Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин, Оценки радиуса устойчивости векторной задачи о максимальном разрезе графа, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 2, 5–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1230>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:56:39

Оценки радиуса устойчивости векторной задачи о максимальном разрезе графа

© 2013 г. В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости векторного варианта задачи о максимальном разрезе графа в случае, когда в пространстве параметров задачи задана метрика Гельдера.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект Ф11К-095.

Один из известных подходов к исследованию проблем устойчивости векторных задач дискретной оптимизации ориентирован на получение количественных оценок, характеризующих меру устойчивости. В основу этого подхода положено ключевое понятие радиуса устойчивости задачи, под которым понимается предельный уровень возмущений параметров задачи в метрическом пространстве, не приводящих к появлению новых Парето-оптимальных решений. Большинство результатов, полученных в этом направлении, связано с нахождением формул или оценок радиуса устойчивости векторных задач булева или целочисленного программирования с линейными [1, 2, 3, 4, 5, 6] и минимаксными (максиминными) [7, 8, 9, 10] критериями.

В данной работе проведен анализ устойчивости в метрике Гельдера многокритериального варианта известной (см., например, [11, 12]) комбинаторной экстремальной задачи о максимальном разрезе графа (MAX-CUT problem), являющейся классической проблемой дискретной оптимизации с многочисленными приложениями [13, 14, 15]. Получены верхняя и нижняя достижимые оценки радиуса устойчивости рассматриваемой задачи, сформулированной как задача булева квадратичного программирования.

Рассмотрим связный помеченный простой (n, m) -граф $G = (V, E)$ [16] с множеством вершин $V = N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ и множеством ребер E , занумерованных числами $r \in N_m$. Пусть $(S, \bar{S})$ – разбиение множества V вершин графа G на два не пересекающихся непустых подмножества S и $\bar{S}$. Тогда множество ребер $\{i, j\}$ графа G , концевые вершины которых находятся в разных подмножествах, называется разрезом графа и обозначается $(S, \bar{S})$. Всякий разрез $(S, \bar{S})$ графа G порождает булев вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{E}^n = \{0, 1\}^n$ с компонентами

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S, \\ 0, & \text{если } i \in \bar{S}. \end{cases}$$

Ясно, что всякому вектору $x \in X = \mathbf{E}^n \setminus \{\mathbf{0}^{(n)}, \mathbf{1}^{(n)}\}$, где $\mathbf{0}^{(n)} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{E}^n$, $\mathbf{1}^{(n)} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbf{E}^n$, соответствует разрез $(S, \bar{S})$ с подмножествами $S = \{i \in V :$

$x_i = 1\}$ и $\bar{S} = \{i \in V : x_i = 0\}$. В частности, вектору $\bar{x} = \mathbf{1}^{(n)} - x \in X$ соответствует разрез $(\bar{S}, S)$. Всякий вектор $x \in X$ естественно называть разрезом графа.

Далее все ребра $\{i, j\}$ графа G будем ориентировать так, что $E \subseteq \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$, т. е. превратим множество ребер в множество дуг. Каждой дуге $(i, j) \in E$ с номером $r \in N_m$ сопоставим вектор-столбец $(w_{ij}^1, w_{ij}^2, \dots, w_{ij}^s)^T$, где $w_{ij}^k \in \mathbf{R}$ – вес дуги (i, j) , соответствующий критерию $k \in N_s$. Из этих m столбцов, упорядоченных в соответствии с порядком дуг множества E , образуем матрицу $W = [w_{ij}^k] \in \mathbf{R}^{s \times m}$ строками $W_k \in \mathbf{R}^m$, $k \in N_s$. Учитывая нумерацию дуг графа G , матрицу W удобно иногда представлять в виде $W = [w_{kr}] \in \mathbf{R}^{s \times m}$. Тогда $W_k = (w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{km})$, $k \in N_s$. В этих обозначениях легко видеть, что квадратичная функция

$$f_k(x, W_k) = \sum_{(i,j) \in E} w_{ij}^k (x_i - x_j)^2,$$

заданная на множестве векторов X , представляет собой суммарный вес разреза $(S, \bar{S})$ по критерию k , где $S = \{i \in V : x_i = 1\}$, $\bar{S} = \{i \in V : x_i = 0\}$. В результате возникает векторный (s -критериальный) вариант классической задачи о максимальном разрезе графа

$$Z^s(W) : f(x, W) = (f_1(x, W_1), f_2(x, W_2), \dots, f_s(x, W_s)) \rightarrow \max_{x \in X},$$

