Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Княгина, В. С. Монахов, Конечные группы с нильпотентными и холловыми подгруппами, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 1, 137–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:06:28

Конечные группы с нильпотентными и холловыми подгруппами

© 2013 г. В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Устанавливается строение конечной группы, у которой каждая подгруппа либо нильпотентна, либо холлова.

Конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны, называют группой Шмидта. Впервые эти группы рассматривались в работе О. Ю. Шмидта [1]. Группам Шмидта посвящен отдельный параграф монографии Хупперта [2] (см. §III.5). Обзор результатов о группах Шмидта и перспективы их приложений в теории групп по состоянию на 2001 г. приведен в [3].

Если в конечной группе все подгруппы холловы, то, очевидно, ее порядок свободен от квадратов, то есть не делится на p^2 для любого простого p . По теореме IV.2.11 в [2], такая группа содержит нормальную циклическую холлову подгруппу, фактор-группа по которой циклическая.

В настоящей заметке изучаются свойства конечной ненильпотентной группы, в которой каждая подгруппа либо холлова, либо нильпотентна. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть G — конечная ненильпотентная группа, в которой каждая подгруппа либо холлова, либо нильпотентна. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) если силовская p -подгруппа P ненормальна в G , то P циклическая и каждая максимальная подгруппа из P содержится в центре G ;
- (2) если силовская p -подгруппа P нормальна в G , то либо P — минимальная нормальная в G подгруппа, либо P неабелева,

$$Z(P) = P' = \Phi(P),$$

и $P/\Phi(P)$ — минимальная нормальная в $G/\Phi(P)$ подгруппа;

- (3) если P_1 — нормальная p -подгруппа, отличная от силовской, то P_1 содержится в центре G ;
- (4) фактор-группа $G/Z(G)$ содержит нормальную абелеву холлову подгруппу $A/Z(G)$, у которой каждая силовская подгруппа является минимальной нормальной в $G/Z(G)$ подгруппой, а G/A — циклическая группа порядка, свободного от квадратов.

Следствие 1. Пусть G — конечная ненильпотентная группа, в которой каждая подгруппа либо холлова, либо нильпотентна. Тогда G содержит нильпотентную холлову подгруппу, фактор-группа по которой циклическая. В частности, производная длина G не выше 3.

Рассматриваются только конечные группы. Используемые терминология и обозначения соответствуют [2, 4]. Запись $G = [A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A , а $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G . Знакопеременная и симметрическая группы степени n обозначаются через A_n и S_n , а E_{p^n} и Z_m — элементарная абелева группа порядка p^n и циклическая группа порядка m соответственно. Центр, коммутант, подгруппы Фраттини, Фиттинга и силовская p -подгруппа группы G обозначаются через $Z(G)$, G' , $\Phi(G)$, $F(G)$ и G_p соответственно. Дисперсивной называют группу, обладающую нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам группы.

Пусть $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп. Через $H(\mathfrak{N})$ обозначим класс всех групп, у которых каждая подгруппа либо холлова, либо нильпотентна. Ясно, что все нильпотентные группы, все группы Шмидта и все группы, порядки которых свободны от квадратов, принадлежат $H(\mathfrak{N})$. Бипримарные ненильпотентные группы из класса $H(\mathfrak{N})$ являются группами Шмидта. Ниже приведены другие примеры групп из этого класса.

Пример 1. Пусть $G = A \times S$, $(|A|, |S|) = 1$, $|A|$ свободен от квадратов, A нильпотентна, S — группа Шмидта. Пусть $\pi = \pi(A)$, $\sigma = \pi(S)$. Тогда A — π -холлова, S — σ -холлова подгруппы в G . Пусть K — произвольная подгруппа из G . Тогда ее π -холлова подгруппа K_π содержится в A и $K_\pi = A \cap K$, $K_\sigma \subseteq S$, и $K_\sigma = K \cap S$, поэтому $K = K_\pi \times K_\sigma$. Если $K_\sigma \neq S$, то K_σ нильпотентна и K нильпотентна. Пусть $K_\sigma = S$, то есть $K = (K \cap A) \times S$. Так как $|A|$ свободен от квадратов, то все подгруппы в A холловы и K — холлова в G . Итак, $G \in H(\mathfrak{N})$.

