Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев, Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{45, 30, 7; 1, 2, 27\}$ не существует, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 2, 13–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:01:44

Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{45, 30, 7; 1, 2, 27\}$ не существует

© 2013 г. А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев

Дистанционно регулярный граф называется геометрическим, если каждое его ребро лежит в единственной максимальной клике, для порядка которой достигается равенство в неравенстве Хофмана – Дельсарта. С. Банг классифицировала геометрические дистанционно регулярные графы, не содержащие 4-лап. В данной работе уточняется описание одного из классов таких графов. В частности, доказано, что граф с массивом пересечений $\{45, 30, 7; 1, 2, 27\}$ не существует.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программы совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018), программы совместных исследований РФФИ – ГФЕН Китая (проект 12-01-91155). Первый автор поддержан грантом Президента РФ для молодых ученых (проект МК-938.2011.1).

Введение

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом, регулярным степени k и с наименьшим собственным значением $-m$ (необходимые определения даны в разделе 1 данной статьи). Тогда для любой клики L графа Γ верно *неравенство Хофмана – Дельсарта* $|L| \leq 1 + k/m$, [1, предложение 4.4.6(i)].

Клику L в графе Γ назовем *кликкой Дельсарта*, если для нее достигается равенство в этом неравенстве. Назовем неполный дистанционно регулярный граф Γ *геометрическим* [2], если в Γ существует такое множество L клик Дельсарта, что каждое ребро Γ лежит в единственной клике из L . Заметим, что наименьшее собственное значение геометрического графа является целым числом.

Дистанционно регулярные графы из многих известных семейств являются геометрическими: графы Хемминга, Джонсона, Грассмана и др. В последнее время геометрические дистанционно регулярные графы активно изучаются рядом авторов. В частности, в работе [3] показано, что для фиксированных целых чисел $m \geq 2$ и $d \geq 3$ существует лишь конечное число не геометрических дистанционно регулярных графов диаметра d , имеющих наименьшее собственное значение, не меньшее $-m$.

Важной задачей является классификация геометрических дистанционно регулярных графов, наименьшее собственное значение которых не меньше фиксированного отрицательного числа $-m$. Любой связный граф с наименьшим собственным значением не меньше -1 является полным графом. Неполные связные регулярные графы с наименьшим собственным значением не меньше -2 классифицированы в [1, теорема 3.12.2] (такие графы являются либо реберными графами, либо полными многодольными графами с долями порядка 2, либо имеют не более 28 вершин).

Аналогичную классификацию можно проводить, используя информацию о локальном строении графа (или в терминах запрещенных подграфов). Напомним, что n -лапой называется полный двудольный граф с долями порядка 1 и n . Связный граф, не содержащий 2-лап, является полным графом. Классификация графов, не содержащих 3-лап, является хорошо известной задачей. В частности, классификация дистанционно регулярных графов, не содержащих 3-лап, получена в работе [4].

Если Γ является геометрическим дистанционно регулярным графом с наименьшим собственным значением $-m$, а L — соответствующим множеством клик Дельсарта, то любая вершина из Γ содержится точно в m кликах из L . Поэтому геометрический дистанционно регулярный граф с наименьшим собственным значением $-m$ не содержит $(m+1)$ -лап.

В работе [5] изучались геометрические дистанционно регулярные графы с наименьшим собственным значением -3 (следовательно, не содержащие 4-лап). В [5, теорема 4.3] все графы с таким свойством перечислены в 12-и классах (в каждом из которых с точностью до некоторых параметров указан массив пересечений).

В одном из этих классов все графы имеют диаметр три, а массив пересечений имеет вид $\{3\alpha+3, 2\alpha+2, \alpha+2-\beta; 1, 2, 3\beta\}$, где $\alpha \geq \beta \geq 1$ — целые числа. Из списка [1] допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов (с небольшим числом вершин) в этот класс попадают только массивы графов Хэмминга $H(3, \alpha+2)$ и графа Дуба диаметра 3 (при $\beta = 1$), и массив пересечений $\{45, 30, 7; 1, 2, 27\}$ (при $\alpha = 14, \beta = 9$), для которого существование соответствующего графа, как отмечает автор [5], неизвестно.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{45, 30, 7; 1, 2, 27\}$ не существует.*

Уже после написания данной статьи С. Банг и Дж. Кулен [6] сообщили нам, что показали несуществование графов с массивом пересечений $\{3\alpha+3, 2\alpha+2, \alpha+2-\beta; 1, 2, 3\beta\}$ для всех $\beta > 1$ за исключением единственного случая, когда $\alpha = 14$ и $\beta = 9$.

Таким образом, результат [6] вместе с доказанной в нашей работе теоремой позволяет сформулировать следующее утверждение.

Следствие. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{3\alpha+3, 2\alpha+2, \alpha+2-\beta; 1, 2, 3\beta\}$ для некоторых целых $\alpha \geq \beta \geq 1$. Тогда $\beta = 1$ и Γ является графом Хэмминга или Дуба.*

Доказательство теоремы ведется от противного. Предположим, что граф Γ является контрпримером к теореме. В разделе 1 приведены необходимые определения, обозначения и предварительные результаты относительно графа Γ . В частности, показано, что в Γ найдется такая пара вершин a, c на расстоянии 3, что множество

вершин в Γ , находящихся на расстоянии 3 и от a , и от c , содержит клику L_0 порядка не менее 5 (и не более 7). В разделах 2, 3 и 4 последовательно доказывается, что $|L_0| < 7$, $|L_0| < 6$ и, наконец, $|L_0| \neq 5$. Полученное противоречие доказывает теорему.

1. Предварительные результаты

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть Γ является таким графом. Для подмножества вершин X графа Γ мы будем также через X обозначать подграф, индуцированный в Γ множеством X . Далее термин "подграф" всегда будет означать подграф, индуцированный множеством вершин.

Для вершины $x \in \Gamma$ *окрестностью* x в Γ называется подграф $\Gamma(x)$, индуцированный множеством ее соседей (вершин на расстоянии 1 от x). Более общо, через $\Gamma_i(x)$ обозначим подграф, индуцированный множеством вершин на расстоянии i от x . В частности, $\Gamma(x) = \Gamma_1(x)$. Для множества вершин X графа Γ через $\Gamma(X)$ обозначим множество вершин из $\Gamma \setminus X$, имеющих хотя бы одного соседа в X .

Степенью вершины x называется количество ее соседей, т.е. число $|\Gamma(x)|$. Граф Γ называется *регулярным степени* k , если степень каждой его вершины равна k .

Для вершин x, y на расстоянии 2 в Γ подграф $\Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ называется μ -*подграфом* вершин x, y . Скажем, что для графа Γ *определено число* $\mu(\Gamma)$, если для любых двух вершин $x, y \in \Gamma$ на расстоянии 2 верно равенство $|\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| = \mu(\Gamma)$.