состоящей в поиске множества Парето, т. е. множества эффективных разрезов

$$P^s(W) = \{x \in X : X(x, W) = \emptyset\},$$

где

$$X(x, W) = \{x' \in X : f(x, W) \leq f(x', W) \text{ \& } f(x, W) \neq f(x', W)\}.$$

Легко видеть, что $x \in P^s(W)$ тогда и только тогда, когда $\bar{x} = \mathbf{1}^{(n)} - x \in P^s(W)$, поэтому $|P^s(W)|$ – четное число.

Для всякого натурального числа d в действительном пространстве $\mathbf{R}^d$ зададим метрику Гельдера l_p , $p \in [1, \infty]$, т. е. под нормой вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbf{R}^d$ будем понимать число

$$\|y\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i \in N_d} |y_i|^p \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{i \in N_d} |y_i|, & \text{если } p = \infty, \end{cases}$$

а под нормой матрицы – норму вектора, составленного из всех ее элементов. Как известно, для любых векторов $u, v \in \mathbf{R}^m$ выполняется неравенство Гельдера

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q, \quad (1)$$

где $\langle u, v \rangle$ – скалярное произведение векторов u и v , а величины p и q связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$, при этом $q = 1$, если $p = \infty$, и $q = \infty$, если $p = 1$. Кроме того, полагаем $1/p = 0$ при $p = \infty$.

Используя известное условие [17], при котором неравенство (1) выполняется как равенство, нетрудно убедиться в справедливости следующей формулы

$$\forall v \in \mathbf{R}^m \quad \forall \theta > 0 \quad \exists u^0 \in \mathbf{R}^m \quad (\|u^0\|_p = \theta \quad \& \quad |\langle u^0, v \rangle| = \theta \|v\|_q). \quad (2)$$

По аналогии с [6, 2, 3, 5, 1, 7, 8, 9, 10] радиусом устойчивости задачи $Z^s(W)$, $s \in \mathbf{N}$, в метрике Гельдера l_p , $p \in [1, \infty]$, назовем число

$$\rho(s, p) = \begin{cases} \sup \Theta_p, & \text{если } \Theta_p \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Theta_p = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Theta_p = \{\varepsilon > 0 : \forall U \in \Omega_p(\varepsilon) \quad (P^s(W + U) \subseteq P^s(W))\},$$

$$\Omega_p(\varepsilon) = \{U \in \mathbf{R}^{s \times m} : \|U\|_p < \varepsilon\},$$

$\|U\|_p$ – норма Гельдера l_p матрицы U . Множество $\Omega_p(\varepsilon)$ принято называть множеством возмущающих матриц.

Таким образом, радиус устойчивости задачи $Z^s(W)$ – это предельный уровень возмущений элементов матрицы W в метрическом пространстве $\mathbf{R}^{s \times m}$, которые не приводят к появлению новых эффективных разрезов.

Легко видеть, что при $P^s(W) = X$ для всякой матрицы $W \in \mathbf{R}^{s \times m}$ включение $P^s(W + U) \subseteq P^s(W)$ имеет место при любой возмущающей матрице $U \in \mathbf{R}^{s \times m}$, т. е. $\rho(s, p) = \infty$. Задачу $Z^s(W)$, для которой $P^s(W) \neq X$, будем называть нетривиальной.

Каждому разрезу $x \in X$ и всякой дуге $(i, j) \in E$ с номером $r \in N_m$ поставим в соответствие число $\gamma_r(x) = |x_i - x_j|$. Кроме того, положим

$$\sigma_r(x', x) = \gamma_r(x') - \gamma_r(x), \quad r \in N_m,$$

$$\sigma(x', x) = (\sigma_1(x', x), \sigma_2(x', x), \dots, \sigma_m(x', x)).$$

Тогда для любых разрезов $x, x' \in X$ очевидны равенства

$$\langle W_k, \sigma(x', x) \rangle = f_k(x', W_k) - f_k(x, W_k), \quad k \in N_s. \quad (3)$$