Пример 2. Пусть P — экстраспециальная группа порядка 409^3 . Ясно, что

$$\Phi(P) = Z(P) = P'$$

— подгруппа простого порядка 409 и $P/\Phi(P)$ — элементарная абелева группа порядка 409^2 . Группой автоморфизмов $P/\Phi(P)$ является группа $GL(2, 409)$, в которой по теореме II.7.3 из [6] существует циклическая подгруппа Z_{210} порядка $5 \cdot 41$. Группа Z_{210} действует неприводимо на $P/\Phi(P)$. Поэтому существует группа $T = [P]Z_{210}$, у которой подгруппа $\Phi(P)$ совпадает с центром T . В группе T максимальные подгруппы исчерпываются следующими подгруппами: $[P]Z_5$ — группа Шмидта; $[P]Z_{41}$ — группа Шмидта; $\Phi(P) \times Z_{210}$ — нильпотентная подгруппа. Следовательно, T является трипримарной группой, у которой каждая подгруппа либо нильпотентна, либо группа Шмидта.

Пример 3. Пусть

$$G = [(E_4 \times E_{25} \times E_7 \times E_{121} \times E_{169} \times \dots)]Z_3,$$

где $[E_4]Z_3$, $[E_{25}]Z_3$, $[E_7]Z_3$, $[E_{121}]Z_3$, $[E_{169}]Z_3, \dots$ — группы Шмидта, в которых все собственные подгруппы примарны. Пусть K — произвольная подгруппа из G . Если 3 не делит порядок K , то K нильпотентна. Пусть 3 делит $|K|$. Так как G p -замкнута для любого $p \neq 3$, то K p -замкнута и существует подгруппа $[K_p]Z_3$. По теореме Холла, $[K_p]Z_3 \subseteq [G_p]Z_3$. Но в последней группе все собственные подгруппы примарны. Поэтому либо $[K_p]Z_3 = [G_p]Z_3$ — холлова, либо $K_p = 1$. Так как p — произвольное $\neq 3$, то K — холлова в G и $G \in H(\mathfrak{N})$.

Лемма 1. Если $G \in H(\mathfrak{N})$, то каждая подгруппа из G и каждая фактор-группа группы G принадлежат $H(\mathfrak{N})$.

Доказательство. Пусть $U \leq V \leq G \in H(\mathfrak{N})$. Предположим, что U ненильпотентна. Тогда U — холлова подгруппа в G поскольку $G \in H(\mathfrak{N})$. Ясно, что U — холлова подгруппа в V . Значит, $V \in H(\mathfrak{N})$.

Пусть N — нормальная подгруппа группы G , $G \in H(\mathfrak{N})$ и $X/N \leq G/N$. Предположим, что X/N ненильпотентна. Тогда X ненильпотентна, а значит X — холлова подгруппа в G . Но теперь X/N — холлова подгруппа в G/N и $G/N \in H(\mathfrak{N})$.

Лемма 2 ([1, 3]). Пусть S — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $S = [P]\langle y \rangle$, где P — нормальная силовская p -подгруппа, $\langle y \rangle$ — ненормальная циклическая силовская q -подгруппа, p и q — различные простые числа, $y^q \in Z(S)$;
- (2) $|P/P'| = p^m$, где m — показатель числа p по модулю q ;
- (3) если P абелева, то P — элементарная абелева порядка p^m и P — минимальная нормальная в S подгруппа;
- (4) если P неабелева, то $Z(P) = P' = \Phi(P)$ и $|P/Z(P)| = p^m$;
- (5) если P_1 — неединичная нормальная p -подгруппа группы S , отличная от P , то P неабелева и $P_1 \subseteq Z(P)$;
- (6) $Z(S) = \Phi(S) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$; $S' = P$, $P' = (S')' = \Phi(P)$;
- (7) если N — собственная нормальная подгруппа из S , то подгруппа $\langle y \rangle$ не содержится в N и либо P содержится в N , либо N содержится в $\Phi(S)$.

