Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Саргсян, Число разностей в группах простого порядка,
Дискрет. матем., 2013, том 25, выпуск 1, 152–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 06:12:38

Число разностей в группах простого порядка

© 2013 г. В. Г. Саргсян

Подмножество A элементов группы G называется разностью, если существует такое подмножество $B \subseteq G$, что $A = B - B$, где

$$B - B = \{x - y \mid x, y \in B\}.$$

Получена асимптотика логарифма числа разностей в группах простого порядка.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-00958-А.

1. Введение

Пусть Z_p — группа вычетов по простому модулю p , и $A \subseteq Z_p$. Обозначим

$$A + A = \{x_1 + x_2 \mid x_1, x_2 \in A\},$$

$$A - A = \{x_1 - x_2 \mid x_1, x_2 \in A\},$$

$$-A = \{-x \mid x \in A\}.$$

Пусть $k \geq 0$ и $l \geq 0$ — целые числа, удовлетворяющие условию $k + l \geq 2$. Подмножество $A \subseteq Z_p$ называется (k, l) -суммой, если существует подмножество $B \subseteq Z_p$ такое, что

$$A = \underbrace{B + \dots + B}_k - \underbrace{B - \dots - B}_l.$$

В частности, $(1, 1)$ -сумму назовем разностью. Семейство (k, l) -сумм в Z_p обозначим через $\mathbf{SS}_{k,l}(Z_p)$.

В 2004 г. Б. Грин и И. Ружа доказали следующее утверждение [1].

Теорема 1. Пусть p — простое число. Тогда справедливы оценки

$$p^2 2^{p/3} \ll |\mathbf{SS}_{2,0}(Z_p)| \leq 2^{p/3 + \kappa(p)},$$

где $\kappa(p)/p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, причем

$$\kappa(p) \ll p(\log \log p)^{2/3}(\log p)^{-1/9};$$

здесь и далее логарифмы берутся по основанию два.

В 2012 г. автором доказано следующее утверждение [2].

Теорема 2. Пусть p — достаточно большое простое число, $k \geq 0$ и $l \geq 0$ — целые числа, удовлетворяющие условию $k + l \geq 2$. Тогда выполняются неравенства

$$C_{k,l} 2^{p/(2(k+l)-1)} \leq |\mathbf{SS}_{k,l}(\mathbf{Z}_p)| \leq 2^{p/(k+l+1)+o(p)},$$

где $C_{k,l}$ — некоторая положительная константа.

Целью настоящей работы является улучшение оценок в теореме 2 на случай $k = 1$ и $l = 1$. Мы докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть p — простое число. Тогда справедливы соотношения

$$p^2 2^{p/3} \ll |\mathbf{SS}_{1,1}(\mathbf{Z}_p)| \leq 2^{p/3+\kappa(p)}, \quad (1)$$

где $\kappa(p)/p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, причем

$$\kappa(p) \ll p(\log \log p)^{2/3}(\log p)^{-1/9}.$$

Заметим, что при достаточно больших p из (1) вытекает асимптотика логарифма числа разностей в $\mathbf{Z}_p$.

2. Определения и вспомогательные утверждения

При доказательстве теоремы 3 нам понадобятся следующие понятия и вспомогательные утверждения.

Лемма 1 ([1]). Пусть p — достаточно большое простое число, а $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ — две арифметические прогрессии длины $\lfloor p/3 \rfloor$ в $\mathbf{Z}_p$ с разностями, равными, соответственно, d_1, d_2 и при этом $d_1 \neq \pm d_2$. Тогда

$$|\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2| \leq \frac{p}{4} + 4.$$

Пусть A_1, A_2 — непустые подмножества группы $\mathbf{Z}_p$. Обозначим через $S_h(A_1, A_2)$ множество элементов $x \in \mathbf{Z}_p$, для которых число представлений в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$, не меньше h .