Пусть Γ является связным графом диаметра d . Если вершины x, y находятся на расстоянии $0 \leq i \leq d$ в Γ , то через $b_i(x, y)$ (через $c_i(x, y)$) обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma(y)$ ($\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma(y)$). Здесь мы полагаем $\Gamma_{-1}(x), \Gamma_{d+1}(x)$ пустыми множествами и $\Gamma_0(x) = \{x\}$.

Граф Γ называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если верны равенства $b_i(x, y) = b_i$ и $c_i(x, y) = c_i$ для любых вершин x, y на расстоянии i в Γ и для любого $0 \leq i \leq d$. Положим также $a_i = b_0 - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа число b_0 равно степени графа, $c_1 = 1$, $c_2 = \mu(\Gamma)$ и $b_d = c_0 = 0$.

В дистанционно регулярном графе для любых $0 \leq i, j, l \leq d$ и любых вершин x, y на расстоянии l количество вершин z , находящихся одновременно на расстоянии i от x и на расстоянии j от y , т.е. число $|\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)|$, не зависит от выбора вершин x, y и равно p_{ij}^l . В частности, для любой вершины $x \in \Gamma$ подграф $\Gamma_i(x)$ содержит одно и тоже число вершин, равное $k_i = p_{ii}^0$, $1 \leq i \leq d$, и является регулярным графом степени a_i . Числа пересечения p_{ij}^l определяются массивом пересечений и могут быть вычислены в соответствии с [1, предложение 4.1.6] и [1, лемма 4.1.7].

Спектром графа называется спектр его матрицы смежности. Спектр дистанционно регулярного графа вычисляется по его массиву пересечений (см. [1, раздел 4.1.B]).

Кликой (жонгликой) в графе называется множество попарно смежных (соответственно, попарно не смежных) вершин. Клика называется l -кликой, если она содержит точно l вершин. Клика в графе называется *максимальной*, если она является максимальной по включению.

Для целых $m > 0, n > 0$ определим $m \times n$ -*решетку* как граф, множеством вершин которого являются все пары вида (i, j) , $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, и различные пары (i, j) и (i', j') смежны, если и только если $i = i'$ или $j = j'$.

До конца работы через Γ обозначим дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{45, 30, 7; 1, 2, 27\}$, являющийся контрпримером к теореме. Тогда Γ имеет спектр $45^1, 17^{90}, 9^{70}, -3^{735}$. Нам потребуются также значения некоторых чисел пересечения: $p_{33}^0 = 175$, $p_{33}^3 = 48$, $p_{33}^2 = 28$.

Граница Хофмана – Дельсарта для клик [1, предложение 4.4.6(i)], примененная к Γ , показывает, что максимальная клика в Γ имеет порядок не больше 16. Следующая лемма проясняет локальное строение Γ .

Лемма 1.1. *Если $\alpha > 5$, то окрестность любой вершины в дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{3\alpha + 3, 2\alpha + 2, \alpha + 2 - \beta; 1, 2, 3\beta\}$ является дизъюнктным объединением трех $(\alpha + 1)$ -клик.*

Доказательство. Если окрестность Δ некоторой вершины графа с указанным массивом пересечений содержит c -клик, то по [7, лемма 2] выполняется неравенство $c_2 - 1 \geq (c(a_1 + 1) - b_0)/\binom{c}{2}$, которое в нашем случае имеет вид $1 \geq (c(\alpha + 1) - 3(\alpha + 1))/\binom{c}{2}$. Отсюда при $c = 4$ имеем $\alpha \leq 5$, т.е. при $\alpha > 5$ подграф Δ не содержит 4-клик.

С другой стороны, поскольку $b_0/(a_1 + 1) = 3$, то любая вершина x графа Δ содержится в некоторой 3-кликке $\{x, y, z\}$, причем $\Delta \subset \{x, y, z\} \cup \Delta(\{x, y, z\})$. Но если хотя бы две вершины из x, y, z лежат в одной связной компоненте графа Δ , то $\{x, y, z\} \cup \Delta(\{x, y, z\})$ содержит не более $3(\alpha + 1) - 1$ вершин, что противоречит предыдущему абзацу. Значит, вершины x, y, z лежат в трех различных связных компонентах, каждая из которых является $(\alpha + 1)$ -кликкой. Лемма доказана.

Ввиду леммы 1.1 любой μ -подграф в графе Γ является 2-кликкой. Обозначим через S класс графов, в которых любой μ -подграф является 2-кликкой (таким образом, для любого графа $\Sigma \in S$ определено число $\mu(\Sigma)$, равное 2), а окрестность каждой вершины является дизъюнктивным объединением не более трех клик (возможно, различных порядков). Очевидно, что $\Gamma \in S$.

Лемма 1.2. *Пусть Σ — граф из класса S , и если диаметр Σ больше 2, то пусть вершины a и c находятся на расстоянии 3 в Σ . Тогда выполняются следующие утверждения:*

- (1) *если граф Σ связан, то он регулярен;*
- (2) *для любой пары вершин $x \in \Sigma$, $y \in \Sigma_2(x)$ подграф $\Sigma(y) \cap \Sigma_3(x)$ является кликой или пустым графом, а подграф $\Sigma \setminus (\{x\} \cup \Sigma(x) \cup \Sigma_2(x))$ является графом из класса S ;*
- (3) *если граф Σ связан, то его диаметр не больше 3;*
- (4) *подграф $\Sigma_3(a) \cap \Sigma_3(c)$ является графом из класса S ;*
- (5) *если Φ — связная компонента подграфа $\Sigma_3(a)$, содержащая вершину c , то $\Sigma_3(a) \setminus (\Phi \subseteq \Sigma_3(c))$;*
- (6) *верно равенство $c_3(a, c) = c_3(c, a)$, кроме того, $c_3(a, c) \geq 3$, и если $\Sigma(a) \cap \Sigma_2(c)$ является дизъюнктивным объединением двух клик M_1, M_2 , то $|M_1| = |M_2|$;*
- (7) *если Φ, Ψ — различные связные компоненты подграфа $\Sigma_3(a)$, $c \in \Phi$, $d \in \Psi$ и, без ограничения общности, $|\Phi(c)| < |\Psi(d)|$, то вершины a, c лежат в одной связной компоненте подграфа $\Sigma_3(d)$, при этом $c_3(a, c) \geq 7$ и $|\Psi(d)| - |\Phi(c)| \geq 3$.*

Доказательство. (1) Можно считать, что Σ не является полным графом. Зафиксируем ребро $\{x, y\}$ графа Σ и положим $X = \Sigma(x) \setminus (\Sigma(y) \cup \{y\})$, $Y = \Sigma(y) \setminus (\Sigma(x) \cup \{x\})$. Тогда для любой вершины $u \in X$ подграф $\Sigma(y) \cap \Sigma(u)$ содержит x и единственную

вершину из Y . Симметрично, для любой вершины $w \in Y$ подграф $\Sigma(x) \cap \Sigma(w)$ содержит y и единственную вершину из X . Поэтому $|X| = |Y|$ и степени вершин x, y в графе Σ совпадают. По связности граф Σ регулярен.