Напомним, что pd -подгруппа — это подгруппа, порядок которой делится на p . Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется p -замкнутой, а группа с нормальной p' -холловой подгруппой — p -нильпотентной. Группа, которая одновременно p -замкнута и p -нильпотентна, называется p -разложимой.

Лемма 3. (1) Если группа не p -нильпотентна, то в ней существует p -замкнутая pd -подгруппа Шмидта.

- (2) Если группа не 2-замкнута, то в ней существует 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка.
- (3) Если p -разрешимая группа не p -замкнута, то в ней существует p -нильпотентная pd -подгруппа Шмидта.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теоремы Фробениуса (см. [2], теорема IV.5.4).

Докажем второе утверждение. В [5] имеется доказательство, основанное на теореме Судзуки о простых группах с независимыми силовскими 2-подгруппами. Приведем другое доказательство. По индукции, все собственные в G подгруппы 2-замкнуты и группа G не бипримарна по п. 1. Если группа G разрешима, то все бипримарные холловы подгруппы 2-замкнуты, поэтому и группа G 2-замкнута. Приходим к противоречию. Значит, G неразрешима. Ясно, что фактор-группа $G/\Phi(G)$ — простая. Пусть X — класс сопряженных инволюций в $G/\Phi(G)$. По теореме IX.7.8 в [6], существуют две инволюции x и $y \in X$

такие, что их порождение $\langle x, y \rangle$ не является 2-группой. Хорошо известно, что $\langle x, y \rangle$ — диэдральная группа порядка $2|x y|$ (см. [4], теорема 2.49), которая не будет 2-замкнутой. Опять приходим к противоречию.

Докажем третье утверждение. По теореме 5.3.13 в [7], группа G является $D_{\{p,q\}}$ -группой для любого $q \in \pi(G)$. Пусть G не p -замкнута. Тогда существует $q \in \pi(G)$ такое, что $\{p, q\}$ -холлова подгруппа H из группы G не p -замкнута. Ясно, что H не q -нильпотентна. По п. 1 в H существует p -нильпотентная pd -подгруппа Шмидта.

Для любого нечетного p аналог утверждения 2 леммы 3 неверен. При $p = 3$ контр-примером служит простая группа $SL(2, 2^n)$ при любом нечетном n , а при $p \geq 5$ — группа $PSL(2, p)$.

Лемма 4. Если $G \in H(\mathfrak{N})$, то G дисперсивна.

Доказательство. Вначале докажем, что если $G \in H(\mathfrak{N})$ и p — наименьшее в $\pi(G)$, то либо G p -замкнута, либо p -нильпотентна. Предположим, что $p = 2$. Если группа G не 2-замкнута, то, по утверждению 2 леммы 3, в G существует 2-нильпотентная подгруппа Шмидта S четного порядка. Силовская 2-подгруппа в S циклическая. Так как S ненильпотентна и $G \in H(\mathfrak{N})$, то S холлова, поэтому силовская 2-подгруппа в G циклическая. Теперь G 2-нильпотентна по теореме IV.2.8 в [2]. Пусть $p > 2$. Тогда G разрешима. Если группа G не p -замкнута, то, по утверждению 3 леммы 3, в G существует p -нильпотентная pd -подгруппа Шмидта T . Силовская p -подгруппа P в T циклическая. Так как T ненильпотентна и $G \in H(\mathfrak{N})$, то T холлова и P — силовская p -подгруппа группы G . Теперь G p -нильпотентна по теореме IV.2.8 в [2].

Итак, если $G \in H(\mathfrak{N})$ и p — наименьшее в $\pi(G)$, то либо G p -замкнута, либо p -нильпотентна. Теперь для доказательства дисперсивности воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть p — наименьшее в $\pi(G)$. Если силовская p -подгруппа P нормальна в G , то $G/P \in H(\mathfrak{N})$ по лемме 1, а по индукции G/P дисперсивна. Поэтому G дисперсивна. Если G p -нильпотентна, то в G имеется нормальная подгруппа K и G/K изоморфна силовской p -подгруппе группы G . По лемме 1, $K \in H(\mathfrak{N})$, а по индукции подгруппа K дисперсивна. Поэтому G дисперсивна. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $G \in H(\mathfrak{N})$ и $p, q \in \pi(G)$, $p \neq q$. Тогда $\{p, q\}$ -холлова подгруппа в G либо нильпотентна, либо группа Шмидта.