Лемма 2 ([2]). Пусть p — простое число, A_1, A_2 — непустые подмножества группы $\mathbf{Z}_p$, и $h > 0$ выбрано так, что

$$(hp)^{1/2} \leq \min(|A_1|, |A_2|).$$

Тогда справедлива оценка

$$|S_h(A_1, A_2)| \geq \min(p, |A_1| + |A_2|) - 2(hp)^{1/2}.$$

Пусть L — натуральное число. Для каждого $y \in \mathbf{Z}_p$ определим разбиение $R_{y,L}$ группы $\mathbf{Z}_p$ на интервалы вида

$$J_i^y = [iL + 1 + y, (i + 1)L + y], \quad 0 \leq i \leq \lfloor p/L \rfloor - 1.$$

Все интервалы J_i^y из $R_{y,L}$ имеют длину L , а множество

$$J_y = \mathbf{Z}_p \setminus \bigcup_i J_i^y$$

имеет мощность $p - L \lfloor p/L \rfloor < L$. Множество $A \subseteq \mathbf{Z}_p$ назовем L -гранулированным, если для некоторого $d \in \mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$ и разбиения $R_{y,L}$ группы $\mathbf{Z}_p$ множество $\{da \mid a \in A\}$ является объединением нескольких интервалов J_i^y разбиения $R_{y,L}$, отличных от J_y . Через $G_L(\mathbf{Z}_p)$ обозначим множество всех L -гранулированных подмножеств группы $\mathbf{Z}_p$.

Лемма 3 ([2]). *Справедлива оценка*

$$|G_L(\mathbf{Z}_p)| \leq p 2^{p/L}.$$

Лемма 4 ([2]). *Пусть $A \subseteq \mathbf{Z}_p$, $|A| = \alpha p$, и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — положительные действительные числа, L — натуральное число, p — простое число, такое, что*

$$p > (4L)^{256\alpha^2\varepsilon_1^{-4}\varepsilon_2^{-2}\varepsilon_3^{-1}}.$$

Тогда существует подмножество $A' \subseteq \mathbf{Z}_p$ со следующими свойствами:

- (i) A' является L -гранулированным;
- (ii) $|A \setminus A'| \leq \varepsilon_1 p$;
- (iii) *множество $A - A$ содержит все элементы $x \in \mathbf{Z}_p$, для которых число представлений в виде $x = x_1 - x_2$, $x_1, x_2 \in A'$, не меньше $\varepsilon_2 p$, за исключением не более чем $\varepsilon_3 p$ элементов.*

3. Нижняя оценка числа разностей в $\mathbf{Z}_p$

Пусть

$$L = \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor - 1$$

и

$$\mathcal{P} = \{a + d, a + 2d, \dots, a + (4L + 1)d\}$$

— арифметическая прогрессия длины $4L + 1$ в $\mathbf{Z}_p$. Будем говорить, что подмножество $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{Z}_p$ точно содержит $\mathcal{P}$, если $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{X}$ и по крайней мере одно из a и $a + (4L + 2)d$ не принадлежит $\mathcal{X}$. Положим

$$\text{SS}_{1,1}(\mathbf{Z}_p, A') = \{A \mid A \in \text{SS}_{1,1}(\mathbf{Z}_p) \text{ и } A \text{ точно содержит } A'\}.$$

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{Z}_p$ — произвольная арифметическая прогрессия длины $4L + 1$. Тогда существует положительная константа c , такая, что*

$$|\text{SS}_{1,1}(\mathbf{Z}_p, \mathcal{P})| \geq c 2^{p/3}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$\mathcal{P} = [-2L, 2L].$$

Пусть $B \subseteq [-L, L] \setminus \{0\}$. Определим множество $A(B)$ равенством

$$A(B) = (B \cup \{2L + 1\}) - (B \cup \{2L + 1\}).$$

Нетрудно убедиться, что различные $B \subseteq [-L, L] \setminus \{0\}$ порождают различные множества $A(B)$, и ни одно из $-(2L + 1)$ и $2L + 1$ не принадлежит $A(B)$.