(2) По определению для вершины $y \in \Sigma_2(x)$ подграф $\Sigma(x) \cap \Sigma(y)$ является 2-кликкой, следовательно, подграф $\Sigma(y) \cap \Sigma_3(x)$ не содержит несмежных вершин. Поэтому для подграфа $\Sigma' = \Sigma \setminus (\{x\} \cup \Sigma(x) \cup \Sigma_2(x))$ определено число $\mu(\Sigma')$, равное $\mu(\Sigma)$. Остальные свойства графа Σ' наследуются от графа Σ , поэтому $\Sigma' \in S$.

(3) Ввиду утверждений (1) и (2) граф Σ регулярен и каждая связная компонента Φ подграфа $\Sigma \setminus (\{x\} \cup \Sigma(x) \cup \Sigma_2(x))$ является регулярным графом для любой вершины $x \in \Sigma$. Это означает, что все вершины из Φ находятся на одинаковом расстоянии (в графе Σ) от вершины x , т.е. на расстоянии 3. Поэтому $\Sigma \setminus (\{x\} \cup \Sigma(x) \cup \Sigma_2(x)) = \Sigma_3(x)$.

(4, 5) Утверждения следуют из утверждений (1), (2) и (3).

(6) Равенство следует из подсчета двумя способами числа ребер между подграфами $\Sigma(a) \cap \Sigma_2(c)$ и $\Sigma_2(a) \cap \Sigma(c)$. Допустим, что $c_3(a, c) = 2$, и положим $\{d_1, d_2\} = \Sigma_2(a) \cap \Sigma(c)$, $\{e_1, e_2\} = \Sigma_2(c) \cap \Sigma(a)$. Тогда $\Sigma(d_i) \cap \Sigma(a) = \{e_1, e_2\}$ и, симметрично, $\Sigma(e_i) \cap \Sigma(c) = \{d_1, d_2\}$, поэтому $e_1 \not\sim e_2$, $d_1 \not\sim d_2$. Тогда μ -подграф вершин d_1, d_2 содержит три вершины e_1, e_2, c , что противоречит условию.

Предположим теперь, что подграф $\Sigma(a) \cap \Sigma_2(c)$ является дизъюнктным объединением двух клик M_1, M_2 . Тогда каждая вершина из $\Sigma_2(a) \cap \Sigma(c)$ имеет по одному соседу в M_1 и в M_2 , поэтому число ребер между кликой M_1 и подграфом $\Sigma_2(a) \cap \Sigma(c)$ равно числу ребер между кликой M_2 и $\Sigma_2(a) \cap \Sigma(c)$ и равно $2|M_1| = 2|M_2|$.

(7) По утверждению (5) имеем включение $\Phi \subset \Sigma_3(d)$, при этом по утверждению (6) степень вершины c в подграфе $\Sigma_3(d)$ равна степени вершины d в подграфе $\Sigma_3(c)$. Поскольку $|\Phi(c)| < |\Psi(d)|$, то вершина c имеет соседей из $\Sigma_2(a) \cap \Sigma_3(d)$, следовательно, вершины a, c лежат в одной связной компоненте подграфа $\Sigma_3(d)$. Далее, $c_3(d, c) \geq 3$, при этом верно включение $\Sigma_2(d) \cap \Sigma(c) \subset \Sigma_2(a)$, поэтому $c_3(a, c) \geq 6$ и $|\Psi(d)| - |\Phi(c)| \geq 3$. Заметим, что подграфы $\Sigma(a) \cap \Sigma_2(d)$, $\Sigma(c) \cap \Sigma_2(d)$ и $\Sigma(d) \cap \Sigma_2(a)$ содержат одинаковые количества вершин, при этом все они одновременно не могут быть 3-кликками. Поэтому выполняется неравенство $c_3(a, c) \geq 7$. Лемма доказана.

Зафиксируем вершину $a \in \Gamma$ и обозначим через Σ подграф $\Gamma_3(a)$.

Лемма 1.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) подграф Σ связан и принадлежит классу S , а окрестность каждой его вершины является дизъюнктивным объединением трех 6-клик;

(2) для любой вершины $c \in \Sigma$ любая связная компонента Δ подграфа $\Sigma \cap \Gamma_3(c)$ является регулярным графом степени не больше 10, более того, $\Delta \in S$.

Доказательство. Ввиду леммы 1.2 имеем $\Sigma \in S$. Выберем вершины $b \in \Gamma_2(a)$ и $c \in \Gamma(b) \cap \Sigma$. По лемме 1.2(2) подграф $\Gamma(b) \cap \Sigma$ является 7-кликкой (так как $b_2 = 7$). Следовательно, подграф $\Gamma(b) \cap \Gamma(c) \cap \Gamma_2(a)$ является 8-кликкой, подграф $\Gamma(c) \cap \Gamma_2(a)$ является дизъюнктивным объединением трех 9-клик (т.к. $c_3 = 27$), и подграф $\Sigma(c)$ является дизъюнктивным объединением трех 6-клик. Связность графа Σ очевидна. Утверждение (1) доказано.

Обозначим через Δ связную компоненту подграфа $\Sigma_3(c)$. По лемме 1.2(4) имеем $\Delta \in S$. Заметим также, что $|\Delta| \leq p_{33}^3 = 48$. Если степень графа Δ не меньше 12, то $|\Delta| \geq 1 + 12 + 12 \cdot 6/2$, противоречие.

Предположим, что степень Δ равна 11. Выберем вершину $e \in \Delta$ и положим $\Phi = \Sigma(c) \cap \Sigma_2(e)$, $\Psi = \Sigma(e) \cap \Sigma_2(c)$. По лемме 1.2(6) имеем $|\Psi| = |\Phi| = 7$.

Если Ψ является дизъюнктивным объединением двух клик, то по лемме 1.2(6) их порядки должны быть равны, что невозможно. Пусть граф Ψ является дизъюнктивным объединением трех клик порядков l_1, l_2, l_3 : $l_1 + l_2 + l_3 = 7$.