Доказательство. Ввиду леммы 4, группа G разрешима, поэтому в ней существует $\{p, q\}$ -холлова подгруппа K . Каждая собственная подгруппа в K либо силовская, либо нильпотентная $\{p, q\}$ -подгруппа ввиду условия $G \in H(\mathfrak{N})$. Значит, K либо нильпотентна, либо группа Шмидта.

Лемма 6. Пусть $n \geq 2$ — натуральное, p — простое и π — конечное множество простых чисел q таких, что q делит $p^n - 1$ и q не делит $p^{n_1} - 1$ для всех $1 \leq n_1 < n$. Тогда группа $GL(n, p)$ содержит циклическую π -холлову подгруппу.

Доказательство. Группа $G = GL(n, p)$ имеет, очевидно, порядок, равный $p^{n(n-1)/2} \times (p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \cdots (p^2 - 1)(p - 1)$. По теореме II.7.3 в [2], группа G содержит циклическую подгруппу T порядка $p^n - 1$. Ее π -холлова подгруппа T_π будет, очевидно, π -холловой подгруппой группы G ввиду того, что q не делит $p^{n_1} - 1$ для всех $q \in \pi$ и всех $1 \leq n_1 < n$.

Доказательство теоремы 1. Докажем первое утверждение. Пусть $G \in H(\mathfrak{N})$ и $p \in \pi(G)$. Предположим, что силовская p -подгруппа P ненормальна в G . По лемме 4, группа G разрешима, поэтому в G существует $\{p, q\}$ -холлова подгруппа для любого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, см. [7], теорема 5.3.13. Подгруппа P ненормальна в G , значит существует не p -замкнутая $\{p, q\}$ -холлова подгруппа K для некоторого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. В K имеется, по лемме 3, q -замкнутая подгруппа Шмидта, которая совпадает с K ввиду условия $G \in H(\mathfrak{N})$. По свойствам групп Шмидта (лемма 2, п. 1) силовская p -подгруппа в K циклическая. Так как K — холлова подгруппа в G , то силовская p -подгруппа из K будет силовской в G . Итак P — циклическая.

Пусть P_1 — максимальная подгруппа из P . Если $P_1 = 1$, то $P_1 \subseteq Z(G)$. Пусть $P_1 \neq 1$. Для любого простого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ в G существует $\{p, q\}$ -холлова подгруппа PQ , где Q — некоторая силовская q -подгруппа из G . Если PQ нильпотентна, то $Q \subseteq C_G(P_1)$. Если PQ ненильпотентна, то PQ является группой Шмидта по лемме 5. Если PQ p -замкнута, то P имеет простой порядок (лемма 2, п. 3), получаем противоречие. Значит, PQ q -замкнута и $P_1 \subseteq Z(PQ)$ (лемма 2, п. 1), то есть $Q \subseteq C_G(P_1)$. Итак, $C_G(P_1)$ содержит некоторую силовскую q -подгруппу для каждого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Так как $P \subseteq C_G(P_1)$, то $C_G(P_1) = G$ и $P_1 \subseteq Z(G)$.

Докажем второе утверждение. Пусть силовская p -подгруппа P нормальна в G и P не является минимальной нормальной в G подгруппой, в частности, $|P| > p$. По теореме Шура–Цассенхауза, в G существует p' -холлова подгруппа H . Если $G = P \times H$, то H ненильпотентна и в H существует подгруппа Шмидта S . Теперь для подгруппы P_1 простого порядка из P подгруппа $P_1 \times H$ будет ненильпотентной и нехолловой, получаем противоречие. Значит, допущение $G = P \times H$ неверно, и в H существует силовская подгруппа Q , такая, что $[P]Q$ ненильпотентна. По лемме 5, $[P]Q$ — подгруппа Шмидта. Согласно предположению, P не является минимальной нормальной в G подгруппой, поэтому P не будет минимальной нормальной подгруппой в $[P]Q$. Из свойств групп Шмидта (лемма 2, п. 3) следует, что P неабелева и

$$Z(P) = P' = \Phi(P).$$

Так как $[P/Z(P)](QZ(P)/Z(P))$ — подгруппа Шмидта с минимальной нормальной подгруппой $P/Z(P)$, то $P/Z(P)$ — минимальная нормальная в $G/Z(P)$ подгруппа.