Множество $B \subseteq [-L, L] \setminus \{0\}$ определим следующим образом:

$$B = B(C) = [-L, -L + 15] \cup [-15, -1] \cup [1, 15] \cup [L - 15, L] \cup C,$$

где элементы множества C выбраны из $[-L + 16, -16] \cup [16, L - 16]$ случайно с вероятностью $1/2$, независимо друг от друга. Заметим, что

$$[-2L, -2L + 30] \cup [-30, 30] \cup [2L - 30, 2L] \subseteq B - B. \quad (2)$$

Будем говорить, что пары (x_1, x_2) и (y_1, y_2) не пересекаются, если

$$\{x_1, x_2\} \cap \{y_1, y_2\} = \emptyset.$$

Покажем, что для любого $x \in [31, L]$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(x \notin B - B) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor x/2 \rfloor}. \quad (3)$$

Положим

$$\mathcal{Q}_L(x) = \{(y_{1i}, y_{2i}) \mid x = y_{1i} - y_{2i}, y_{1i}, y_{2i} \in [-L, L] \setminus \{0\}, i = 1, \dots, m\},$$

и

$$\mathcal{D}_L(x) = \{(z_{1j}, z_{2j}) \in \mathcal{Q}_L(x) \mid \{z_{1i}, z_{2i}\} \cap \{z_{1k}, z_{2k}\} = \emptyset, i \neq k, j, i, k = 1, \dots, n\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x \notin B - B) &\leq \mathbf{P}((y_{11} - y_{21} \notin B - B) \& \dots \& (y_{1m} - y_{2m} \notin B - B)) \\ &\leq \mathbf{P}((z_{11} - z_{21} \notin B - B) \& \dots \& (z_{1n} - z_{2n} \notin B - B)) \\ &= \mathbf{P}((z_{11} \notin B \vee z_{21} \notin B) \& \dots \& (z_{1n} \notin B \vee z_{2n} \notin B)) \\ &= \mathbf{P}((z_{11} \notin B) \vee (z_{21} \notin B)) \cdots \mathbf{P}((z_{1n} \notin B) \vee (z_{2n} \notin B)) \\ &= \mathbf{P}(\overline{(z_{11} \in B) \& (z_{21} \in B)}) \cdots \mathbf{P}(\overline{(z_{1n} \in B) \& (z_{2n} \in B)}) \\ &= (1 - \mathbf{P}((z_{11} \in B) \& (z_{21} \in B))) \cdots (1 - \mathbf{P}((z_{1n} \in B) \& (z_{2n} \in B))). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда и из того, что для любого $x \in [31, L]$ существует по крайней мере $\lfloor x/2 \rfloor$ непересекающихся пар, вытекает неравенство (3).

Аналогично с (3), для любого $x \in [31, L]$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(-x \notin B - B) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor x/2 \rfloor}.$$

Также нетрудно убедиться, что для любого $x \in [L + 1, 2L - 31]$ справедливы неравенства

$$\mathbf{P}(x \notin B - B) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor (2L-x)/2 \rfloor}$$

и

$$\mathbf{P}(-x \notin B - B) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor (2L-x)/2 \rfloor}.$$

Из вышесказанного следует, что

$$\mathbf{P}(\mathcal{P} \not\subseteq B - B) \leq 4 \sum_{x \geq 31} \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor x/2 \rfloor}. \quad (5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{P} \not\subseteq B - B) &= \mathbf{P}(-2L \notin B - B) \vee \dots \vee (2L \notin B - B) \leq \sum_{x=-2L}^{2L} \mathbf{P}(x \notin B - B) \\ &= \sum_{x=-2L+31}^{-31} \mathbf{P}(x \notin B - B) + \sum_{x=31}^{2L-31} \mathbf{P}(x \notin B - B) \\ &\leq 4 \sum_{x=31}^L \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor x/2 \rfloor} \leq 4 \sum_{x \geq 31} \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor x/2 \rfloor}. \end{aligned}$$

Заметим, что правая часть неравенства (5) не превосходит $1/2$. Отсюда следует, что существует по крайней мере 2^{2L-63} подмножеств $B \subseteq [-L, L] \setminus \{0\}$, таких, что $\mathcal{P} \subseteq B - B$. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subseteq \mathbf{Z}_p$ — две различные арифметические прогрессии длины $4L + 1$ с разностями, равными, соответственно, d_1 и d_2 . Покажем, что количество множеств, которые точно содержат $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, есть $o(2^{p/3})$. Заметим, что при этом $d_1 \neq \pm d_2$. В силу леммы 1 получаем, что

$$|\overline{\mathcal{P}}_1 \cap \overline{\mathcal{P}}_2| \leq \frac{p}{4} + 20,$$

то есть

$$|\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2| \geq \frac{3}{4}p - 20.$$

Отсюда следует, что число множеств, которые точно содержат $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, есть $o(2^{p/3})$.

