажем, что S_X есть конгруэнция. Пусть $(u_0, v_0), (u_1, v_1), \dots, (u_{n-1}, v_{n-1}) \in S_X$, тогда, согласно лемме 12,

$$\begin{aligned}
 P_m(x, (u_0 u_1 \dots u_{n-1})) &= P_{m-1}(x, u_0) + P_{m-1}(x, u_1) + \dots + P_{m-1}(x, u_{n-1}) \\
 &= P_{m-1}(x, v_0) + P_{m-1}(x, v_1) + \dots + P_{m-1}(x, v_{n-1}) \\
 &= P_m(x, (v_0 v_1 \dots v_{n-1})),
 \end{aligned}$$

то есть верно включение $((u_0 u_1 \dots u_{n-1}), (v_0 v_1 \dots v_{n-1})) \in S_X$. Покажем сократимость S_X .

Пусть $(L_i(\bar{a})t_1, L_i(\bar{a})t_2) \in S_X$. Тогда, используя лемму 12, получаем, что

$$\begin{aligned}
 P_m(x, (a_1 \dots a_{i-1}t_1a_{i+1} \dots a_n)) &= P_m(x, (a_1 \dots a_{i-1}t_2a_{i+1} \dots a_n)) \\
 &\Downarrow \\
 P_{m-1}(x, a_1) + \dots + P_{m-1}(x, t_1) + \dots + P_{m-1}(x, a_n) \\
 &= P_{m-1}(x, a_1) + \dots + P_{m-1}(x, t_2) + \dots + P_{m-1}(x, a_n) \\
 &\Downarrow \\
 P_{m-1}(x, t_1) &= P_{m-1}(x, t_2) \\
 &\Downarrow \\
 (t_1, t_2) &\in S_X.
 \end{aligned}$$

Покажем вполне инвариантность S_X . Пусть $(u, v) \in S_X$ и g есть эндоморфизм. Согласно лемме 13,

$$P_m(x, g(u)) = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^m P_i(y, u) P_{m-i}(x, g(y)),$$

и

$$P_m(x, g(v)) = \sum_{y \in X} \sum_{i=0}^m P_i(y, v) P_{m-i}(x, g(y));$$

так как $(u, v) \in S_X$,

$$P_i(y, u) = P_i(y, v)$$

для любого i , следовательно,

$$P_m(x, g(u)) = P_m(x, g(v))$$

для всех $x \in X$ и $m \geq 0$, то есть $(g(u), g(v)) \in S_X$.

Далее, фактор W_X/S_X есть медиальный коммутативный n -арный группоид, поэтому $C_X \subseteq S_X$, поскольку C_X есть наименьшая вполне инвариантная конгруэнция, обладающая этими свойствами.

Далее будем считать, что X — счетное множество.

Для каждого $m \geq 0$ определим линейный порядок на E_m следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_1 \dots a_m < b_1 \dots b_m &\iff \exists k \in \{1, \dots, m\}: \\
 a_1 &= b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, (a_k = \alpha_i \ \& \ b_k = \alpha_j) \ \& \ (i < j).
 \end{aligned}$$

Определим множество термов T следующим образом: когда $m \geq 0$, $e, f \in I_m(t)$, $e < f$ и $t_{[f]} = x_j$ для некоторого j , тогда $t_{[e]} = x_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, j\}$.

Лемма 14. Для любого терма $t \in W_X$ существует терм $r \in T$ такой, что $(t, r) \in C_X$.

Доказательство. Определим последовательность термов $t^{(0)}, t^{(1)}, t^{(2)}, \dots$ следующим образом: $t^{(0)} = t$; $t^{(m+1)} = p[t^{(m)}]$, где p есть подстановка множества $I_{m+1}(t^{(m)})$ такая, что когда $e, f \in I_{m+1}(t^{(m)})$, $e < f$ и $t_{[p(f)]}^{(m)} = x_j$ для некоторого j , тогда $t_{[p(e)]}^{(m)} = x_i$ для

некоторого $i \leq j$. Очевидно, найдется натуральное число c такое, что $t^{(c)} = t^{(c+1)} = \dots$. Согласно лемме 11, справедливо включение $(t, t^{(c)}) \in C_X$. Остается доказать, что $t^{(c)} \in T$.

Индукцией по m докажем, что если $0 \leq k \leq m$, $e, f \in I_k(t^{(m)})$, $e < f$ и $t_{[f]}^{(m)} = x_j$ для некоторого j , то $t_{[e]}^{(m)} = x_i$ для некоторого $i \leq j$. При $m = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение выполняется для $m \geq 0$, и пусть $0 \leq k \leq m + 1$, $e, f \in I_k(t^{(m+1)})$, $e < f$ и $t_{[f]}^{(m+1)} = x_j$. Тогда $t^{(m+1)} = p[t^{(m)}]$ для подстановки p множества $I_{m+1}(t^{(m)})$. Если $k \leq m$, то, согласно части 3 леммы 6, $t_{[f]}^{(m)} = x_j$, и, по предположению индукции, $t_{[e]}^{(m)} = x_i$ для некоторого $i \leq j$, и, следовательно, согласно части 3 леммы 6, $t_{[e]}^{(m+1)} = x_i$. Если $k = m + 1$, то $t_{[p(f)]}^{(m)} = t_{[f]}^{(m+1)} = x_j$ согласно части 2 леммы 6, так что $t_{[p(e)]}^{(m)} = x_i$ для некоторого $i \leq j$ согласно выбору p ; отсюда получаем, согласно части 2 леммы 6, что $t_{[e]}^{(m+1)} = x_i$.

