Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Кутьин, p -Матроиды, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 3, 146–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:23:48

p-Матроиды

© 2005 г. А. М. Кутьин

Исследованы свойства *c*-матроидов в классе конечно *c*-порожденных полумодулярных решеток. Этот класс существенно шире такого основного объекта теории матроидов, как класс геометрических решеток, ассоциированных с простыми матроидами. Естественным образом *c*-матроиды появляются также при построении равномерных кодов.

1. Введение

Многие важные проблемы теории упорядоченных множеств (*y*-множеств) и решеток, а также ее приложений, особенно к задачам комбинаторного характера, приводят к необходимости использования методов и результатов теории матроидов (см. [1–5, 8–14, 17, 18]). Указанные причины стимулировали различные формы распространения понятий теории матроидов на новые классы структур, не входящих в число объектов теории матроидов (см. [1, 8, 9, 13], ср. также с [2–5, 10–12]). В русле этого направления в настоящей статье введены и исследованы прежде всего свойства *c*-матроидов в классе конечно *c*-порожденных полумодулярных решеток (см. раздел 3). Последний класс существенно шире такого основного объекта теории матроидов, как класс геометрических решеток $L\gamma$, ассоциированных с простыми матроидами. Одновременно исследование указанного класса полумодулярных решеток имеет непосредственное отношение к проблеме 25 в [6], состоящей в исследовании дедекиндовых структур, в которых каждый элемент представляется в форме $a = \sum_{i=1}^{n(a)} a_i$, где a_i таковы, что La_i — цепи, в частности, конечные; напомним, что дедекиндовы структуры — это модулярные решетки, а La_i — главный идеал, порожденный элементом a_i , то есть $\langle a_i \rangle = I(a_i)$, ясно, что $I(a_i)$ — подрешетка. Поэтому можно говорить как о теоретической, так и прикладной значимости теории *p*-матроидов, так как, например, *c*-матроиды появляются естественным образом не только как простые матроиды в частном случае геометрических решеток, но и при построении равномерных кодов [15, 16].

Элемент *y*-множества называется *c*-элементом (или циклом, см. [7]), если определяемый им главный порядковый идеал $\text{Id}(c)$ является цепью. Значит, согласно [19], *c*-элемент является неразложимым (в сумму) элементом, однако обратное неверно. Термин цикл идет из структурной теории групп, где рассматриваются вопросы представления группы прямым произведением циклических групп [7]. Так как в теории матроидов также используется этот термин, однако в ином смысле, будем говорить лишь о *c*-элементе, обозначать его буквой *c*, так что *c* всегда означает *c*-элемент *y*-множества, в частности, решетки. Все другие определения и обозначения те же, что и в [1–4, 19] или приведены в данной статье. Так, говоря о *p*-матроиде, мы имеем ввиду *y*-множество с некоторым оператором

замыкания и совокупностью множеств, в которой выполняется аксиома замены в той или иной форме, однако в данной статье мы ограничиваемся классом решеток и частными случаями *p*-матроидов, ассоциированных именно с решетками (см. раздел 4).

2. Операторы замыкания

Пусть Lc — порожденная c -элементами (далее c -порожденная) решетка, C — множество всех c -элементов из Lc , а Lc_f — конечно c -порожденная решетка, то есть для каждого $u \in Lc_f$ есть конечное подмножество $C_f \subseteq C \subseteq Lc_f$ такое, что $u = \sum_{c_k \in C_f} c_k$.

Замечание 1. Ниже будем рассматривать полумодулярные сверху решетки, которые обычно называются полумодулярными. Решетка (даже модулярная) конечно c -порожденная не обязательно конечна, примерами могут служить M_ω или цепь $\mathbb{N}$. Более того, Lc_f (даже дистрибутивная) не обязательно имеет конечную длину. Примерами могут служить $\mathbb{N}$ или любая конечная цепь, $Lc_f \cong \mathbb{N} \times 1$, к тому же в $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times 1$ не существует точной верхней грани (т.в.г.) для множества C .

Пусть $C_1^\wedge, C_1^\wedge \subseteq C \subseteq Lc, C_1^\wedge \neq \emptyset$, — такое подмножество c -элементов из C , что если $c' \leq c \in C_1^\wedge$, то $c' \in C_1^\wedge$. Значит, $C_1^\wedge$ есть порядковый идеал $\text{Id}(C_1)$, порожденный C_1 в Lc , то есть $C_1^\wedge = \text{Id}(C_1) \subseteq C$. Ясно, что

$$(\Lambda 1) \quad C_1 \subseteq C_1^\wedge,$$

$$(\Lambda 2) \quad C_1 \subseteq C_2 \rightarrow C_1^\wedge \subseteq C_2^\wedge, \text{ где } C_2 \subseteq C,$$

$$(\Lambda 3) \quad C_1^{\wedge\wedge} = C_1^\wedge.$$

Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Оператор $^\wedge: C_1 \rightarrow C_1^\wedge$ является оператором замыкания в Lc .

Множество $C_1 = C_1^\wedge$ называется замкнутым. Конечно, предложение 1 и ему подобные верны в любой решетке, содержащей множество C , но такая общность соответствующих утверждений далее не потребуется, хотя в определениях она будет присутствовать (так всюду ниже C есть множество всех c -элементов из L).

С Lc всегда ассоциировано y -множество $V(Lc) = \{C; \leq\}$, где порядок $\leq$ в $V(Lc)$ индуцирован порядком в Lc . При этом равенство $c = c_1 c_2$ в Lc влечет неравенства $c \leq c_1, c_2$. Значит, $V(Lc)$ можно считать нижней полурешеткой и вложить $V(Lc)$ уже как нижнюю полурешетку в Lc , налагая ее на $C \cong V(Lc)$. Теперь с учетом $\Lambda 1$ – $\Lambda 3$ получаем следующее утверждение.

Предложение 2. Оператор $\text{Id}: C' \rightarrow \text{Id}(C')$ является оператором замыкания в нижней полурешетке $V(Lc)$, где $C' \subseteq C \subseteq Lc, C' \neq \emptyset$.

Пусть теперь (в свете замечания 1) Lc_f — конечно c -порожденная решетка, в которой всякое подмножество $C' \neq \emptyset$ множества C всех ее c -элементов имеет т.в.г. Ясно, что в Lc_f есть $\hat{1}$. Примером Lc_f является любая полумодулярная c -порожденная решетка конечной длины, такая Lc_f содержит и $\hat{0}$, и $\hat{1}$ ($\hat{0}$ есть c -элемент по определению), а классическим примером таких решеток является любая геометрическая решетка $L\gamma$ (у нас в согласии с [2, 3] решетка $L\gamma$ является решеткой конечной длины в отличие от [4]).

Пусть далее $C' \subseteq C \subseteq Lc_F$, $\emptyset \neq C' = \{c_j\}_{j \in J}$, $\bar{C}' = \{c: c \leq d = \bigvee_{c_j \in C'} c_j, c \in C\}$, так что в множестве $\bar{C}'$ лежат только c -элементы $|J| = |C'| \geq 1$, $\bar{C}' = d^\Delta \cap C$, где d^Δ — нижний конус в Lc_F , определяемый элементом d или, что то же самое, d^Δ — главный порядковый идеал $\text{Id}(d)$ в Lc_F , причем $\text{Id}(d) = I(d)$, $I(d)$ — главный идеал в Lc_F , а $\bar{C}'$ — порядковый идеал Lc_F .

Так как число слагаемых c_j в $\bigvee_{c_j \in C'} c_j$ можно считать конечным в силу конечной c -порожденности и поглощения большим слагаемым меньшего, справедливо соотношение $c_j + c_i = c_j \iff c_j \geq c_i$, вместо $\bigvee_{c_j \in C'} c_j$ будем писать $\sum_{j \in J} c_j$.

Рассмотрим оператор $\varphi: P(C) \rightarrow P(C)$ такой, что $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ и $\varphi(C') = C'$, если C' имеет т.в.г., а противном случае значение φ не определено, $C \subseteq L$. Ясно, что в $L = Lc_F$ при этом выполняются условия

$$(\varphi 1) \quad C' \subseteq \bar{C}',$$

$$(\varphi 2) \quad C' \subseteq C'' \rightarrow \bar{C}' \subseteq \bar{C}'', \text{ где } C'' \subseteq C,$$

$$(\varphi 3) \quad \bar{\bar{C}}' = \bar{C}'.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. Оператор φ является оператором замыкания в Lc_F .