Докажем третье утверждение. Предположим, что P_1 не содержится в $Z(G)$. Тогда $|P_1| \geq p$, $|G_p| \geq p^2$ и силовская p -подгруппа G_p нормальна по уже доказанному утверждению 1 теоремы. Пусть G_q — произвольная силовская q -подгруппа группы G , $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. По лемме 5, подгруппа $G_p G_q$ либо нильпотентна, либо группа Шмидта. Предположим, что $G_p G_q$ нильпотентна для всех $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Тогда $G = G_p \times G_{p'}$. Так как G не нильпотентна, то подгруппа $G_{p'}$ не нильпотентна, а значит в $G_{p'}$ существует подгруппа Шмидта S . Но теперь подгруппа $P_1 \times S$ будет не холловой в G и не нильпотентной, получаем противоречие. Значит, допущение неверно, и существует $r \in \pi(G) \setminus \{p\}$ такое, что $G_p G_r$ не нильпотентна. Но теперь $G_p G_r$ — p -замкнутая группа Шмидта с нормальной p -подгруппой P_1 . По свойствам подгрупп Шмидта (лемма 2, п. 5), $P_1 \subseteq Z(G_p G_r)$. Итак, $P_1 \subseteq Z(G_p)$ и $G_r \subseteq C_G(P_1)$ для всех $r \in \pi(G) \setminus \{p\}$, у которых $G_p G_r$ не нильпотентна. Если $G_p G_r$ нильпотентна, то $G_q \subseteq C_G(P_1)$. Значит, $P_1 \subseteq Z(G)$.

Докажем четвертое утверждение. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{E}$ — классы всех абелевых, нильпотентных и всех конечных групп соответственно, а

$$\mathfrak{N}\mathfrak{A} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{N}\}$$

— произведение классов $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ (см. [4], с. 167). Здесь $G^{\mathfrak{A}}$ — $\mathfrak{A}$ -корадикал группы, то есть наименьшая нормальная подгруппа, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{A}$. Ясно, что $G^{\mathfrak{A}} = G'$ — коммутант группы G , поэтому класс $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ состоит из всех групп с нильпотентным коммутантом, и этот класс является насыщенной формацией. С помощью индукции по порядку группы покажем, что $H(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Допустим противное, и пусть G — группа наименьшего порядка, принадлежащая разности $H(\mathfrak{N}) \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Группа G разрешима по лемме 4, и для каждой ее нормальной подгруппы $N \neq 1$, в силу леммы 1, верно, что $G/N \in H(\mathfrak{N})$. По индукции, $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ — насыщенная формация, то группа G примитивна ([4], с. 143). По теореме 4.42 в [4],

$$F = F(G) = C_G(F) \simeq E_{p^n}$$

— минимальная нормальная в G подгруппа, а по уже доказанному утверждению 3 теоремы F — силовская подгруппа группы G .