Лемма 15. Пусть $t, w \in T$ и $(t, w) \in C_X$. Тогда $t = w$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что $I_m(t) = I_m(w)$, $m \geq 0$, и что если $e \in I_m(t)$, $x \in X$, то равенство $t_{[e]} = x$ эквивалентно равенству $w_{[e]} = x$. Доказательство проведем индукцией по m .

Для $m = 0$ утверждение очевидно. Пусть $m \geq 1$. Согласно предположению индукции,

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_m \in I_m(t) &\iff t_{[a_1 \cdots a_{m-1}]} \notin X \\ &\iff w_{[a_1 \cdots a_{m-1}]} \notin X \\ &\iff a_1 \cdots a_m \in I_m(w). \end{aligned}$$

Таким образом, $I_m(t) = I_m(w)$.

Далее, пусть $e \in I_m(t)$. Допустим, что $I_m(t) = \{e_1, \dots, e_k\}$, где $k \geq 0$ и $e_1 < \dots < e_k$. Тогда $e = e_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$. Если j — положительное целое число, то, поскольку $t \in T$, равенство $t_{[e]} = x_j$ эквивалентно тому, что

$$P_m(x_1, t) + \dots + P_m(x_{j-1}, t) < i \leq P_m(x_1, t) + \dots + P_m(x_j, t).$$

Аналогично, так как $w \in T$, равенство $w_{[e]} = x_j$ эквивалентно тому, что

$$P_m(x_1, w) + \dots + P_m(x_{j-1}, w) < i \leq P_m(x_1, w) + \dots + P_m(x_j, w).$$

Так как $P_m(x, t) = P_m(x, w)$ для всех $x \in X$, получаем, что равенства $t_{[e]} = x_j$ и $w_{[e]} = x_j$ эквивалентны.

Лемма 16. Справедливо равенство $C_X = S_X$.

Доказательство. Согласно предложению 1, $C_X \subseteq S_X$. Пусть $(t, w) \in S_X$. Согласно лемме 14, существуют термы $r, s \in T$, такие, что $(t, r) \in C_X$ и $(w, s) \in C_X$. На основании леммы 15 получаем, что $r = s$, и, следовательно, $(t, w) \in C_X$.

Следующее утверждение суть леммы 2.1.17 и 2.1.18 из [15].

Предложение 2. Если X есть произвольное непустое множество, то $C_X = S_X$.

Из этого предложения следует наш основной результат.

Теорема 1. Пусть X есть произвольное непустое множество и u, v есть термы над X . Верно, что $(u, v) \in C_X$ тогда и только тогда, когда $P_m(x, u) = P_m(x, v)$ для всех $x \in X$ и всех целых неотрицательных чисел m .

Заметим, что для проверки включения $(u, v) \in C_X$ достаточно проверить выполнение равенства $P_m(x, u) = P_m(x, v)$ для всех $x \in \text{var}(u) \cup \text{var}(v)$ и $m \in \{0, \dots, \text{Max}(\partial(u), \partial(v))\}$.

Следствие 1. Любой свободный коммутативный медиальный n -арный группоид является сократимым группоидом.

Список литературы

1. Dörnte W., Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff. *Math. Z.* (1928) **29**, 1–19.
2. Post E. L., Polyadic groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1940) **48**, 208–350.
3. Чунихин С. А., К теории неассоциативных n -групп с постулатом К. *Доклады АН СССР* (1945) **48**, №1, 7–10.
4. Мальцев А. И., *Итеративные алгебры Поста*. Изд-во НГУ, Новосибирск, 1976.
5. Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л., *Алгебра, языки, программирование*. Наукова думка, Киев, 1974.
6. Белоусов В. Д., *n -арные квазигруппы*. Штиинца, Кишинев, 1972.
7. Русаков С. А., *Алгебраические n -арные системы. Силовская теория n -ых групп*. Навука і тэхніка, Минск, 1992.
8. Ušan J., n -groups in the light of the neutral operations. *Math. Morav.* (2006) 1–203.
9. Мовсисян Ю. М., *Введение в теорию алгебр со сверхтождествами*. Изд-во ЕГУ, Ереван, 1986.
10. Marini A., Shcherbacov V., On autotopies and automorphisms of n -ary linear quasigroups. *Algebra Discrete Math.* (2004) **2**, 59–83.
11. Дудек В. А., Трохименко В. С., *Алгебры Менгера многоместных функций*. Universitatea de Stat din Moldova, Chişinău, 2006.
12. Shcherbacov V., On structure of finite n -ary medial quasigroups and automorphism groups of these quasigroups. *Quasigroups Relat. Syst.* (2005) **13**, 125–156.
13. Глухов М. М., О многообразиях (i, j) -приводимых n -квазигрупп. *Матем. исслед.* (1976) **39**, 67–72.
14. Ježek J., Kepka T., Equational theories of medial groupoids. *Algebra Univers.* (1983) **17**, 174–190.
15. Ježek J., Kepka T., Medial groupoids. *Rozpr. Česk. Akad. Věd, Řada Mat. Přír. Věd* (1983) **93**, №2, 1–93.
16. Курош А. Г., *Общая алгебра*. Наука, Москва, 1974.
17. Romanowska A. B., Smith J. D. H., *Modes*. World Scientific, Singapore, 2002.
18. Мовсисян Ю. М., Сверхтождества в алгебрах и многообразиях. *Успехи матем. наук* (1998) **53**, №1, 61–114.
19. Smith J. D. H., Entropy, character theory and centrality of finite quasigroups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* (1990) **108**, 435–443.

Статья поступила 15.12.2010.