Следствие 1. Для любого $C_1 \subset C \subset Lc_F$, $C_1 \neq \emptyset$ справедливо включение $C_1^\wedge \subseteq \bar{C}_1$.

Верно ли, что $C_1^\wedge = \bar{C}_1$ в Lc_F ? Простейшим примером, когда возможно неравенство $C_1^\wedge \neq \bar{C}_1$, является M_3 . Справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. В дистрибутивной конечно c -порожденной решетке с $\hat{1}$ справедливо равенство $C_1^\wedge = \bar{C}_1$ при $C_1 \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть Dc_F — дистрибутивная конечно c -порожденная решетка с $\hat{1}$. Ясно, что Dc_F есть Lc_F . С учетом следствия 1 нужно показать лишь то, что если элемент $v \in \bar{C}_1$, то $v \in C_1^\wedge$, являясь, конечно, c -элементом. Если $v \in \bar{C}_1$, то $v \leq d = \sum_{j \in J} c_j$, $c_j \in C_1$. Так как $v \in Dc_F$, получаем, что $v = vd = vc_1 + \dots + vc_j + \dots + vc_{|J|}$. Ясно, что элемент v неразложим. Поэтому из неравенства $vc_j \leq v$ следует, что $vc_i = v$ точно для тех слагаемых c_i , для которых $c_i \geq v$, и $vc_j < v$ для всех остальных слагаемых суммы $\sum_{j \in J} c_j$. Ясно, что хотя бы одно c_i таково, что $c_i \geq v$ (так как в противном случае $vc_j < v$ для всех $j = 1, \dots, |J|$ и элемент v разложим, поскольку $v = vc_1 + \dots + vc_{|J|}$), а это означает, что $v \in C_1^\wedge$, так как упомянутый элемент c_i лежит в C_1 , а $C_1 \subseteq C_1^\wedge$.

Множество $C^\wedge = C\bar{C}'$ называется замкнутым, что будем, когда это удобно, выражать записью $C^\wedge = \varphi(C^\wedge)$.

Замечание 2. По определению $\bar{C}'$ есть множество

$$\bar{C}' = \left\{ c: c \leq \sum_{j \in J} c_j, c \in C \right\},$$

где $c_j \in C' \iff j \in J$. Можно одновременно считать $\bar{C}'$ элементом $\bar{C}' = \sum_{j \in J} c_j$ и использовать это в дальнейшем. Поэтому договоримся рассматривать $\bar{C}'$ и как элемент $d' = \sum_{j \in J} c_j$, и как подмножество Lc_F . Различие между $\bar{C}'$ как элементом и $\bar{C}'$ как подмножеством видно из контекста.

Лемма 1. Пусть

$$C^\wedge \subseteq C \subseteq Lc_F, \quad C^\wedge = \{c_j\}_{j \in J}, \quad |J| = |C^\wedge| \geq 1, \\ \bar{C}' = \left\{ c : c \leq d = \sum_{j \in J} c_j, \quad c_j \in C^\wedge, \quad c \in C \right\}.$$

Тогда

$$\overline{\bar{C}_1 + \bar{C}_2} = \overline{\bar{C}_1 \cup \bar{C}_2} = \overline{\bar{C}_1 \cup C_2} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2, \quad \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2 \subseteq d_{12}^\Delta \cap C, \quad d_{12} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2. \quad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_1 + \bar{C}_2$, $\overline{\bar{C}_1 \cup \bar{C}_2}$, $\overline{\bar{C}_1 \cup C_2}$ как элементы Lc_F и положим $d_1 = \bar{C}_1$, $d_2 = \bar{C}_2$, $d_{12} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2$, $\bar{d} = \overline{\bar{C}_1 \cup \bar{C}_2}$, $\bar{\bar{d}} = \overline{\bar{C}_1 \cup C_2}$. Ясно, что $d_1 = \sum c_n$, где суммирование проводится по всем $c_n \in C_1$, так что $d_1 = \sum c$, где теперь суммирование проводится по всем таким c , что $c \leq d_1$. Аналогично, $d_2 = \sum c_m$ по всем $c_m \in C_2$, так что $d_2 = \sum c$ по всем $c \in C$ таким, что $c \leq d_2$. Далее, $d_1 + d_2 = \sum c_j$ по всем $c_j \in C_1 \cup C_2$, поэтому $d_1 + d_2 = \sum c$ по всем таким $c \in C$, что $c \leq d_1$ или $c \leq d_2$. Аналогично, из того, что $d_{12} = \sum c_k$ по всем $c_k \in \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$, получаем, что $d_{12} = \sum c$ по всем таким $c \in C$, что $c \leq d_1$ или $c \leq d_2$, а значит, $d_1 + d_2 = d_{12}$. А так как $d_1 + d_2 \leq \bar{d} \leq d_{12}$, справедливо равенство $\bar{d} = d_{12}$. Таким же образом из $\bar{\bar{d}} = \sum c_i$ по всем $c_i \in \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$ получаем, что $\bar{\bar{d}} = \sum c$ по всем $c \leq d_1$ или $c \leq d_2$, и поэтому $\bar{\bar{d}} = \bar{d} = d_{12}$.

Рассматривая величины из (1) как подмножества, получаем, что

$$\bar{C}_1 = \{c : c \leq d_1, \quad c \in C\} = d_1^\Delta \cap C, \quad \bar{C}_2 = \{c : c \leq d_2, \quad c \in C\} = d_2^\Delta \cap C, \\ \bar{C}_1 + \bar{C}_2 = \{c : c \leq d_{12}, \quad c \in C\} = d_{12}^\Delta \cap C, \quad \overline{\bar{C}_1 \cup \bar{C}_2} = \{c : c \leq \bar{d}, \quad c \in C\} = \bar{d}^\Delta \cap C,$$

поэтому

$$\bar{C}_1 \cup \bar{C}_2 = (d_1^\Delta \cap C) \cup (d_2^\Delta \cap C) = (d_1^\Delta \cup d_2^\Delta) \cap C \subseteq d_{12}^\Delta \cap C,$$

Ясно, что

$$\overline{\bar{C}_1 \cup \bar{C}_2} = \{c : c \leq \bar{\bar{d}}, \quad c \in C\} = \bar{\bar{d}}^\Delta \cap C,$$

а так как фактически получено, что

$$c \leq d_{12} \iff c \leq \bar{d} \iff c \leq \bar{\bar{d}},$$

справедливо равенство

$$\overline{\bar{C}_1 \cup \bar{C}_2} = \overline{\bar{C}_1 \cup C_2} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 = \overline{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}.$$

Выполняется ли в Lc_F равенство $\bar{C}_1 + \bar{C}_2 = \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$, где $\bar{C}_1 + \bar{C}_2$ как множество есть $d_{12}^\Delta \cap C$? Простейшим примером, когда возможно неравенство, является M_3 . Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. В дистрибутивной конечно s -порожденной решетке с $\hat{1}$ справедливо равенство $\bar{C}_1 + \bar{C}_2 = \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$, где $\bar{C}_1 + \bar{C}_2$ как множество есть $d_{12}^\Delta \cap C$.

Доказательство. Так как $C_1^\wedge = C_1$ в Dc_F , множество $(d_1^\Delta \cup d_2^\Delta) \cap C = \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$ совпадает с множеством $\bar{C}_1 + \bar{C}_2 = d_{12}^\Delta \cap C$ согласно лемме 1.

Предложение 6. Упорядоченное по включению множество всех листов вида $\bar{C}'$ из Lc_F с $\hat{0}$ является решеткой с $\hat{1} = C$.

Доказательство. Обозначим $L(C)$ упорядоченное по включению множество всех листов вида $\bar{C}'$. Ясно, что в Lc_F с $\hat{0}$ любое пересечение любых листов непусто, так как указанное y -множество листов является нижней полурешеткой. Пусть $C_1, C_2 \subseteq C$, $d_1 = \bar{C}_1$, $d_2 = \bar{C}_2$, $d_{12} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2$, $\bar{d} = \overline{C_1 \cup C_2}$. По лемме 1 в Lc_F справедливо равенство $d_1 + d_2 = d_{12} = \bar{d}$, так что, полагая $\bar{C}_1 + \bar{C}_2 = \overline{C_1 \cup C_2}$ в $L(C)$, получаем в $L(C)$ полное согласование так введенных операций умножения $\bar{C}_1 \bar{C}_2 = \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$ и сложения $\bar{C}_1 + \bar{C}_2 = \overline{C_1 \cup C_2}$ с отношением порядка (включением):

- в $L(C)$ имеются все рассматриваемые элементы $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_1 \bar{C}_2$ и $\overline{C_1 \cup C_2}$, так что добавленных извне элементов нет,
- элемент $\overline{C_1 \cup C_2}$ — наименьший из элементов $C' \in L(C)$ такой, что $\bar{C}_1, \bar{C}_2 \leq C'$, то есть $\bar{C}_1, \bar{C}_2 \leq \overline{C_1 \cup C_2} \leq C'$.