Для $s \in \mathbf{N}$ и $p \in [1, \infty]$ введем обозначения

$$\varphi(s, p) = \min_{x \in X \setminus P^s(W)} \max_{x' \in P(x, W)} \min_{k \in N_s} \frac{\langle W_k, \sigma(x', x) \rangle}{\|\sigma(x', x)\|_q},$$

$$\psi(s, p) = \min\{\chi(s, p), (ms)^{1/p} \varphi(s, \infty)\},$$

$$P(x, W) = X(x, W) \cap P^s(W),$$

$$\chi(s, p) = \min_{k \in N_s} \|W_k\|_p.$$

Легко видеть, что $\varphi(s, p) \geq 0$.

Теорема 1. При любых $s \in \mathbf{N}$ и $p \in [1, \infty]$ для радиуса устойчивости нетривиальной задачи $Z^s(W)$ в метрике Гельдера l_p справедливы оценки

$$\varphi(s, p) \leq \rho(s, p) \leq \psi(s, p).$$

Доказательство. Вначале покажем справедливость неравенства $\rho(s, p) \geq \varphi(s, p)$. При $\varphi(s, p) = 0$ оно очевидно. Пусть $\varphi(s, p) > 0$ и пусть возмущающая матрица $U \in \mathbf{R}^{s \times m}$ со строками U_k , $k \in N_s$, принадлежит множеству $\Omega_p(\varphi(s, p))$. Согласно

определению числа $\varphi(s, p)$ для любого разреза $x \notin P^s(W)$ найдется такой эффективный разрез $x^0 \in P(x, W)$, что

$$\|U_k\|_p \leq \|U\|_p < \varphi(s, p) \leq \frac{\langle W_k, \sigma(x^0, x) \rangle}{\|\sigma(x^0, x)\|_q}, \quad k \in N_s.$$

Поэтому, применяя равенства (3) и неравенство Гельдера (1), для всякого индекса $k \in N_s$ выводим

$$\begin{aligned} f_k(x^0, W_k + U_k) - f_k(x, W_k + U_k) &= \langle W_k + U_k, \sigma(x^0, x) \rangle = \langle W_k, \sigma(x^0, x) \rangle + \langle U_k, \sigma(x^0, x) \rangle \geq \\ &\geq \langle W_k, \sigma(x^0, x) \rangle - \|U_k\|_p \|\sigma(x^0, x)\|_q > 0, \end{aligned}$$

т. е. разрез x не принадлежит множеству Парето $P^s(W + U)$. Откуда заключаем, что при любой возмущающей матрице $U \in \Omega_p(\varphi(s, p))$ справедливо включение $P^s(W + U) \subseteq P^s(W)$. Следовательно, верно неравенство $\rho(s, p) \geq \varphi(s, p)$.

Далее докажем неравенство $\rho(s, p) \leq \psi(s, p)$. Для этого сначала убедимся в справедливости неравенства $\rho(s, p) \leq (ms)^{1/p} \varphi(s, \infty)$. В соответствии с определением величины $\varphi(s, \infty)$ найдется такой разрез $x^0 \notin P^s(W)$, что для каждого эффективного разреза $x \in P(x^0, W)$ существует индекс $l \in N_s$, при котором

$$\varphi(s, \infty) \|\sigma(x, x^0)\|_1 \geq \langle W_l, \sigma(x, x^0) \rangle. \quad (4)$$

Пусть $\varepsilon > (ms)^{1/p} \varphi(s, \infty)$. Элементы u_{kr}^0 возмущающей матрицы $U^0 \in \mathbf{R}^{s \times m}$ со строками $U_k^0 = (u_{k1}^0, u_{k2}^0, \dots, u_{km}^0)$, $k \in N_s$, зададим по правилу

$$u_{kr}^0 = \begin{cases} \delta, & \text{если } \gamma_r(x^0) = 1, \\ -\delta, & \text{если } \gamma_r(x^0) = 0, \end{cases}$$