Если $n = 1$, то G/F абелева как группа автоморфизмов группы F простого порядка p , и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Пусть $n \geq 2$. Для каждого $q \in \pi = \pi(G/F)$ подгруппа $[F]G_q$ является подгруппой Шмидта по лемме 5, поскольку $[F]G_q$ — холлова ненильпотентная подгруппа. По п. 2 леммы 2, число q делит $p^n - 1$ и не делит $p^{n_1} - 1$ для всех $1 \leq n_1 < n$. Группа G/F изоморфна подгруппе $GL(n, p)$, в которой имеется циклическая π -холлова подгруппа T по лемме 6. По теореме 5.3.2 в [7], G/F содержится в некоторой подгруппе T^x , $x \in GL(n, p)$. Поэтому G/F циклическая, и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Теперь проверим, что $Z(G/Z(G)) = 1$. Допустим противное, и пусть $U/Z(G)$ — подгруппа простого порядка t из $Z(G/Z(G))$, а T — силовская t -подгруппа из U . Так как U нильпотентна, то T нормальна в G . Поскольку T не содержится в $Z(G)$, то T — силовская подгруппа группы G по утверждению 3 теоремы. Так как $TZ(G)/Z(G) \simeq T/T \cap Z(G)$ циклическая, то, по лемме 1.56 в [4], подгруппа T абелева. Если G t -нильпотентна, то G t -разложима и $T \subseteq Z(G)$, получаем противоречие. Значит, G не t -нильпотентна, и существует t -замкнутая td -подгруппа Шмидта S . Подгруппа $SZ(G)/Z(G)$ является td -подгруппой, а по лемме 2 $SZ(G)/Z(G)$ будет подгруппой Шмидта в $G/Z(G)$. Это противоречит тому, что $TZ(G)/Z(G) \subseteq Z(G/Z(G))$. Поэтому допущение неверно, и $Z(G/Z(G)) = 1$.

Пусть $G \in H(\mathfrak{N})$ и $Z(G) = 1$. Из уже доказанного утверждения 3 теоремы следует, что каждая минимальная нормальная в G подгруппа является силовской в G подгруппой. Поэтому $F(G) = A$ — абелева холлова подгруппа, у которой каждая силовская подгруппа — минимальная нормальная в G подгруппа. Пусть B — дополнение к A в G , оно существует по теореме Шура–Цассензауза (см. [4], с. 136). Из утверждения 1 теоремы следует, что порядок B свободен от квадратов. Поскольку $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то B абелева, поэтому она циклическая. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Если центр группы единичен, то следствие справедливо ввиду утверждения 4 теоремы. Пусть $Z(G) \neq 1$ и N — подгруппа простого порядка p из $Z(G)$. К фактор-группе G/N применима индукция, поэтому

$$\bar{G} = [A/N](B/N),$$

где A/N — нильпотентная холлова подгруппа, а B/N — циклическая подгруппа. Поскольку $N \subseteq Z(G)$, то подгруппы A и B нильпотентны, (см. [4], лемма 3.15). Если A холлова, то по теореме Шура–Цассензауза $B = N \times B_1$ и $G = [A]B_1$ является полупрямым произведением нильпотентной холловой подгруппы A и циклической подгруппы B_1 , что и требуется доказать. Пусть A — не холлова подгруппа, тогда $A = N \times A_1$, где A_1 — нильпотентная нормальная в G холлова подгруппа, и $G = [A_1]B$. Пусть B_1 — произведение

всех нормальных в G силовских подгрупп из B , а B_2 — произведение всех ненормальных в G силовских подгрупп из B . Ясно, что $G = [A \times B_1]B_2$, $A \times B_1$ — нормальная в G холлова подгруппа, а все силовские подгруппы в B_2 циклические по утв. 1 теоремы. Так как B_2 нильпотентна, то B_2 циклическая. Итак, группа G содержит нильпотентную холлову подгруппу, фактор-группа по которой циклическая. Из утверждения 4 теоремы следует, что производная длина группы не выше 3.

Список литературы

1. Шмидт О. Ю., Группы, все подгруппы которых специальные. *Математический сборник* (1924) **31**, 366–372.
2. Huppert B., *Endliche Gruppen, I*. Springer, Berlin, 1967.
3. Монахов В. С., Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения. В сб.: *Труды Украинского математического конгресса*. Институт математики, Киев, 2002, с. 81–90.
4. Монахов В. С., *Введение в теорию конечных групп и их классов*. Вышэйшая школа, Минск, 2006.
5. Беркович Я. Г., Теорема о нильпотентных разрешимых подгруппах конечной группы. В сб.: *Конечные группы*. Наука и техника, Минск, 1966, с. 24–39.
6. Huppert B., Blackburn N., *Finite groups, II*. Springer, Berlin, 1982.
7. Suzuki M., *Group theory, II*. Springer, New York, 1986.

Статья поступила 21.05.2011.