Пусть далее всюду s означает элемент, покрывающий c -элемент, и пусть SLc_F — такая Lc_F , в которой любой интервал s/x полумодулярен снизу и любая цепь до s от $x \leq s$ конечна. Значит, в SLc_F есть $\hat{0}$ и $\hat{1}$, а любой интервал $s/\hat{0}$ модулярен. Примером SLc_F является как любая модулярная c -порожденная решетка конечной длины, так и любая $L\gamma$ (значит, SLc_F не обязательно конечна). Однако предположение, что класс SLc_F всех SLc_F совпадает с объединением класса $L\gamma$ геометрических решеток и класса M_{cFl} модулярных c -порожденных решеток конечной длины, неверно. В действительности $L\gamma \cup M_{cFl} \subset SLc_F$. Более того, класс конечных SLc_F строго содержит объединение класса конечных $L\gamma$ и класса конечных M_{cFl} .

Ясно, что $L\gamma \cup M_{cFl} \subseteq SLc_F$. Покажем, что на самом деле включение строгое, причем обойдемся конечными решетками. Пусть y -множества L_1 и L_2 имеют изоморфные y -подмножества (в частности, подрешетки). Упорядоченное множество P , полученное в результате объединения L_1 и L_2 наложением (отождествлением) изоморфных y -подмножеств, назовем L -суммой L_1 и L_2 , если P оказывается решеткой, в противном случае результат назовем P -суммой. Ясно, что в P -сумме y -множеств L_1 и L_2 любой элемент принадлежит $L'_1 \cong L_1$ или $L'_2 \cong L_2$, так что в L -сумме y -множеств L_1 и L_2 наибольший (наименьший) элемент одного сравним с наибольшим (наименьшим) элементом другого, если такие имеются. Возьмем геометрическую решетку $L\gamma(af3)$ листов конечной аффинной геометрии порядка 3 в качестве L_1 и геометрическую решетку $L\gamma(pr2)$ листов конечной проективной геометрии порядка 2 в качестве L_2 . Выберем любой начальный интервал длины два в $L\gamma(af3)$ и любой финальный интервал длины 2 в $L\gamma(pr2)$. Каждый из этих интервалов есть не что иное, как модулярный ромб M_3 . Отождествим выбранные интервалы, то есть произведем L -суммирование так, чтобы наибольший элемент $\hat{1}$ из $L\gamma(af3)$ был $\hat{1}$ в L -сумме. Ясно, что тогда L -сумма решеток $L\gamma(af3)$ и $L\gamma(pr2)$ есть SLc_F , однако она не является ни модулярной, ни геометрической решеткой. Значит, $L\gamma \cup M_{cFl} \subset SLc_F$. Любая решетка из M_{cFl} является, естественно, конечно c -порожденной решеткой, так что достаточно говорить лишь о ее c -сопряженности.

3. C -матроиды

Как известно, множество точек $T = \{p: p \in L\gamma\}$ геометрической решетки $L\gamma$ с операциями замыкания $\varphi: T' \rightarrow \bar{T}' = \{p: p \leq \sup(T'), p \in T\}$ и аксиомой замены Штейница является простым матроидом (см. теорему Бирхгофа–Уитни, теорему 2.29 главы 2 в [2]).

Рис. 1.

Определение 1. Множество $C \subseteq L$ с оператором замыкания φ называется c -матроидом, если для всех $C' \subseteq C$, $C' \neq \emptyset$, и любых $c_1, c_2 \in C$ справедлива следующая аксиома замены: из того, что $c_1 \notin \varphi(C')$ и $c'_1 \in \varphi(C' \cup c_2)$, следует существование такого c'_2 , что $\hat{0} < c'_2 \leq c_2$ и $c'_2 \in \varphi(C' \cup c_1)$ (ясно, что $c'_2 \in C$), такой c -матроид обозначается $\langle C, \varphi \rangle$.

Оператор $\varphi: C' \rightarrow \bar{C}' \subset L$, удовлетворяющий условиям $\varphi 1 - \varphi 3$, обозначим через $\bar{\varphi}$ и будем говорить о $\bar{\varphi}$ -замыкании.

Определение 2. Множество $C \subseteq L$ с оператором замыкания $\bar{\varphi}$ называется $\bar{C}$ -матроидом, если для всех $C' \subseteq C$, $C' \neq \emptyset$, и любых $c_1, c_2 \in C$ справедлива следующая аксиома замены: из того, что $c_1 \notin \bar{C}'$ и $c'_1 \in \bar{C}' \cup c_2$, следует существование такого c'_2 , что $\hat{0} < c'_2 \leq c_2$ и $c'_2 \in \bar{C}' \cup c_1$. Такой $\bar{C}$ -матроид обозначается $\langle C, \bar{\varphi} \rangle$.

Ясно, что $\bar{C}$ -матроид есть c -матроид. Два примера $\bar{C}$ -матроида получаем, рассмотрев модулярные, но не геометрические решетки (см. рис. 1а и 1б).

Докажем теперь теорему 1, аналогичную теореме Бирхгофа–Уитни для простых матроидов. Значение теоремы 1 в том, что в ней утверждается существование класса $\bar{C}M$ $\bar{C}$ -матроидов таких, что мощность $|\bar{C}M|$ бесконечна.

Теорема 1. В любой SLC_F с $\hat{0}$ множество C из SLC_F с оператором $\bar{\varphi}$ является $\bar{C}$ -матроидом.

Если $\langle C, \varphi \rangle - \bar{C}$ -матроид и $C \in SLC_F$ содержит $\hat{0}$, то $L(C) \cong SLC_F$.

Доказательство. Пусть $c_1, c_2 \in C$, $C' \subset C$, $c_1 \notin \bar{C}'$, $c \in \bar{C}' \cup c_2$. Ясно, что $c_1, c_2 > \hat{0}$ и $c_2 \notin \bar{C}'$, так как иначе получаем противоречие: $c_1 \in \bar{C}' \cup c_2 = \bar{C}'$. В свете замечания 1 ясно, что $\bar{C}' \cup c = \bar{C}' + c$ – это равенство элементов в SLC_F , а для множеств соответствующее равенство имеет вид $\bar{C}' \cup c = d^\Delta \cap C$, где $d = \bar{C}' + c$. Также ясно, что всегда $\bar{C}' \cup c_1 \subset \bar{C}' \cup c_2$, а это эквивалентно неравенству $\bar{C}' + c_1 \leq \bar{C}' + c_2$ и равносильно неравенству $d' + c_1 \leq d' + c_2$. Аксиома замены не запрещает c -элементам c_1 и c_2 быть сравнимыми (для несравнимости элементов c_1 и c_2 используется запись $c_1 \parallel c_2$, а для сравнимости – $c_1 \nparallel c_2$). При $c_1 > c_2$ справедливы соотношения $c_1 \in \bar{C}' \cup c_2 = \bar{C}' \cup c_1$, откуда, взяв $c'_2 = c_1$, получаем, что $c'_2 \in \bar{C}' \cup c_1$, а при $c_1 \leq c_2$, взяв $c'_2 = c_1$, видим, что $c'_2 \in \bar{C}' \cup c_1$, так что при $c_1 \nparallel c_2$ аксиома замены выполняется. Учитывая, что теперь всегда $c_1 \parallel c_2$, применим индукцию по длине $l(c_1)$.

А. Пусть c_1 — атом. Используем индукцию по длине $l(c_2)$. Пусть c_2 — тоже атом. Тогда ввиду условия $c_1 \in C' \cup c_2$, взяв $c'_2 = c_2$, видим, что $c'_2 \in \bar{C}' \cup c_2 = \bar{C}' \cup c_1$, то есть аксиома замены выполняется. Напомним, что далее всегда $c_1, c_2 \notin \bar{C}'$ и $\bar{C}' + c_1 \leq \bar{C}' + c_2$, а элементы c_1 и c_2 несравнимы, $c_1 \parallel c_2$. Пусть теперь $l(c_2) = 2$, так что $c_2 > c_2^1 > \hat{0}$, то есть c_2 покрывает c_2^1 и c_2^1 покрывает $\hat{0}$. Применим индукцию по $l(d)$.