Если $l_1 = 1$, то каждая вершина из Φ , не смежная с единственной вершиной из клики порядка l_1 , смежна с одной вершиной из клики порядка l_2 и с одной — из клики порядка l_3 . Поэтому $7 = |\Phi| \leq 2 \cdot \min\{l_2, l_3\} + 2$ и $\{l_1, l_2, l_3\} = \{1, 3, 3\}$. В этом случае подграф $\Delta(e)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков 3, 3 и 5, и число ребер между $\Delta(e)$ и $\Delta_2(e)$ равно $2 \cdot 3 \cdot 8 + 5 \cdot 6$, поэтому $|\Delta_2(e)| = 39$. Противоречие с тем, что тогда $|\Delta| \geq 1 + 11 + 39$.

Таким образом, $\{l_1, l_2, l_3\} = \{2, 2, 3\}$, и $\Delta(e)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков 3, 4 и 4. В этом случае число ребер между $\Delta(e)$ и $\Delta_2(e)$ равно $3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 7$ и $|\Delta_2(e)| = 40$, что противоречит неравенству $|\Delta| \geq 1 + 11 + 40$. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Если для любой вершины $c \in \Sigma$ и для любой 7-клики L из Σ выполняется неравенство $|L \cap \Sigma_3(c)| \leq 4$, то Σ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечения $\{18, 12, 4; 1, 2, 9\}$.*

Доказательство. Очевидно, что для графа Σ определены числа пересечения a_{i-1}, b_{i-1}, c_i для $i \leq 2$, и из лемм 1.3(1) и 1.2(3) следует, что диаметр Σ равен 3. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что определены числа b_2 и c_3 .

Зафиксируем 7-клику L из Σ . Тогда для любой вершины $e \in L$ подграф $\Sigma(e) \setminus L$ содержит две 6-клики и $|\Sigma(L)| = 7 \cdot 12 = 84$. По предположению каждая вершина из $\Sigma \setminus (L \cup \Sigma(L))$ находится на расстоянии 3 не более чем от четырех вершин из L . Так как $|\Sigma \setminus (L \cup \Sigma(L))| = 84 = 7 \cdot p_{33}^3/4$, то любая вершина c из $\Sigma \setminus (L \cup \Sigma(L))$ находится на расстоянии 3 точно от четырех вершин из L . Поэтому $b_2(\Sigma) = 4$, и окрестность каждой вершины в графе $\Sigma_3(e)$ является дизъюнктивным объединением трех 3-клик. Отсюда $c_3(\Sigma) = 9$. Лемма доказана.

Замечание 1. Легко проверить, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{18, 12, 4; 1, 2, 9\}$ имеет собственные значения 18, 8, 3 и -3 , причем кратности собственных значений 8 и -3 не целые. Поэтому граф с таким массивом пересечений не существует. Интересно при этом, что массив пересечений $\{18, 12, 4; 1, 2, 9\}$ также может быть записан в виде $\{3\alpha + 3, 2\alpha + 2, \alpha + 2 - \beta; 1, 2, 3\beta\}$ при $\alpha = 5, \beta = 3$.

Обозначим через Δ связную компоненту подграфа $\Sigma_3(c)$. Среди всех пар вершин a, c на расстоянии 3 в Γ выберем такую пару, что число вершин в Δ максимально.

Пусть M является максимальной кликой из Γ , содержащей $m > 0$ вершин из Δ . Тогда M содержит по $7 - m$ вершин из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_3(c)$, $\Gamma_3(a) \cap \Gamma_2(c)$ и $m + 2$ вершин из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(c)$.

Лемма 1.5. *Справедливы следующие утверждения:*

- (1) для любой 7-клики $L \subset \Sigma$ с условием $3 \leq |L \cap \Sigma_3(c)| \leq 7$ подграф $L \cap \Sigma_3(c)$ не является связной компонентой в $\Sigma_3(c)$;
- (2) если Δ содержит максимальную 2-клику, то $\Delta = \Sigma_3(c)$;
- (3) если Δ содержит максимальную 3-клику и $|\Delta| \geq 27$, то $\Sigma_3(c) \setminus \Delta$ является кликой, в частности, $|\Delta| \geq 46$;
- (4) если для некоторой вершины $u \in \Delta$ подграф $\Delta_1(u)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков $0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3$, то $l_2 + l_3 - l_1 \leq 6$ и $|\Delta_2(u)| = (l_1(l_2 + l_3) + l_2(l_1 + l_3) + l_3(l_1 + l_2))/2$.

Доказательство. Положим $L_0 = L \cap \Sigma_3(c)$ и допустим, что L_0 является связной компонентой в $\Sigma_3(c)$, зафиксируем вершину $e \in L_0$. Подграф $\Sigma_3(e)$ содержит $\Sigma_3(c) \setminus L_0$ и $|L_0|$ -вершинный подграф L'_0 из $\{c\} \cup \Sigma(c)$, т.е. $\Sigma_3(c) \setminus L_0 = \Sigma_3(e) \setminus L'_0$. Поэтому подграф L'_0 является $|L_0|$ -кликой и связной компонентой графа $\Sigma_3(e)$.

Отсюда следует, что любая вершина из L_0 находится на расстоянии 3 от любой вершины из L'_0 (если найдутся вершины $e' \in L_0$, $c' \in L'_0$ на расстоянии 2, то $\Sigma_3(c) \setminus L_0 \subseteq \Gamma_3(e') \cap \Gamma_3(c')$, что противоречит равенству $p_{33}^2 = 28$).

Поэтому подграфы $\Sigma(L_0)$ и $\Sigma(L'_0)$ не пересекаются, и $|\Sigma(L_0)| = |\Sigma(L'_0)| = 12|L_0| + 7 - |L_0| = 11|L_0| + 7$. Теперь $L_0 \cup \Sigma(L_0) \cup L'_0 \cup \Sigma(L'_0)$ содержит $24|L_0| + 14$ вершин, что при $5 \leq |L_0| \leq 7$ больше, чем $|\Gamma_3(c)| - |\Sigma_3(c) - L_0| = 175 - (48 - |L_0|)$, противоречие.

Допустим, что $|L_0| = 4$. Тогда $|\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0 \cup L'_0)| = 21$, и ввиду леммы 1.3(2) вершина из $\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0 \cup L'_0)$ смежна в среднем не менее, чем с $44(18 - 10)/21 > 6$ вершинами из $\Sigma_3(c) \setminus \Delta$, противоречие с леммами 1.2(2) и 1.3(1). Если $|L_0| = 3$, то $|\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0 \cup L'_0)| = 44$ и вершина из $\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0 \cup L'_0)$ смежна в среднем не менее, чем с $45(18 - 10)/44 > 6$ вершинами из $\Sigma_3(c) \setminus \Delta$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Перед доказательством утверждений (2) и (3) предположим, что $\Sigma_3(c) \neq \Delta$. Тогда для любой вершины $d \in \Sigma_3(c) \setminus \Delta$ по лемме 1.2(5) имеем $\Delta \subset \Sigma_3(d)$, поэтому любая максимальная клика из подграфа Δ содержится в некоторой максимальной клике из $\Sigma_3(d)$.