где $\varphi(s, \infty) < \delta < \varepsilon / (ms)^{1/p}$. Тогда

$$\|U^0\|_p = \delta (ms)^{1/p}, \quad U^0 \in \Omega_p(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \langle U_k^0, \sigma(x, x^0) \rangle &= \sum_{r \in N_m} u_{kr}^0 (\gamma_r(x) - \gamma_r(x^0)) = -\delta \sum_{r \in N_m} |\gamma_r(x) - \gamma_r(x^0)| = \\ &= -\delta \|\sigma(x, x^0)\|_1, \quad k \in N_s. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) и (5) с учетом (3) заключаем, что для каждого эффективного разреза $x \in P(x^0, W)$ существует индекс $l \in N_s$, удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{aligned} f_l(x, W_l + U_l^0) - f_l(x^0, W_l + U_l^0) &= \langle W_l + U_l^0, \sigma(x, x^0) \rangle = \langle W_l, \sigma(x, x^0) \rangle - \delta \|\sigma(x, x^0)\|_1 \leq \\ &\leq \varphi(s, \infty) \|\sigma(x, x^0)\|_1 - \delta \|\sigma(x, x^0)\|_1 < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива формула

$$\forall x \in P(x^0, W) \quad (x \notin X(x^0, W + U^0)). \quad (6)$$

Если $X(x^0, W + U^0) = \emptyset$, то $x^0 \in P^s(W + U^0)$. Если же $X(x^0, W + U^0) \neq \emptyset$, то благодаря внешней устойчивости множества $P^s(W + U^0)$ (см., например, [18])

найдется такой разрез $x^* \in X(x^0, W + U^0)$, что $x^* \in P^s(W + U^0)$. Покажем, что $x^* \notin P^s(W)$.

Допустим обратное: $x^* \in P^s(W)$. Тогда согласно (6) выполняется включение $x^* \in P^s(W) \setminus P(x^0, W)$. Поэтому найдется индекс $l \in N_s$, при котором справедливо неравенство $f_l(x^*, W_l) < f_l(x^0, W_l)$. Отсюда, учитывая (3) и (5), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} f_l(x^*, W_l + U_l^0) - f_l(x^0, W_l + U_l^0) &= \langle W_l + U_l^0, \sigma(x^*, x^0) \rangle = \\ &= \langle W_l, \sigma(x^*, x^0) \rangle - \delta \|\sigma(x^*, x^0)\|_1 = f_l(x^*, W_l) - f_l(x^0, W_l) - \delta \|\sigma(x^*, x^0)\|_1 < 0, \end{aligned}$$

которые противоречат включению $x^* \in P^s(W + U^0)$.

Итак, при любом числе $\varepsilon > (ms)^{1/p} \varphi(s, \infty)$ гарантируется существование такой возмущающей матрицы $U^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, что $P^s(W + U^0) \not\subseteq P^s(W)$. Следовательно, $\rho(s, p) < \varepsilon$ для всякого $\varepsilon > (ms)^{1/p} \varphi(s, \infty)$, тем самым $\rho(s, p) \leq (ms)^{1/p} \varphi(s, \infty)$.

Наконец, убедимся в справедливости неравенства $\rho(s, p) \leq \chi(s, p)$. Пусть разрез $x^0 \notin P^s(W)$ (тогда и $\overline{x^0} \notin P^s(W)$), а индекс $l \in N_s$ таков, что $\chi(s, p) = \|W_l\|_p$, где $W_l = (w_{l1}, w_{l2}, \dots, w_{lm})$. Задав число $\varepsilon > \chi(s, p)$, зафиксируем δ , удовлетворяющее неравенствам

$$0 < \delta m^{1/p} < \varepsilon - \chi(s, p). \quad (7)$$

Введем в рассмотрение вспомогательный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, каждая компонента которого ξ_r , $r \in N_m$, имеет вид

$$\xi_r = \begin{cases} \delta, & \text{если } \gamma_r(x^0) = 1, \\ -\delta, & \text{если } \gamma_r(x^0) = 0. \end{cases}$$

Тогда очевидно равенство (ср. с (5))

$$\langle \xi, \sigma(x, x^0) \rangle = -\delta \|\sigma(x, x^0)\|_1. \quad (8)$$

Теперь строки $U_k^0 \in \mathbf{R}^m$, $k \in N_s$, возмущающей матрицы $U^0 \in \mathbf{R}^{s \times m}$ зададим по правилу

$$U_k^0 = \begin{cases} \xi - W_l, & \text{если } k = l, \\ \mathbf{0}^{(m)}, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