А1. Пусть $l(d) = 1$. Значит, $C' = \{\hat{0}, c'_1\}$ и $c'_1 > \hat{0}$, потому что не может быть равенства $\bar{C}' = \{\hat{0}\}$. Как видим, $C' = \{\hat{0}, c'_1\} = \bar{C}'$. Так как $c_2 \notin \bar{C}'$, справедливы соотношения $s = C - 2 + c'_1 > c_2$ и $l(s) = 3$. Значит, раз $\hat{0} \leq c_1 \notin \bar{C}'$, верно, что $c_1 < C' + c_2 = c'_1 + c_2$. Так как элемент $s = c'_1 + c_2$ покрывает c_2 , в принятых обозначениях $s > c_2$, интервал $[\hat{0}, s]$ модулярен, а так как к тому же $s > c_1 + c'_1$, в силу модулярности $c_2, c_1 + c'_1 > c_2(c_1 + c'_1) = p$, при этом $p > \hat{0}$, потому что $l(c_1 + c'_1) = 2 = l(c_2)$. Но c_2 покрывает точно один элемент c_2^1 , значит, $p = c_2^1$. Выведем этот же факт другим способом. Применим рассуждение от противного, предположим, что $p \parallel c_2^1$, тогда $c_2 \geq p + c_2^1 > p$, $c_2^1 > \hat{0}$, но это противоречит тому, что c_2 является c -элементом. Итак, $c_2^1 = p < c'_1 + c_1 = C' + c_1$, что и означает, что аксиома замены выполняется. При этом, $c_2 \not\leq c'_1 + c_1 + c_1$, что доказано двумя способами, а также $c'_1 + c_1 = c'_1 + c_2^1$.

А2. Пусть теперь $l(d) = 2$. Тогда возможны лишь два случая. В первом случае $c'_2 > c'_1 > \hat{0}$, так что $C' = \{\hat{0}, c'_1, c'_2\}$, и во втором случае $C' = \{\hat{0}, \dots, c'_i, \dots, c'_j, \dots\}$, $c_i \parallel c'_j$ и $c'_i > \hat{0}$ для всех c'_i, c'_j из C' , причем $|C'| \geq 3$, а потому в C' есть $c'_1 \neq c'_2$.

Рассмотрим первый случай. В этом случае $c'_2 > c'_1 > \hat{0}$, так что $C' = \bar{C}'$. Если $c_2^1 \leq C' + c_1$, то аксиома замены имеет место. Если же $c_2^1 \not\leq C' + c_1$, то $c_1 \not\leq C' + c_2^1$ (иначе с учетом того, что $c_2^1 \not\leq C'$, получаем, что $C' + c_2^1 + c_1 = C' + c_2^1 > C'$, а тогда из соотношений $C' \leq C' + c_1 \leq C' + c_2^1 + c_1$ следует, что $C' + c_1 = C' + c_2^1$, откуда вытекает, что $c_2^1 \leq C' + c_1$). Если допустить, что $c_2 \leq C' + c_2^1 + c_1 = c'_2 + c_2^1 + c_1$, то это допущение приводит в противоречию. В самом деле, из него вытекает, что $c_2 < C' + c_2^1 + c_1$, а значит, $l(C' + c_2) \leq 4$, потому что $l(c'_2 + c_2^1 + c_1) = 4$. В любом случае, напомним, выполняются соотношения $C' + c_2^1 + c_1 \leq C' + c_2$, $c_2^1 \not\leq C'$, $c_2 \not\leq C'$, что равносильно выполнению соотношений $d + c_2^1 + c_1 \leq d + c_2$, $c_2^1 \not\leq d$ и $c_2 \not\leq d$, а это влечет существование цепи покрытий $\hat{0} < c'_1 < c'_2 = d \leq d + c_1 \leq d + c_1 + c_2^1 \leq d + c_2$ длины $l(C' + c_2) > 4$, получаем противоречие. Теперь, так как $c_2 \not\leq d + c_2^1 + c_1$, получаем цепь $d \leq d + c_1 + c_2^1 \leq d + c_2^1 + c_2 = d + c_2$ длины 3, а с другой стороны $d \leq d + c_2^1 \leq d + c_2^1 + c_2 = d + c_2$ — цепь длины 2, но их одновременное существование невозможно в силу полумодулярности $SLCF$. Итак, в первом, полностью рассмотренном случае $c_2^1 \leq d + c_1$, что равносильно неравенству $c_2^1 \leq C' + c_1$, то есть аксиома замены имеет место.

Рассмотрим второй случай. Возьмем $c'_1, c'_2 \in C'$ и напомним, что $c'_1, c'_2 > \hat{0}$ и $c'_2 \parallel c'_1$. Если $c_2^1 \leq \bar{C}' + c_1 = d + c_1$, где $d = c'_1 + c'_2$, то аксиома замены имеет место. Поэтому пусть $c_2^1 \not\leq d + c_1$. Покажем, что это противоречит тому, что $c_1 \leq d + c_2$. Воспользуемся тем, что $c_2 \not\leq d + c_1 + c_2^1$ (это соотношение верно, так как допущение $c_2 \leq d + c_1 + c_2^1$ приводит к равенству $d + c_1 + c_2^1 = d + c_2$, так что одновременно, с одной стороны, $d \leq d + c_1 \leq d + c_1 + c_2^1 \leq d + c_1 + c_2$, хотя $d \leq d + c_1 \leq d + c_2$ с другой). Тогда, используя модулярность интервалов $[\hat{0}, c_2 + c'_1]$, $[\hat{0}, c_2 + c'_2]$ и полумодулярность (сверху), получаем цепочки покрытий $d + c'_2 > c'_1 + c'_2, d + c_2^1 > c'_2 + c_2^1$, а так как $c_2^1 \not\leq d + c_1$, справедливо соотношение $c_1 \not\leq d + c_2^1$ (доказательство этого факта такое же, как и в первом случае из

A2), так что сначала получаем покрытия $d + c_2^1 + c_1 \succ d + c_1, d + c_2^1$, затем из того, что $c_2, c_1' + c_2^1, c_2' + c_2^1 \succ c_2^1$ получаем покрытия $d + c_2^1 \succ c_1' + c_2^1$ и $d + c_2^1 \succ c_2' + c_2^1$, далее покрытия $d + c_2^1, c_2' + c_2 \succ c_2' + c_2^1$ в свою очередь влекут покрытия $d + c_2^1 + c_2 \succ d + c_2^1, c_2' + c_2$. Таким образом, с одной стороны, $d + c_2^1 \leq d + c_2^1 + c_1 \leq d + c_2$, а с другой стороны, $d + c_2 = d + c_2^1 + c_2 \succ d + c_2^1$, получаем противоречие. Значит, и во втором случае аксиома замены выполняется. Итак, доказано, что если $l(d) \leq 2, d = \bar{C}', c_1$ — атом и $l(c_2) \leq 2$, то аксиома замены имеет место.

Замечание 3. Ситуация, рассмотренная в A2, показывает, что в LC_F условие модулярности интервалов вида $[\hat{0}, s]$, где $s \succ c$, существенно и отказаться от него в классе $SLCF$ нельзя.

В LC_F , в частности в $SLCF$, любой неразложимый элемент v является c -элементом. Поэтому исключено положение, при котором v больше элемента w , разложимого в сумму, содержащую хотя бы два несравнимых слагаемых, как исключено и равенство $v = w$. Ниже это разъяснение более не делается.

A3. Пусть теперь $l(d) \geq 3$. Имеются, вообще говоря, две и только две возможности:

B1. $(c_1 + c_2)(c_1 + d) \leq c_1$, точнее, $(c_1 + c_2)(c_1 + d) = c_1$;

B2. $(c_1 + c_2)(c_1 + d) > c_1$.

Если в каждом случае $c_2^1 \leq d + c_1$, то аксиома замены имеет место. Покажем, что это неравенство верно, поскольку предположение, что $c_2^1 \not\leq d + c_1$, ведет к противоречию.