Пусть теперь Δ содержит максимальную 2-клику N и $\Delta \neq \Sigma_3(c)$. Выберем вершину $d \in \Sigma_3(c) \setminus \Delta$ и положим $\{x, y\} = \{a, c\}$. Обозначим через M максимальную клику в графе Γ , содержащую N . Тогда M содержит по 5 вершин из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_3(c)$, $\Gamma_3(a) \cap \Gamma_2(c)$ и 4 вершины из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(c)$. Для доказательства утверждения (2) достаточно показать, что клика N максимальна в подграфе $\Gamma_3(d) \cap \Gamma_3(x)$ для любой вершины $x \in \{a, c\}$. Действительно, в этом случае клика M содержит по 5 вершин из $\Gamma_3(a) \setminus \Delta$, $\Gamma_3(c) \setminus \Delta$ и $\Gamma_3(d) \setminus \Delta$, что невозможно.

Если клика N не максимальна в подграфе $\Gamma_3(d) \cap \Gamma_3(x)$, то подграф $\Gamma_3(d)$ содержит вершину из $M \cap \Gamma_3(x) \cap \Gamma_2(y)$, поэтому вершина y принадлежит связной компоненте подграфа $\Gamma_3(d) \cap \Gamma_3(x)$, включающей в себя собственный подграф Δ , что противоречит выбору пары вершин a, c (вместо нее следовало бы взять пару вершин x, d). Утверждение (2) доказано.

Пусть теперь Δ содержит максимальную 3-клику N , и $|\Delta| \geq 27$. Если $\Sigma_3(c) \setminus \Delta$ содержит две несмежные вершины y_1, y_2 , то из равенства $p_{33}^2 = 28$ следует, что расстояние между вершинами y_1 и y_2 равно 3. По аналогии с доказательством утверждения (2) можно показать, что клика N максимальна в каждом подграфе вида $\Gamma_3(x) \cap \Gamma_3(y)$, где $x, y \in \{a, c, y_1, y_2\}$. Теперь 16-клика M из Γ , содержащая N , содержит по 4 вершины из $\Gamma_3(a) \setminus \Delta$, $\Gamma_3(c) \setminus \Delta$ и из $\Gamma_3(y_i) \setminus \Delta$, $i = 1, 2$, противоречие. Значит, $\Sigma_3(c) \setminus \Delta$ является кликой и по утверждению (1) имеем $|\Delta| \geq 46$. Утверждение (3) доказано.

Предположим, что для некоторой вершины $u \in \Delta$ подграф $\Delta(u)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков $0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3$. Равенство для $|\Delta_2(u)|$ очевидно, так как $\Delta \in \mathcal{S}$ и граф Δ регулярен степени $l_1 + l_2 + l_3$. Подграф $\Sigma(u) \cap \Sigma_2(c)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков $6 - l_1, 6 - l_2$ и $6 - l_3$. По лемме 1.2(6) подграф $\Sigma(c) \cap \Sigma_2(u)$ содержит также $18 - l_1 - l_2 - l_3$ вершин, каждая из которых имеет точно двух соседей в различных кликах из $\Sigma(u) \cap \Sigma_2(c)$. Симметрично, каждая вершина из $\Sigma(u) \cap \Sigma_2(c)$ имеет точно двух соседей в $\Sigma(c) \cap \Sigma_2(u)$. Поэтому

$18 - l_1 - l_2 - l_3 \leq 2(6 - l_2 + 6 - l_3)$ и выполняется неравенство $l_2 + l_3 - l_1 \leq 6$. Лемма доказана.

Замечание 2. Рассуждения, доказывающие утверждение (4) леммы 1.5, могут быть применены к любому графу из класса S . А именно, пусть $\Omega \in S$ — связный граф и $x, y \in \Omega$ — вершины на расстоянии 3, причем подграф $\Omega(x) \cap \Omega_2(y)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков l_1, l_2, l_3 , $0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3$. Тогда по лемме 1.2(6) подграф $\Omega(y) \cap \Omega_2(x)$ содержит также $l_1 + l_2 + l_3$ вершин, каждая из которых имеет точно двух соседей в различных кликах из $\Omega(x) \cap \Omega_2(y)$. Симметрично, каждая вершина из $\Omega(x) \cap \Omega_2(y)$ имеет точно двух соседей в $\Omega(y) \cap \Omega_2(x)$. Поэтому $l_1 + l_2 + l_3 \leq 2(l_1 + l_2)$ и выполняется неравенство $l_1 + l_2 - l_3 \geq 0$. Это замечание будет использовано при доказательстве некоторых следующих лемм.

Ввиду леммы 1.4 для данной вершины a найдутся вершина $c \in \Sigma$ и 7-клика L из Σ такие, что $|L \cap \Gamma_3(c)| \geq 5$. Обозначим через Δ связную компоненту графа $\Sigma_3(c)$, содержащую клику $L_0 = L \cap \Sigma_3(c)$, а через Δ' обозначим подграф $\Delta \setminus (L_0 \cup \Delta(L_0))$. Далее, через B_j обозначим множество вершин из Δ' , смежных точно с j вершинами из $\Delta(L_0)$, и положим $\beta_j = |B_j|$. Тогда $\beta_j = 0$ для нечетных индексов j , $\sum_j \beta_j = |\Delta'|$, а $\sum_j j\beta_j$ есть число ребер между подграфами $\Delta(L_0)$ и Δ' .

2. Доказательство неравенства $|L_0| < 7$

Допустим, что $|L_0| = 7$, т.е. $L = L_0$. Заметим, что для вершины $e \in L$ подграф $\Sigma(e) \cap \Sigma_2(c)$ является дизъюнктивным объединением двух клик. По лемме 1.2(6) указанные клики равноможны, поэтому подграф $\Delta(e) \setminus L$ является дизъюнктивным объединением двух i -клик, где $i \in \{1, 2\}$ (ввиду леммы 1.3(2)).

Пусть w, w' — две несмежные вершины из $\Delta(e) \setminus L$. Тогда вершина u из $\Delta(w) \cap \Delta(w') \setminus L$ не принадлежит $\Delta(L)$, ибо в противном случае имеем $|\Delta(e) \cap \Delta(u)| \geq 3$. Поскольку степень вершины u в графе Δ не больше 10, то $u \in \Delta_3(e')$ для некоторой вершины $e' \in L$.