В результате, учитывая (8), для всякого разреза $x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$ имеем

$$\langle U_l^0, \sigma(x, x^0) \rangle = -\delta \|\sigma(x, x^0)\|_1 - \langle W_l, \sigma(x, x^0) \rangle,$$

и благодаря (7) находим

$$\|U^0\|_p = \|U_l^0\|_p = \|\xi - W_l\|_p \leq \|\xi\|_p + \|W_l\|_p = \delta m^{1/p} + \|W_l\|_p = \delta m^{1/p} + \chi(s, p) < \varepsilon.$$

Отсюда для каждого разреза $x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$ получаем

$$f_l(x, W_l + U_l^0) - f_l(x^0, W_l + U_l^0) = \langle W_l + U_l^0, \sigma(x, x^0) \rangle = -\delta \|\sigma(x, x^0)\|_1 < 0,$$

т. е. $x \notin X(x^0, W + U^0)$. Так как разрезы x^0 и $\overline{x^0}$ не содержатся в $X(x^0, W + U^0)$, то $X(x^0, W + U^0) = \emptyset$. Это значит, что $x^0 \in P^s(W + U^0)$, где $U^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$. Так как $x^0 \notin P^s(W)$, то заключаем, что $\rho(s, p) \leq \varepsilon$ для любого числа $\varepsilon > \chi(s, p)$.

Следовательно, $\rho(s, p) \leq \chi(s, p)$, что вместе с доказанным выше неравенством $\rho(s, p) \leq (ms)^{1/p} \varphi(s, \infty)$ дает требуемую верхнюю оценку $\rho(s, p) \leq \psi(s, p)$.

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение о достижимости нижней и верхней оценок радиуса устойчивости задачи $Z^s(W)$ при $p = \infty$.

Следствие 1. Для радиуса устойчивости нетривиальной задачи $Z^s(W)$, $s \in \mathbf{N}$, справедливы следующие равенства

$$\rho(s, \infty) = \varphi(s, \infty) = \psi(s, \infty) = \min_{x \in X \setminus P^s(W)} \max_{x' \in P(x, W)} \min_{k \in N_s} \frac{\langle W_k, \sigma(x', x) \rangle}{\|\sigma(x', x)\|_1}.$$

О достижимости нижней оценки радиуса устойчивости $\varphi(s, p)$ свидетельствует следующее утверждение.

Следствие 2. При любых $s \in \mathbf{N}$ и $p \in [1, \infty]$ существует такой класс нетривиальных задач $Z^s(W)$, что

$$\rho(s, p) = \varphi(s, p).$$

Доказательство. Будем рассматривать класс задач с условием $P^s(W) = \{x^0, \bar{x}^0\}$. Тогда

$$\varphi = \varphi(s, p) = \min_{x \in X \setminus \{x^0, \bar{x}^0\}} \min_{k \in N_s} \frac{\langle W_k, \sigma(x^0, x) \rangle}{\|\sigma(x^0, x)\|_q}.$$

В силу теоремы 1 для доказательства равенства $\rho(s, p) = \varphi$ достаточно показать, что $\rho(s, p) \leq \varphi$. Этому посвящено дальнейшее изложение.

Согласно определению величины φ найдутся такие $x^* \notin P^s(W)$ и $l \in N_s$, что

$$\varphi \|\sigma(x^0, x^*)\|_q = \langle W_l, \sigma(x^0, x^*) \rangle. \quad (9)$$

Зададим $\varepsilon > \varphi$ и зафиксируем число θ , подчиненное неравенствам $\varphi < \theta < \varepsilon$. Согласно формуле (2) существует такой вектор $u^0 \in \mathbf{R}^m$, что

$$\|u^0\|_p = \theta \quad \& \quad \langle u^0, \sigma(x^0, x^*) \rangle = -\theta \|\sigma(x^0, x^*)\|_q.$$

Поэтому, задав строки U_k^0 , $k \in N_s$, возмущающей матрицы $U^0 \in \mathbf{R}^{s \times m}$ по правилу

$$U_k^0 = \begin{cases} u^0, & \text{если } k = l, \\ \mathbf{0}^{(m)}, & \text{если } k \neq l, \end{cases}$$