Рассмотрим случай B1. Пусть $s_{12} = c_1 + c_2$. Тогда $s_{12} \succ c_2$, а потому интервал $[\hat{0}, s_{12}]$ модулярен. Ясно, что $d + c_2^1 \leq d + c_2$ и $d + c_2^1 \leq d + c_1 + c_2^1 \leq d + c_2$, так что $d + c_1 + c_2^1 = d + c_2$. Тогда, с одной стороны, получаем цепь покрытий $d + c_1 \leq d + c_1 + c_2^1 = d + c_2$ длины 1, а с другой стороны, имеем цепь покрытий $c_1 \leq c_1 + c_2^1 \leq c_1 + c_2^1 + c_2 = c_1 + c + 2$ длины 2. Однако обе цепи, находясь в одном интервале $[c_1, d + c_2]$, должны иметь равные длины в силу модулярности $SLCF$. Отметим, что вычисление длин этих цепей зависело по сути лишь от длины $l(c)$ элемента $c \leq c_2$, который в данном случае равен c_2^1 . Тем самым фактически установлена несущественность равенства $l(c_2^1) = 1$ для вывода противоречивости предположения $c_2^1 \not\leq d + c_1$.

Рассмотрим случай B2. Пусть $r = s_{12}(d + c_1) = (c_1 + c_2)(c_1 + d)$. Так как интервал $[\hat{0}, s_{12}]$ модулярен, интервалы $[\hat{0}, r], [c_1, r], [c_1, s_{12}]$ также модулярны, а потому длины цепи $c_1, r \leq r + c_2^1 = r + c_1 + c_2^1 \leq r + c_2 = s_{12}$ (здесь использованы отношения $s_{12} = c_1 + c_2 \leq r + c_2 \leq s_{12}$ и $c_2^1 \not\leq r > c_1$) должна быть равна длине цепи $c_1 \leq c_1 + c_2^1 \leq c_1 + c_2 = s_{12}$, однако этого равенства, как видим, нет. Значит, либо $c = c_1$ и случай B2 невозможен, либо $c_2^1 \leq d + c_1$, а тогда аксиома замены имеет место.

Итак, предположение $c_2^1 \not\leq d + c_1$ действительно приводит к противоречию. Следовательно, аксиома замены выполняется. Отметим, что опять фактически установлена несущественность равенства $l(C_2^1) = 1$ для исключения случая B2 из числа действительно возможных случаев.

A4. Пусть теперь для $l(c_2) = k \geq 2$ аксиома замены верна, и пусть $l(C_2) \geq 3$. Тогда существует (точно одна) цепь покрытий $\hat{0} \leq c_2^1 \leq \dots \leq c_2^{n-1} = c_2, n \geq 1$. Так как $\bar{C}' + c_1 \leq \bar{C}' + c_2$, при $\bar{C}' + c_1 = C' + c_2$, взяв $c_1' = c_2$, получаем, что $c_2' \in \bar{C}' \cup c_1$, так что аксиома замены выполняется. Поэтому пусть далее везде $\bar{C}' + c_1 < C' + c_2$, или, что равносильно, $d + c_1 < d + c_2$. В силу полумодулярности существует цепь покрытий

$$\bar{C}' + c_2^1 \leq \dots \leq \bar{C}' + c_2^i \leq \dots \leq \bar{C}' + c_2^n \leq \bar{C}' + c_2^{n+1} = \bar{C}' + c_2, \quad n \geq 2. \quad (2)$$

При этом, если $c_1 \notin \overline{C' \cup c_2^i}$ для всех $i = 1, \dots, n$, то аксиома замены выполняется в силу индукции. Поэтому пусть $c_1 \in \overline{C' \cup c_2^i}$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Тогда $\bar{C}' + c_2^n \leq \bar{C}' + c_2^n + c_1$. Если хотя бы для одного $i = 1, \dots, n, n+1$ элемент $c_2^i \in \overline{C' + c_1}$, то аксиома замены, разумеется, имеет место. Пусть поэтому $c_2^i \notin \overline{C' + c_1}$ для всех $i = 1, \dots, n+1$. Из этого условия вытекает, что $c_2^i \notin \bar{C}'$. Заменяя $\bar{C}'$ в (2) на d , получаем равносильные, но более простые соотношения

$$d + c_2^1 \leq \dots \leq d + c_2^i \leq \dots \leq d + c_2^n \leq d + c_2^{n+1} = d + c_2, \quad n \geq 2, \quad (3)$$

При этом $c_2^i \not\leq d + c_1$, а значит, и подавно $c_2^i \not\leq d$, $i = 1, \dots, n, n+1$.

Теперь можно показать, что предположение, что $c_2^i \not\leq d + c_1$ для всякого $i = 1, \dots, n, n+1$, ведет к противоречию с фактом, состоящим в том, что $c_1 \leq d + c_2$. Однако это по сути было установлено в пункте В1 случая А3, где нужно вместо двух цепей длины 2 и 1 говорить, используя индукцию, о двух цепях длины n и $n-1$ соответственно, а именно, о цепи (3) и цепи

$$d + c_2^1 \leq \dots \leq d + c_2^i \leq \dots \leq d + c_2^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Что же касается пункта В2 в случае А3, то он, как фактически показано, невозможен. Итак, аксиома замены имеет место для всякой пары c -элементов c_1 и c_2 , состоящей из атома c_1 и произвольного c -элемента $c_2 > \hat{0}$.

С. Пусть теперь $l(c_1) = k \geq 2$ и для c_1 выполняется следующее условие: из соотношений $c_1 \notin \bar{A}$, $A \subset C$, $c_1 \in \overline{A \cup c_4}$ следует, что есть такой c -элемент c_4' , что $\hat{0} < c_4' \leq c_4$ и $c_4' \in \bar{A} + c_1 = \overline{A \cup c_1}$. Пусть $B \subseteq C$, $c_3 > c_1$, $c_3 \notin \bar{B}$, $c_3 \in \overline{B \cup c_2}$. Возьмем элемент $c' = (\bar{B} + c_3)c_2$, очевидно, что c' есть c -элемент. Ясно, что $c' \leq \bar{B} + c_3$, то есть $c' \in \overline{B \cup c_3}$. Осталось показать, что $c' > \hat{0}$, как это требует аксиома замены. Отметим сразу, что $c_1 \in \overline{B \cup c_2}$ и по индуктивному предположению существует c'' такой, что $\hat{0} < c'' \leq c_2$ и $c'' \in \overline{B \cup c_1}$. Поэтому с учетом соотношения $\bar{B} + c_1 \leq \bar{B} + c_3$ получаем, что $\hat{0} < c'' \leq (\overline{B \cup c_1})c_2 \leq (\overline{B \cup c_3})c_2 = c'$. Первая часть предложения 2 доказана. Согласно предложению 2 решетка $L(C)$ является решеткой с $\hat{0}$ и $\hat{1}$.

Для доказательства изоморфизма $L(C) \simeq SLc_F$ сначала покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между этими объектами, так как отношение сравнимости элементов или их несравнимости будет тогда очевидным. Любой элемент $d \in SLc_R$ представим в виде $\sum C_k$, где суммирование проводится по всем $c_k \in \bar{C}' = \{c: c \leq d, c \in C\}$, так что d имеет единственное соответствующее ему подмножество $\bar{C}'$ в $\langle C, \varphi \rangle$, а потому имеет единственный соответствующий ему лист $D = \bar{C}'$, являющийся уже элементом $L(C)$. При этом различным элементам $d_1, d_2 \in SLc_F$ соответствуют различные листы $D_1 = C_1$ и $D_2 = C_2$, в противном случае из равенства $D_1 = D_2$ в $L(C)$ в силу единственности следовало бы равенство $d_1 = d_2$. Обратно, каждому листу D из $L(C)$ соответствует единственное подмножество $\bar{C}' = D$ в $\langle C, \varphi \rangle$, которое однозначно определяет такой элемент d из SLc_R , что $d = \sum_{c_k \in \bar{C}'} c_k$, и здесь равенство $d_1 = d_2$ приводит к равенству соответствующих листов D_1 и D_2 .