Лемма 2.1. *Верно неравенство $i \neq 1$.*

Доказательство. Если $i = 1$, то по лемме 1.5(2) имеем $|\Delta| = 48$, $|\Delta_2(e)| = (2 \cdot 7 + 6 \cdot 2)/2 = 13$ и $|\Delta_3(e)| = 26$. Так как число ребер между $\Delta_2(e)$ и $\Delta_3(e)$ не больше $|\Delta_2(e)| \cdot 6$ (по лемме 1.2(2)), но не меньше $|\Delta_2(e)| \cdot 3$ (по лемме 1.2(6)), то $b_2(e, u') = 6$ и $c_3(e, z) = 3$ для любых вершин $u' \in \Delta_2(e)$ и $z \in \Delta_3(e)$. Поэтому для любой вершины $z \in \Delta_3(e)$ подграф $\Delta_2(z) \cap \Delta(e)$ содержит 3 вершины, включая вершины w, w' и некоторую вершину из L . Теперь $\Delta(z) \cap \Delta_2(e)$ содержит единственную вершину $u \in \Delta(w) \cap \Delta(w') \setminus L$, противоречие с тем, что тогда $\Delta_3(e) \subset \Delta(u)$.

Лемма 2.2. *Верно неравенство $i \neq 2$.*

Доказательство. В случае $i = 2$ имеем $|\Delta(L)| = 28$ и $|\Delta| \geq 46$ по лемме 1.5(3). Для вершины $e \in L$ получим $|\Delta_2(e)| = 28$, при этом $|\Delta_2(e) \cap \Delta'| = 4$ и выполняется $7 \leq |\Delta_3(e)| \leq 9$. Каждая вершина из $\Delta(L)$ смежна с некоторой вершиной из L , с 7 вершинами из $\Delta(L)$ и с двумя вершинами из Δ' . Поэтому число ребер между $\Delta(L)$ и Δ' равно 56.

Выберем вершину $u \in B_{2n} \cap \Delta_3(e)$ (для некоторого n ; конкретные случаи будут рассмотрены ниже). По лемме 1.2(6) верно равенство $|\Delta_2(u) \cap \Delta(e)| = |\Delta_2(e) \cap \Delta(u)|$, при этом заметим, что $|\Delta_2(u) \cap \Delta(e)| \leq n + |\Delta(e) \setminus L_0| = n + 4$, с другой стороны,

$|\Delta_2(e) \cap \Delta(u)| \geq 2n$. В частности, $\beta_{10} = 0$. Ввиду леммы 1.5(4) можно считать, что $\Delta_1(u)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков l_1, l_2, l_3 : если $\{l_1, l_2, l_3\} = \{3, 3, 4\}$, то $|\Delta_2(u)| = 33$, если $\{l_1, l_2, l_3\} = \{2, 4, 4\}$, то $|\Delta_2(u)| = 32$, если $\{l_1, l_2, l_3\} = \{2, 3, 5\}$, то $|\Delta_2(u)| = 31$, если $\{l_1, l_2, l_3\} = \{2, 2, 6\}$, то $|\Delta_2(u)| = 28$. В первых трех случаях имеем неравенство $|\Delta_3(u)| \leq 6$.

Если $n = 0$, то $\Delta(u)$ содержит не менее трех, а значит, все четыре вершины из $\Delta_2(e) \cap \Delta'$, по крайней мере две из которых несмежны и имеют общего соседа в $\Delta(e) \cup (\Delta_2(e) \cap \Delta')$. Следовательно, $\beta_0 = 1$. Теперь степень u в графе $\Delta_3(e)$ равна 6, поэтому подграф $(\{u\} \cup \Delta(u)) \cap \Delta_3(e)$ является 7-кликой L' . Так как $B_0 = \{u\}$ и, по определению, вершина из B_0 находится на расстоянии 3 от любой вершины $e' \in L$, то $\Delta(u) \setminus L' = \Delta_2(e') \cap \Delta'$ и $\Delta(u) \setminus L' \subseteq B_{14}$, противоречие.

Если $n = 1$, то $|\Delta(e) \cap \Delta_2(u)| = 5$, иначе $\Delta(e) \cap \Delta_3(u) \not\subseteq L$ и $|\Delta_3(u)| \geq 12$, что невозможно. Далее, $(\{u\} \cup \Delta(u)) \cap \Delta_3(e)$ является 6-кликой и связной компонентой подграфа $\Delta_3(e)$, поскольку в противном случае $|\Delta_3(e)| \geq 12$, что невозможно.

Подграф $\Delta' \setminus (\Delta_2(e) \cup \{u\} \cup \Delta(u))$ содержит не более трех вершин, которые по лемме 1.2(5) принадлежат $\Delta_3(u) \cap \Delta_3(e)$. Вершина $u' \in \Delta(u) \cap \Delta_3(e)$ имеет точно пять соседей в $\Delta' \cap \Delta_3(e)$, поэтому $u' \in B_2 \cup B_4$. В любом случае u' имеет еще по крайней мере одного соседа из $\Delta_2(e) \cap \Delta'$. Значит, $(\{u\} \cup \Delta(u)) \cap \Delta_3(e) \subset \Delta(w)$ для некоторой вершины $w \in \Delta_2(e) \cap \Delta'$, и $(\{w\} \cup \Delta(w)) \cap (\{u\} \cup \Delta(u))$ является 7-кликой L' . Теперь $(\Delta(u) \cap \Delta_2(e) \cap \Delta') \setminus \{w\}$ содержится в $\Delta_2(e')$ для любой вершины $e' \in L \cap \Delta_3(u)$, противоречие с тем, что тогда $\Delta(u) \cap \Delta_2(e) \cap \Delta' \subseteq B_{12}$. Значит, $\beta_2 = 0$.

Если $n = 2$, то $|\Delta(e) \cap \Delta_2(u)| = 6$, иначе $\Delta(e) \cap \Delta_3(u) \not\subseteq L$ и $|\Delta_3(u)| \geq 10$, что невозможно. Отсюда связная компонента подграфа $\Delta_3(u)$, содержащая e , является 5-кликой из L_0 , а связная компонента Ψ подграфа $\Delta_3(e)$, содержащая u , является либо 5-кликой, либо 2×4 -решеткой. Если Ψ является 5-кликой, то найдется вершина $z \in \Delta' \setminus (\Delta_2(e) \cup \Psi)$, для которой по лемме 1.2(5) верно включение $\Delta_3(u) \cup \Psi \subseteq \Delta_3(z)$, что невозможно. Поэтому Ψ является 2×4 -решеткой и $|\Delta| = 47$. Если подграф B_6 содержит некоторую вершину $z \in \Psi$, то $|\Delta(z) \cap \Delta_2(e)| = 6$, $|\Delta_2(e) \cap \Delta' \cap \Delta(z)| = 0$ и подграф $\Delta_3(z)$ является 2×4 -решеткой, содержащей клику из L_0 . Поэтому z содержится в некоторой максимальной 7-клике L' из Δ , причем L' содержит максимальную 4-клику подграфа Ψ . Это невозможно, поскольку тогда найдется вершина $z' \in (L' \setminus \Delta') \subset \Delta(L_0)$, которая имеет 4 соседей в Δ' . Значит, $\Psi \subseteq B_4$, а между подграфами Ψ и $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ имеется точно 16 ребер. Следовательно, окрестность каждой вершины из $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ содержит одну из двух максимальных 4-клик подграфа Ψ и $\Delta_2(e) \cap \Delta' = B_6$. Противоречие с тем, что тогда B_6 не содержит ребер, и в B_6 найдется пара несмежных вершин, имеющих более двух общих соседей из Ψ . Значит, $\beta_4 = 0$.