имеем

$$\|U^0\|_p = \theta, \quad \langle U_l^0, \sigma(x^0, x^*) \rangle = -\theta \|\sigma(x^0, x^*)\|_q.$$

Отсюда и из (9) с учетом (3) получаем

$$f_l(x^0, W_l + U_l^0) - f_l(x^*, W_l + U_l^0) = \langle W_l + U_l^0, \sigma(x^0, x^*) \rangle = \langle W_l, \sigma(x^0, x^*) \rangle - \theta \|\sigma(x^0, x^*)\|_q < 0.$$

Таким образом, оба разреза x^0 и $\bar{x}^0$ не содержатся в $X(x^*, W + U^0)$. Далее, вновь принимая во внимание внешнюю устойчивость множества Парето и рассуждая аналогично доказательству теоремы 1, приходим к выводу, что $P^s(W + U^0) \not\subseteq P^s(W)$, где $\varphi < \|U^0\|_p < \varepsilon$. Следовательно, $\rho(s, p) \leq \varphi$.

Следствие 2 доказано.

Следствие 3. При любом $p \in [1, \infty]$ для радиуса устойчивости нетривиальной скалярной задачи $Z^1(W)$, $W \in \mathbf{R}^{1 \times m}$, справедливы оценки

$$\varphi(1, p) \leq \rho(1, p) \leq \min \left\{ \|W\|_p, m^{1/p} \varphi(1, \infty) \right\}.$$

Следствие 4. При любых $s \in \mathbf{N}$ и $p \in [1, \infty]$ радиус устойчивости $\rho(s, p)$ нетривиальной задачи $Z^s(W)$ положителен (задача $Z^s(W)$ устойчива) тогда и только тогда, когда $\varphi(s, p) > 0$.

Список литературы

1. Емеличев В. А., Кричко В. Н., Подкопаев Д. П., О радиусе устойчивости векторной задачи линейного булева программирования. *Дискретная математика* (2000) **12**, №2, 25–30.
2. Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P., Stability and regularization of vector problems of integer linear programming. *Optimization* (2002) **51**, №4, 645–676.
3. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А., Мера устойчивости конечной коалиционной игры с параметрическим («от Парето от Нэша») принципом оптимальности *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (2006) **46**, №7, 1274–1280.
4. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Об одном типе устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования в случае монотонной нормы. *Известия РАН. Теория и системы управления* (2007) №5, 45–51.
5. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае в случае регулярности нормы в критериальном пространстве. *Кибернетика и системный анализ* (2010) №1, 82–89.
6. Emelichev V., Podkopaev D., Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming. *Discrete Optimization* (2010) **7**, 48–63.
7. Емеличев В. А., Кричко В. Н., Формула радиуса устойчивости векторной l_∞ -экстремальной траекторной задачи. *Дискретная математика* (2004) **16**, №1, 14–20.
8. Emelichev V., Korotkov V., On stability radius of the multicriteria variant of Markowitz's investment portfolio problem. *Buletinul Academiei de științe a Republicii Moldova. Matematica* (2011) №1, 83–94.
9. Емеличев В. А., Коротков В. В., О радиусе устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями минимаксного риска Сэвиджа. *Кибернетика и системный анализ* (2012) №3, 68–77.
10. Емеличев В. А., Коротков В. В., Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критериями Вальда. *Дискретная математика* (2012) **24**, №3, 3–16.
11. Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. Мир, Москва, 1982.
12. Burer S., Monteiro R. D. C., Zhang Y., Rank-two relaxation heuristics for MAX-CUT and other binary quadratic programs. *SIAM Journal on Optimization* (2001) **12**, 503–521.
13. Barahona F., Grotschel M., Junger M., Reinelt G., An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design. *Operations Research* (1988) **36**, №3, 493–513.
14. Chang K. C., Du D. H.-C., Efficient algorithms for layer assignment problem. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* (1987) **6**, 67–78.
15. Poljac S., Tuza Z., Maximum cuts and large bipartite subgraphs. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* (1995) **20**, 181–244.

16. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И., *Лекции по теории графов*. ЛИБРОКОМ, Москва, 2009.
17. Харди Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г., *Неравенства*. ЛКИ, Москва, 2008.
18. Подиновский В. В., Ногин В. Д., *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2007.

Статья поступила 15.01.2013.