Пусть теперь $d_1 > d_2$ в SLc_F , тогда $d_1 + d' > d_2 + d'$, либо $d_1 + d' = d_2 + d'$. В силу установленного взаимно однозначного соответствия в $L(C)$ и одновременно в $\langle C, \varphi \rangle$ справедливы соотношения $d_1 \sim D_1$, $d_2 \sim D_2$, $d' \sim D'$, где $D_1 = C_1 = \{c: d_1, c \in C\}$, $D_2 = C_2 = \{c: d_2, c \in C\}$, причем $D_1 \leq D_2$ в $L(C)$, так как $C_2 \subseteq C_1$ в $\bar{C}$ -матроиде $\langle C, \varphi \rangle$. Далее, покрытие $d_1 > d_2$ эквивалентно тому, что существует $c \leq d_1$, $c \not\leq d_2$ и $c + d_2 = d_1$, а потому $c \notin C_2$ и $c \in C_1$, так что $C_2 \subset C_1$, откуда, $D_1 < D_2$ в $L(C)$. Между d_1 и d_2 в SLc_F

нет такого промежуточного элемента d'' , что $d_1 > d'' > d_2$. Значит, в $\langle C, \varphi \rangle$ нет такого промежуточного множества C'' , что $\bar{C}_2 \subset \bar{C}'' \subset \bar{C}_1$. Поэтому в $L(C)$ нет такого листа D'' , для которого $D_1 < D'' < D_2$, так что $D_1 < D_2$ в $L(C)$. Так как ясно, что равенство $d_1 + d' = d_2 + d'$ в SLc_F эквивалентно тому, что $D_1 + D' = D_2 + D'$ в $L(C)$, пусть $d_1 + d' > d_2 + d'$ в SLc_F , а значит, $D_1 + D' > D_2 + D'$ в $L(C)$. Если $D_2 + D'$ не покрывается $D_1 + D'$, то найдется такой D'' , что $D_2 + D' < D'' < D_1 + D'$. Это возможно лишь тогда, когда в $\langle C, \varphi \rangle$ выполняются соотношения $\bar{C}_2 + c' < \bar{C}'' < \bar{C}_1 + c'$, но последнее противоречит покрытию $d_2 + d' < d_1 + d'$ в SLc_F . Аналогичным образом доказывается, что интервал $s/\hat{0}$ является модулярным в SLc_F тогда и только тогда, когда является модулярным соответствующий ему в $L(C)$ интервал $S/\hat{0}$, где $S = \{c: c \leq s, c \in C\}$.

Что касается упорядоченного по включению множества всех листов вида $C_i^\wedge = \text{Id}(C_i) \subseteq C \subset SLc_F$ с $\hat{0}$, то оно, вообще говоря, не изоморфно SFc_F . Чтобы убедиться в этом, достаточно взять M_3 .

Предложение 7. Для дистрибутивной конечно c -порожденной решетки Dc_F с $\hat{0}$ и $\hat{1}$ множество всех листов вида $C_i^\wedge = \text{Id}(C_i) \subseteq C \subset SLc_F$, упорядоченное по включению, изоморфно Dc_F .

Доказательство немедленно следует из равенства $C_i^\wedge = \bar{C}_i$.

Замечание 4. Пусть C_1 и C_2 — y -множества всех циклов соответственно из SLc_F^1 и SLc_F^2 . Пусть C_1 и C_2 изоморфны как полурешетки. Возникает вопрос, верно ли, что тогда SLc_F^1 и SLc_F^2 изоморфны как решетки. Вообще говоря, это неверно. В самом деле, возьмем в качестве SLc_F^1 решетку с диаграммой на рис. 1а, а в качестве SLc_F^2 решетку с диаграммой на рис. 1б. Как видим, $C_1 \cong C_2$, но $SLc_F^1 \not\cong SLc_F^2$, так как первая разложима в прямое произведение плоских модулярных решеток длины соответственно 3 и 1, а вторая неразложима.

Пусть на рис. 2а представлена модель некоторой $L\gamma$, а на рис. 2б — модель SLc_F , полученной из данной $L\gamma$ присоединением нового элемента $\hat{0}'$. Тогда SLc_F не будет уже геометрической решеткой. Но если взять в SLc_F не множество точек, состоящее из единственной точки, а множество c -элементов C , получаем c -матроид.

Замечание 5. В Lc_F аксиома замены не обязательно выполняется, см. контрпример на рис. 1в, где использованы обозначения из предложения 6, в то же время она выполняется в пентагоне.

Замечание 6. Как теорема 1, так и все последующие утверждения справедливы, в частности, для простых матроидов (см. главы 2–4 в [2]). Беря различные операторы замыкания, получаем различные виды c -матроидов. В следующем разделе рассмотрены лишь основные из них.

4. Основные операции и конструкции

Пусть ψ — оператор замыкания, множество $\psi(A)$ называется замыканием множества A . Следующее предложение является основой многих последующих утверждений.

Предложение 8. Пусть $A, B, \subseteq C \subseteq Lc_F$, $\hat{0} \in Lc_F$, $\emptyset \neq D \subseteq B \setminus A$. Тогда оператор $\psi: D \rightarrow (\overline{D \cup A \cap B}) \setminus A$ является замыканием на множестве $\overline{B \setminus A}$, а оператор $\phi: D \rightarrow$

Рис. 2.

$((\overline{d \cup A} \cap B) \setminus A)^\wedge$ является замыканием на множестве $(B \setminus A)^\wedge$ (а также на множестве $B \setminus A$), где черта означает $\bar{\cdot}$ -замыкание в Lc_F . В частности, при $A = \emptyset$ получаем замыкание на множестве $\bar{B}$ (соответственно на $B^\wedge$), а при $B = C$ получаем замыкание на $\overline{B \setminus A}$ (соответственно на $(C \setminus A)^\wedge$, а также на $\overline{C \setminus A}$).

Доказательство. Так как $\emptyset \neq D \subset B$, справедливы соотношения $B \not\subset A \neq B$. Ясно, что $D \subseteq (B \setminus A)^\wedge \subseteq \overline{B \setminus A}$, $(\overline{d \cup A} \cap B) \setminus A \subseteq \overline{B \setminus A}$, $((\overline{d \cup A} \cap B) \setminus A)^\wedge \subseteq (B \setminus A)^\wedge$. Тогда очевидно, что $D \subseteq (\overline{d \cup A} \cap B) \setminus A \subseteq \overline{B \setminus A}$, $D \subseteq ((\overline{d \cup A} \cap B) \setminus A)^\wedge$, то есть условие $\varphi 1$ выполнено. Ясно также, что $D_1 \subseteq D_2$ влечет как $(\overline{D_1 \cup A} \cap B) \setminus A \subseteq (\overline{D_2 \cup A} \cap B) \setminus A$, так и $((\overline{D_1 \cup A} \cap B) \setminus A)^\wedge \subseteq [(\overline{D_2 \cup A} \cap B) \setminus A]^\wedge$, так что условие $\varphi 2$ выполняется. Осталось доказать, что выполняется условие $\varphi 3$, состоящее в том, что $\psi\psi = \psi$ и $\phi\phi = \phi$. Используя дистрибутивность, находим, что

$$\begin{aligned} \psi(\psi(D)) &= \overline{((\overline{d \cup A} \cap B) \setminus A) \cup A \cap B} \setminus A = \overline{((\overline{d \cup A} \cap B) \cup A \cap B) \setminus A} \\ &= \overline{((\overline{d \cup A} \cup A) \cap (B \cup A) \cap B) \setminus A} = \overline{(\overline{d \cup A} \cap (B \cup A) \cap B) \setminus A}, \end{aligned}$$

Так как $\overline{d \cup A} \cap (B \cup A) \subseteq \overline{d \cup A}$, получаем $\overline{d \cup A} \cap (B \cup A) \subseteq \overline{d \cup A} = \overline{d \cup A}$, откуда $\overline{(\overline{d \cup A} \cap (B \cup A) \cap B) \setminus A} \subseteq \overline{(\overline{d \cup A} \cap B) \setminus A} = \psi(D)$, то есть $\psi(\psi(D)) \subseteq \psi(D)$.

Обратное включение $\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$ очевидно. Для ϕ доказательство аналогично.

Замечание 7. В общем случае включение $\overline{(\overline{d \cup A} \cap B) \setminus A} \subseteq (B \setminus A)^\wedge$ не верно, хотя в Dc_F оно имеет место, так как становится равенством. Отличие простых матроидов от собственно c -матроидов (то есть не являющихся простыми матроидами) коренится в следующем: если подмножество $A \subset C$, $A \neq \emptyset$, таково, что в A нет максимальных в $C_1 \subseteq C$ элементов, то множество $(C_1 \setminus A)^\wedge$ совпадает с $C_1^\wedge$, в то время как для простого матроида множество $C_1 \setminus A$ вовсе не совпадает с C_1 , потому что любое $A \neq \emptyset$,

$A \subseteq C_1 \subset C \equiv T$ состоит только из точек, а они всегда максимальны в множестве всех точек T из $L\gamma$.