Теперь $6\beta_6 + 8\beta_8 = 56$ и либо $\beta_6 = 8, \beta_8 = 1$ и $|\Delta| = 44$, либо $\beta_6 = 4 = \beta_8$ и $|\Delta| = 43$, либо $\beta_6 = 0, \beta_8 = 7$ и $|\Delta| = 42$. Во всех случаях получаем противоречие с леммой 1.5(3). Лемма доказана.

3. Доказательство неравенства $|L_0| < 6$

В этом разделе предположим, что $|L_0| = 6$.

Лемма 3.1. *Для любой вершины $e \in L_0$ подграф $\Delta(e)$ является дизъюнктивным объединением 5-клики $L_0 \setminus \{e\}$ и либо двух i -клик, либо i -клики и $(i+1)$ -клики. В любом случае $i \in \{0, 1, 2\}$.*

Доказательство. Положим $L \cap \Sigma_2(c) = \{e^*\}$, $\Sigma(c) \cap \Sigma(e^*) = \{p, q\}$. Тогда для вершины $e \in L_0$ подграф $\Sigma(e) \cap \Sigma_2(c)$ является дизъюнктивным объединением $\{e^*\}$ и двух изолированных клик L_1, L_2 . Поскольку любая вершина из $(\Sigma(c) \cap \Sigma_2(e)) \setminus \Sigma(e^*)$ имеет единственного соседа в L_1 и единственного соседа в L_2 , то вершины p, q смежны либо с вершинами в разных кликах L_1, L_2 , и тогда $|L_1| = |L_2|$, либо с вершинами в одной клике, скажем, в L_1 , и тогда $|L_1| = |L_2| + 1$. Поэтому $\Delta(e)$ является дизъюнктивным объединением 5-клики $L_0 \setminus \{e\}$ и либо двух i -клик, либо i -клики и $(i+1)$ -клики. Ввиду леммы 1.3(2) имеем $i \in \{0, 1, 2\}$.

Зафиксируем вершину $e \in L_0$. В леммах 3.2–3.4 рассматриваются различные структуры подграфа $\Delta(e)$, возможности для которых определяются леммой 3.1. Во всех случаях получено противоречие.

Лемма 3.2. *Подграф $\Delta(e) \setminus L_0$ не содержит изолированных вершин.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что по лемме 1.5(2) верно равенство $\Delta = \Sigma_3(c)$, т.е. $|\Delta| = 48$.

Если $\Delta(e)$ является дизъюнктивным объединением вершины и 5-клики $L_0 \setminus \{e\}$, то Δ является 2×6 -решеткой, противоречие с тем, что для несмежных вершин $e, e^* \in \Delta$ граф $\Sigma_3(e) \cap \Sigma_3(e^*)$ содержит подграф $\Sigma_3(c) \setminus \Delta$, число вершин в котором равно $48 - 12 > p_{33}^2$.

Допустим, что $\Delta(e) \setminus L_0$ содержит две изолированные вершины. Тогда $|\Delta_2(e)| = (2 \cdot 6 + 5 \cdot 2)/2 = 11$ и $|\Delta_3(e)| = 29$. Ввиду § 2 и утверждений (2) и (6) леммы 1.2 число ребер между подграфами $\Delta_2(e)$ и $\Delta_3(e)$ не больше $|\Delta_2(e)| \cdot 5$, но не меньше $|\Delta_3(e)| \cdot 3$, противоречие.

Предположим теперь, что $\Delta(e) \setminus L_0$ является дизъюнктивным объединением вершины u и ребра. Тогда $|\Delta(L_0) \cup L_0| = 24$ и число ребер между подграфами $\Delta(L_0)$ и Δ' равно 24. Далее, $|\Delta_2(e)| = (7 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot 3)/2 = 17$ и $|\Delta_3(e)| = 22$. Заметим, что $|\Delta_2(u)| \leq 19$ (равенство достигается, если $\Delta(u)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков 1, 3 и 4). Так как $\Delta_2(u)$ содержит 7 вершин из $\Delta(e)$ и не более 12 вершин из $\Delta_3(e)$, то $u, e \in \Delta_3(z)$ по крайней мере для десяти вершин z из $\Delta_3(e) \setminus \Delta_2(u)$. Поэтому любая такая вершина z не имеет соседей в $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ и, следовательно, $z \notin B_0 \cup B_2$. Отсюда следует, что число ребер между $\Delta(L_0)$ и Δ' не меньше $10 \cdot 4$, противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что подграф $\Delta(e) \setminus L_0$ является дизъюнктивным объединением либо двух 2-клик, либо 2-клики и 3-клики. В любом случае, по лемме 1.5(3) имеем $|\Delta| \geq 46$. Зафиксируем вершины $e \in L_0$, $u \in B_{2n} \cap \Delta_3(e)$ (для некоторого n) и обозначим через Φ связную компоненту подграфа $\Delta_3(u)$, содержащую e , через Ψ связную компоненту подграфа $\Delta_3(e)$, содержащую u . Заметим, что ввиду леммы 1.2(6) графы Φ и Ψ являются регулярными графами одной и той же степени.