Итак, применяя лемму 5 для каждого из всевозможных $p(p-1)/2$ вариантов арифметических прогрессий длины $4L + 1$, получаем нижнюю оценку.

Таким образом, нижняя оценка теоремы 3 доказана.

4. Верхняя оценка числа разностей в $\mathbf{Z}_p$

В этом разделе оценим сверху величину $|\mathbf{SS}_{1,1}(\mathbf{Z}_p)|$. Заметим, что число подмножеств группы $\mathbf{Z}_p$ мощности, не превышающей $p/17$, есть $O(2^{p/3})$.

Пусть $A \subseteq \mathbf{Z}_p$,

$$|A| = \alpha p > \frac{p}{17},$$

и p — простое число, такое, что для натурального L и положительных действительных чисел ε_1 , ε_2 и ε_3 выполняется неравенство

$$p > (4L)^{256\alpha^2\varepsilon_1^{-4}\varepsilon_2^{-2}\varepsilon_3^{-1}}.$$

В силу леммы 4, существует подмножество A' , обладающее свойствами (i)–(iii). Оценим величину $|\mathbf{SS}_{1,1}(\mathbf{Z}_p)|$ путем подсчета числа соответствующих пар $(A', A - A)$. Рассмотрим два случая: $|A'| \geq p/3$ и $|A'| < p/3$.

Пусть $|A'| \geq p/3$. В силу утверждения (iii) леммы 4, множество $\overline{A - A}$ является подмножеством объединения множества $\overline{S_{\varepsilon_2 p}(A', -A')}$ и некоторого подмножества группы $\mathbf{Z}_p$ мощности, не превышающей $\varepsilon_3 p$ и, следовательно,

$$|\overline{A - A}| \leq |\overline{S_{\varepsilon_2 p}(A', -A')}| + \varepsilon_3 p. \quad (6)$$

В силу леммы 2 имеем

$$|S_{\varepsilon_2 p}(A', -A')| \geq \min(p, 2|A'|) - 2(\varepsilon_2 p^2)^{1/2}.$$

При $|A'| \geq p/3$ получаем, что

$$\begin{aligned} |\overline{S_{\varepsilon_2 p}(A', -A')}| &= p - |S_{\varepsilon_2 p}(A', -A')| \\ &\leq \frac{p}{3} + 2\varepsilon_2^{1/2} p. \end{aligned}$$

Отсюда и из (6) следует, что

$$|\overline{A - A}| \leq \frac{p}{3} + 2\varepsilon_2^{1/2} p + \varepsilon_3 p.$$

Таким образом, учитывая, что множество $\overline{A - A}$ однозначно определяет множество $A - A$, получаем, что число способов выбора $A - A$ при заданном A' мощности, превышающей $p/3$, не превосходит $2^{p/3 + (2\varepsilon_2^{1/2} + \varepsilon_3)p}$.

Пусть $|A'| < p/3$. В силу утверждения (ii) леммы 4,

$$|A \setminus A'| \leq \varepsilon_1 p.$$

Отсюда, учитывая, что каждое множество $A \subseteq \mathbf{Z}_p$ порождает ровно одно множество вида $A - A$, получаем, что число способов выбора $A - A$ при заданном A' мощности, не превышающей $p/3$, не превосходит $2^{p/3 + \varepsilon_1 p}$.

Из вышесказанного, с учетом леммы 3 и леммы 4 с параметрами

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^2, \quad L = 1 + \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor,$$

получаем, что

$$|\mathbf{SS}_{1,1}(\mathbf{Z}_p)| \leq 2^{p/3 + C\varepsilon p}.$$

Несложно убедиться, что можно взять

$$\varepsilon = O((\log \log p)^{2/3} (\log p)^{-1/9}).$$

Таким образом, верхняя оценка, а значит, и теорема 3 доказаны.

Список литературы

1. Green B., Ruzsa I., Counting sumsets and sum-free sets modulo a prime. *Studia Sci. Math. Hungarica* (2004) **41**, 285–293.
2. Sargsyan V., Counting (k, l) -sumsets in groups of a prime order. *Acta Universitatis Sapientiae, Informatica* (2012) **4**, №1, 33–47.

Статья поступила 01.02.2013.