В общем случае, если φ — оператор замыкания на некотором множестве M и $A, B \subseteq M$, $\emptyset \neq D \subset B \setminus A$, то справедливо следующее утверждение.

Предложение 9. *Оператор $\psi: (\varphi(D \cup A) \cap B) \setminus A$ является замыканием на множестве $B \setminus A$.*

Доказательство в сущности почти совпадает с доказательством предложения 8, так как для доказательства предложения 9 нужна лишь дистрибутивность.

Однако ψ -замыкание из предложения 9 не гарантирует, вообще говоря, выполнения ни аксиомы замены Штейница, ни аксиомы замены в смысле определения 2, в то время как ψ -замыкание из предложения 8, как будет показано ниже, гарантирует аксиому замены в смысле определения 2, а при $F_{CF} = L\gamma$ гарантирует и аксиому Штейница, в которую в этом случае превращается аксиома замены в смысле определения 2.

Определение 3. Множество $N^\wedge \subset C \subset L_{CF}$ с $\hat{0}$, $N \neq \emptyset$, с оператором

$$\varphi^\wedge: D \rightarrow [\bar{D} \cap N^\wedge]^\wedge = [\bar{\varphi}(D) \cap N]^\wedge$$

для всех $D \subseteq N^\wedge$, $D \neq \emptyset$, называется порядковым ограничением $\bar{C}$ -матроида $\langle C, \bar{\varphi} \rangle$ и обозначается $\langle C \bullet N^\wedge, \varphi^\wedge \rangle$.

Обозначим через $L(N^\wedge)$ y -множество, изоморфное y -подмножеству L' из L_{CF} с $\hat{0}$, выделяемому в L_{CF} следующим образом. Возьмем $N^\wedge \subset C$, $N^\wedge \neq \emptyset$, и все $D_k \subset N^\wedge$, $D_k \neq \emptyset$, и найдя все $d_k = \vee D_k$, положим $L' = N^\wedge \cup \{d_k\}_{k \in K}$. Тогда L' , будучи y -подмножеством L_{CF} , является также и ее подрешеткой. Согласно определению $L(N^\wedge) \cong L'$, причем $L(N^\wedge)$ является также полумодулярной конечно c -порожденной решеткой с $\hat{0}$, в которой каждый интервал $s/\hat{0}$ модулярен, более того, так как L' имеет $\hat{1}' = \vee N^\wedge = \vee N$, решетка $L(N^\wedge) \cong \hat{1}'/\hat{0}$. Назовем $L(N^\wedge)$ решеткой, а L' подрешеткой, порожденной $N^\wedge$. Ясно, что $\bar{N}$, как элемент, равен элементу $\vee N$, так как $\bar{N}$, как множество, равно множеству $N^\wedge \cup \{d_k\}_{k \in K}$: $N^\wedge \cup \{d_k\}_{k \in K} = \bar{N}$, хотя при этом вполне возможно, что $N^\wedge \subset \bar{N}$, например, в M_3 . Поэтому $L(N^\wedge)$ и L' порождают также и $\bar{N}$.

Определение 4. Множество $\bar{N} \subset C \subset L_{CF}$ с $\hat{0}$, $N \neq \emptyset$, с оператором

$$\bar{\varphi}^\wedge: D \rightarrow \bar{D} \cap \bar{N} = \bar{\varphi}(D) \cap \bar{\varphi}(N)$$

для всех $D \subseteq \bar{N}$, $D \neq \emptyset$, называется ограничением $\bar{C}$ -матроида $\langle C, \bar{\varphi} \rangle$ или его $\bar{C}$ -подматроидом и обозначается $\langle C \bullet \bar{N}, \bar{\varphi} \rangle$.

Предложение 10. *Порядковое ограничение $\langle C \bullet N^\wedge, \varphi \rangle$ $\bar{C}$ -матроида есть $\bar{C}$ -матроид на L' и на $L(N^\wedge)$, порожденной подмножеством $N^\wedge$ из L_{CF} с $\hat{0}$ (и называется порядковым $\bar{C}$ -подматроидом, порожденным множеством $N^\wedge$).*

Доказательство. Согласно предложению 8 для оператора $\varphi^\wedge = \phi$ условия $\varphi 1 - \varphi 3$ выполняются (при $A = \emptyset$ и $B = N$ в обозначениях предложения 8), поэтому $\varphi^\wedge$ — замыкание. Далее, пусть $c_1, c_2 \in N^\wedge$, $D \subseteq N^\wedge$, $c_1 \notin \varphi^\wedge(D) = [\bar{\varphi}(D) \cap N]^\wedge$, $c_1 \in \varphi^\wedge(D \cup c_2) = [\bar{D} \cup c_2 \cap N]^\wedge$, где $\bar{D} \cup c_2 = \bar{\varphi}(D \cup c_2)$. Так как $c_1 \notin [\bar{\varphi}(D) \cap N]^\wedge \subseteq N^\wedge$, с учетом того, что $c_1 \in N^\wedge$ и $c_1 \in \varphi^\wedge(D \cup c_2) \subseteq \bar{\varphi}(D \cup c_2)$ находим, что $c_1 \notin \bar{\varphi}(D)$. Для оператора $\bar{\varphi}$ аксиома замены выполняется, что влечет наличие такого c_2' , что $\hat{0} < c_2' \leq c_2$ и $c_2' \in \bar{\varphi}(D \cup c_1)$. Отсюда с учетом того, что $c_2' \leq c_2 \in N^\wedge$, заключаем, что $c_1' \in [\bar{\varphi}(D \cup c_1) \cap N]^\wedge = \varphi^\wedge(D \cup c_1)$. Значит, $\langle C \bullet N^\wedge, \varphi^\wedge \rangle$ есть и $\bar{C}$ -подматроид, и порядковый $\bar{C}$ -матроид.

Предложение 11. Ограничение $\langle C \bullet \bar{N}, \bar{\varphi} \rangle$ $\bar{C}$ -матроида есть $\bar{C}$ -матроид на L' и на $L(\bar{N})$, порожденной подмножеством $\bar{N}$ из Lc_F с $\hat{0}$.

Доказательство этого предложения в свете доказательства предложения 10 очевидно, надо лишь взять $\varphi^\cap = \psi$ из предложения 8 при $A = \emptyset$ и $B = N$.

Замечание 8. Хотя порядковый $\bar{C}$ -подматроид есть $\bar{C}$ -матроид и $\bar{C}$ -подматроид тоже есть $\bar{C}$ -матроид, но даже при условии определения на одном и том же подходящем подмножестве из $C \subseteq Lc_F$ с $\hat{0}$, они не обязательно равны, например, как в случае M_3 . В Dc_F при указанных условиях они совпадают.

Определение 5. Множество $\bar{\varphi}(C \setminus A) = \overline{C \setminus A} \subseteq Lc_F$, $\hat{0} \in Lc_F$, с оператором

$$\bar{\varphi}_{C/A}: D \rightarrow \bar{\varphi}(\overline{D \cup A} \setminus A),$$

для всех $D \subseteq \overline{C \setminus A}$, $D \neq \emptyset$, называется сжатием $\bar{C}$ -матроида $\langle C, \varphi \rangle$ посредством множества A или сжатием на множестве $\overline{C \setminus A}$ и обозначается $\langle C/A, \bar{\varphi}_{C/A} \rangle$.

Обозначим через $L(\overline{C/A})$ y -множество, изоморфное y -подмножеству $\bar{L}'$ из Lc_F с $\hat{0}$, выделяемому в Lc_F тем же способом, что и при построении $L(N^\wedge)$.

Предложение 12. Сжатие $\langle C/A, \bar{\varphi}_{C/A} \rangle$ $\bar{C}$ -матроида является $\bar{C}$ -матroidом на $\bar{L}'$ и на $L(\overline{C \setminus A})$.

Доказательство. Из предложения 8 при $B = C$ следует, что $\bar{\varphi}_{C/A} = \psi$, то есть $\bar{\varphi}_{C/A}$ — замыкание. Пусть $c_1, c_2 \in D \subseteq \overline{C \setminus A}$, $B \subseteq D$ и $c_1 \notin \varphi_{C/A}(B)$, $c_1 \in \bar{\varphi}_{C/A}(B \cup c_2)$. Тогда $c_1 \notin \bar{\varphi}(\overline{B \cup A} \setminus A)$ и $c_1 \in \bar{\varphi}(\overline{B \cup c_2 \cup A} \setminus A)$. Для оператора $\bar{\varphi}$ аксиома замены верна, и поэтому существует такой c'_2 , $\hat{1} < c'_2 \leq c_2 \in D$ и $c'_2 \in \overline{B \cup A \cup c_1}$, а так как $c'_2 \in D$, заключаем, что $c'_2 \in \bar{\varphi}(\overline{B \cup c_1 \cup A} \setminus A) = \bar{\varphi}_{C/A}(B \cup c_1)$, то есть $\langle C/A, \bar{\varphi}_{C/A} \rangle$ есть $\bar{C}$ -матroid.

Пусть C — множество всех c -элементов из SLc_F и $L(C)$ — решетка его узлов. Поскольку SLc_F полумодулярна, в ней выполняется Ж-Д-условие, то есть на SLc_F определена функция длины $h(x)$. Элементы, имеющие одну и ту же длину $h = k$, называются элементами k -го уровня. Пусть $h(Lc_F) = h(\hat{1}) = n$ и $k \geq 1$. Удалим из SLc_F все элементы от k -го до $(n-1)$ -го уровней, а все элементы $(k-1)$ -го уровня замкнем на $\hat{1}$, тем самым определим замыкание φ' . Ясно, что полученная решетка L' снова будет полумодулярной конечно c -порожденной. При этом множество C' всех ее c -элементов будет собственным или несобственным непустым подмножеством множества C . Тогда $L(C') \cong L'$ в силу теоремы 1. Если C с оператором φ в $SLc_F \supseteq C$ является $\bar{C}$ -матroidом $\langle C, \varphi \rangle$, то C' с оператором φ' в L' тоже будет $\bar{C}$ -матroidом $\langle C', \varphi' \rangle$. В самом деле, наложим решетку L' на изоморфное ей y -подмножество из SLc_F . Это y -подмножество изоморфно L' и как нижняя решетка, а единственным возможным препятствием для продолжения этого изоморфизма вплоть до решетчатого является $\hat{1}$. Однако для любого $C'' \subseteq C' \subseteq C$ все равно верно равенство $\varphi'(C'') = \varphi(C'')$ или $\varphi'(C'') = \hat{1}$.

Определение 6. Операция удаления из SLc_F всех элементов m -х уровней, где $1 \leq k \leq m \leq n$, $n = h(Lc_F)$, с заменой их новым наибольшим элементом называется усечением. Усечением L' решетки SLc_F называется результат применения операции усечения к SLc_F .

Из только что доказанного выше и определения 6 вытекает следующее утверждение.

Предложение 13. Пусть $C \in SLc_F$ и $\langle C, \varphi \rangle$ — C -матроид. Тогда усечению L' решетки SLc_F соответствует $\bar{C}$ -матроид $\langle C', \varphi' \rangle$. При этом $L(C') \cong L'$.

Конечно, если $\text{Id}(A)$ — порядковый идеал на y -множестве P , то верно следующее утверждение.

Предложение 14. Оператор $\text{Id}: A \rightarrow \text{Id}(A)$ для всех $A \subseteq P$, $A \neq \emptyset$, является оператором замыкания.

Заметим, что из этого утверждения легко получить в качестве следствия предложение 1.

По сравнению с c -матроидом более общим видом p -матроида является v -матроид. Неразложимый (в сумму) элемент назовем для краткости v -элементом, и пусть всюду далее v есть v -элемент. Пусть SLc_F — конечно v -порожденная полумодулярная решетка и V — множество всех v -элементов из SLc_F и $\emptyset \neq V' \subseteq V$, $V' = \{v_i\}$, $i \in I$, $V'^* = \{v: v \leq \sum v_i, v_i \in V'\}$. Рассмотрим оператор $\varphi: 2^V \rightarrow 2^V$ такой, что $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ и $\varphi(V') = V'^*$, если V' имеет точную верхнюю грань, в противном случае значение φ неопределено. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 15. Справедливы соотношения

$$V' \subseteq V'^*; \quad V' \subseteq V'' \implies V'^* \subseteq V''^*; \quad V'^{**} = V'^*.$$

Ясно, что включение $v_j \in V'$ влечет соотношение $v_j \leq \sum v_i$, $v_i \in V'$. Доказательства второго и третьего утверждений аналогичны. Значит, φ — замыкание.

Множество $V' = v'^*$ называется замкнутым.

Определение 7. Множество V всех v -элементов из SLc_F с $\hat{0}$, в которой любое подмножество $V' \neq \emptyset$ имеет точную верхнюю грань, вместе с таким оператором φ , что $\varphi(V') = V'^*$, называется v -матроидом, если для любого $V' \subseteq V$, $V' \neq \emptyset$, и всех $v_1, v_2 \in V$ выполняется следующая аксиома замены: если $v_1 \notin V'^*$ и $v_1 \in (V' \cup v_2)^*$, то существует такое v_3 , что $\hat{0} < v_3 \leq v_2$ и $v_3 \in (V' \cup v_1)^*$, такой v -матроид обозначается (V, φ) .

Частным случаем v -матроида является c -матроид, а обратное неверно. Ясно, что v -матроид устроен сложнее c -матроида уже хотя бы потому, что y -множество V всех v -элементов не обязательно является нижней полурешеткой, а есть ни что иное, как i -полурешетка (см. [20]).

Список литературы

1. Горбунов В. А., *Алгебраическая теория квазимногообразий*. Научная книга, Новосибирск, 1999.
2. Айгнер М., *Комбинаторная теория*. Мир, Москва, 1982.
3. Бирхгоф Г., *Теория решеток*. Мир, Москва, 1982.
4. Гретцер Г., *Общая теория решеток*. Наука, Москва, 1984.
5. Свами М, Тхуласираман К., *Графы и сети*. Мир, Москва, 1984.
6. Скорняков Л. А., *Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца*. Физматлит, Москва, 1961.

7. Анищенко С. А., Модулярные структуры, в которых каждый элемент есть объединение циклов. *Сибирский матем. ж.* (1971) **12**, №2, 251–260.
8. Ковалев М. М., *Матроиды в дискретной оптимизации*. Изд. Университетское, Минск, 1987.
9. Ковалев М. М., Метод частичных порядков. *Докл. АН БССР* (1980) **24**, №2, 113–116.
10. Welsh D. J., *Matroid theory*. Academic Press, London, 1976.
11. Recski A., *Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics*. Springer, Berlin, 1989.
12. Баранов В. И., Стечкин Б. С., *Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения*. Наука, Москва, 1980.
13. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., *Многогранники, графы, оптимизация*. Наука, Москва, 1981.
14. Хачатуров В. Р., *Математические методы регионального планирования*. Наука, Москва, 1989.
15. Кутын А. М., *L-кодирование*. В сб.: *Международная алгебраич. конф., посвященная 60-летию профессора Ю. И. Мерзлякова*. Изд. ИМ СО РАН, Новосибирск, 2000, с. 104–105.
16. Кутын А. М., Вопросы теории кодирования и решетки. *Безопасность информ. систем* (2001), №4, 79–84.
17. Кутын А. М., Дискретная оптимизация и *ML*-решетки. В сб.: *Международная алгебраич. конф., посвященная 60-летию профессора Ю. И. Мерзлякова*. Изд. ИМ СО РАН, Новосибирск, 2000, с. 106–107.
18. Рыбников К. А., *Введение в комбинаторный анализ*. Изд. МГУ, Москва, 1985.
19. Скорняков Л. А., *Элементы теории структур*. Наука, Москва, 1982.
20. Кутын А. М., Теория направленных множеств. *Вестник КГТУ* (2001) **26**, 117–126.

Статья поступила 23.01.2003.

«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА», 2005, ТОМ 17, ВЫПУСК 3

Заведующая редакцией Л. М. Барыкина

Сдано в набор 8.08.2005.	Подписано к печати 19.08.2005.	Формат 70 × 100/16.
Печать офсетная.	Усл. печ. л. 13,0.	Уч.-изд. л. 12,4.
Тираж 221 экз.	Усл. кр.-отт. 2,9 тыс.	Бум. л. 5,0.
		Заказ №528.

Учредитель: Российская академия наук

Журнал осуществляет свою деятельность под руководством Отделения математических наук РАН

Адрес издательства: 117997 г. Москва, Профсоюзная ул., д. 90.

Адрес редакции: 119991 г. Москва ГСП-1, ул. Губкина, д. 8, комн. 622. Тел. 938 3700.

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099 г. Москва Г-99, Шубинский пер., д. 6.