Лемма 3.3. *Подграф $\Delta(e) \setminus L_0$ не является дизъюнктивным объединением двух 2-клик.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы не верно. В этом случае граф Δ регулярен степени 9 и $|\Delta(L_0) \cup L_0| = 30$. Покажем, что $\Delta = \Sigma_3(c)$. Положим $K = \Sigma_3(c) \setminus \Delta$, $\gamma = |K|$, $0 \leq \gamma \leq 2$. Если подграф K непуст, то он является дизъюнктивным объединением клик (поскольку $|\Delta| > p_{33}^2$), и $|\Sigma(K)| \geq 11\gamma + 7$. Далее, число вершин в $\Sigma(L_0) \cap \Sigma_2(c)$ равно $1 + 6 \cdot 8 = 49$. Всего в $\Sigma_2(c)$ имеется 108 вершин, поэтому $|\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0)| = 59$. С вершинами из $\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0)$ смежны $18 - \gamma$ вершин из Δ' и 24 вершины из $\Delta(L_0)$, причем каждая вершина из Δ' имеет 9 соседей в $\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0)$,

каждая вершина из $\Delta(L_0)$ имеет 5 соседей в $\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0)$ (так как еще 4 соседа она имеет в $\Sigma(L_0)$). Поэтому число ребер между подграфами $\Sigma_2(c) \setminus (\Sigma(L_0) \cup \Sigma(K))$ и $\Delta \setminus L_0$ равно $9(18 - \gamma) + 5 \cdot 24 = 272 - 9\gamma$. Если $\gamma > 0$, то каждая вершина из $\Sigma_2(c) \setminus (\Sigma(L_0) \cup \Sigma(K))$ смежна в среднем не менее, чем $(272 - 9\gamma)/(59 - 11\gamma - 7) > 6$ вершинами из $\Delta \setminus L_0$, противоречие с леммой 1.2(2). Следовательно, $\gamma = 0$ и $\Delta = \Sigma_3(c)$.

Для вершины $e \in L_0$ подграф $\Delta_2(e)$ содержит 24 вершины (из них 20 лежат в $\Delta(L_0)$) и $|\Delta_3(e)| = 14$. Число ребер между $\Delta(L_0)$ и Δ' равно 48, поэтому в Δ' найдется вершина из $B_0 \cup B_2$ (так как каждая вершина из Δ' смежна в среднем с $48/18 < 4$ вершинами из $\Delta(L_0)$).

Ввиду леммы 1.5(4) можно считать, что подграф $\Delta(u)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков l_1, l_2, l_3 : если $\{l_1, l_2, l_3\} = \{2, 2, 5\}$, то $|\Delta_2(u)| = 24$, если $\{l_1, l_2, l_3\} = \{2, 3, 4\}$, то $|\Delta_2(u)| = 26$, если $\{l_1, l_2, l_3\} = \{3, 3, 3\}$, то $|\Delta_2(u)| = 27$. В любом случае имеем $11 \leq |\Delta_3(u)| \leq 14$.

Предположим, что $u \in B_2 \cap \Delta_3(e)$. Тогда $|\Delta(u) \cap \Delta_2(e) \cap \Delta'| \in \{1, 2, 3\}$. Если u смежна с единственной вершиной из $\Delta_2(e) \cap \Delta'$, то $\Phi(e)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков 1, 1 и 4 и $|\Delta_3(u)| \geq 16$, противоречие. Если u смежна точно с двумя вершинами из $\Delta_2(e) \cap \Delta'$, то связная компонента Φ графа $\Delta_3(u)$, содержащая e , является 2×5 -решеткой. Связная компонента Ψ графа $\Delta_3(e)$, содержащая u , является регулярным графом степени 5. Поэтому для вершины $z \in \Delta_3(u) \setminus \Phi$ получим $|\Delta_3(z)| \geq |\Psi| + |\Phi| \geq 16$, противоречие.

Значит, u смежна с тремя вершинами из $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ и граф $\Phi = e^\perp \cap \Delta_3(u)$ является 5-кликкой, а $|\Psi| \geq 5$. Выберем вершину $z \in \Delta_3(u) \setminus \Phi$. Заметим, что по лемме 1.2(5) верно включение $\Phi \cup \Psi \subseteq \Delta_3(z)$. Если Φ и Ψ лежат в одной связной компоненте Ω графа $\Delta_3(z)$, то Ω — регулярный граф степени не менее 7 и диаметра 3, поэтому $|\Omega| > 14$, противоречие. Значит, Φ и Ψ являются различными связными компонентами графа $\Delta_3(z)$. Теперь подграф $\Delta_2(z)$ содержит $5 \cdot 4 + 1 = 21$ вершин из $\cup_{e' \in \Phi} \Delta_1(e')$ и, следовательно, не более шести вершин из $\cup_{u' \in \Psi} \Delta_1(u')$, противоречие. Итак, $\beta_2 = 0$.

Таким образом, можно считать, что $u \in B_0$. Тогда $\Delta_2(e) \cap \Delta' \subset \Delta(u)$ и поэтому $\beta_0 = 1$ (поскольку $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ содержит по крайней мере две несмежные вершины, имеющие общего соседа в $\Delta(e) \cup (\Delta_2(e) \cap \Delta')$). Поэтому $\Delta' \setminus \{u\} = \cup_{j \geq 4} B_j$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Delta(L_0)$ и Δ' равно 48, но не меньше $4 \cdot |\Delta' \setminus \{u\}| = 4 \cdot 17$. Значит, степень графа Δ не равна 9. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Подграф $\Delta(e) \setminus L_0$ не является дизъюнктивным объединением 2-клик и 3-клик.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы не верно. В этом случае граф Δ регулярен степени 10 и $|\Delta(L_0) \cup L_0| = 36$. Покажем, что подграф $\Sigma_3(c) \setminus \Delta$ содержит не более одной вершины. Положим $K = \Sigma_3(c) \setminus \Delta$, $\gamma = |K|$, $0 \leq \gamma \leq 2$ (по лемме 1.5(3)). Если подграф K непуст, то он является дизъюнктивным объединением клик и $|\Sigma(K)| \geq 11\gamma + 7$. Далее, число вершин в $\Sigma(L_0) \cap \Sigma_2(c)$ равно $1 + 6 \cdot 7 = 43$. Всего в $\Sigma_2(c)$ имеется 108 вершин, поэтому $|\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0)| = 65$. С вершинами из $\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0)$ смежны $12 - \gamma$ вершин из Δ' и 30 вершин из $\Delta(L_0)$, причем каждая вершина из Δ' имеет 8 соседей в $\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0)$, 12 вершин из $\Delta(L_0)$ имеют по 4 соседа в $\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0)$, 18 вершин из $\Delta(L_0)$ имеют по 5 соседей в $\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(L_0)$. Поэтому число ребер между подграфами $\Sigma_2(c) \setminus (\Sigma(L_0) \cup \Sigma(K))$ и $\Delta \setminus L_0$ равно $8(12 - \gamma) + 12 \cdot 4 + 18 \cdot 5 = 234 - 8\gamma$. Если $\gamma = 2$, то каждая вершина из $\Sigma_2(c) \setminus (\Sigma(L_0) \cup \Sigma(K))$ смежна в среднем не менее,

чем с $(234 - 8 \cdot 2)/(65 - 11 \cdot 2 - 7) > 6$ вершинами из $\Delta \setminus L_0$, противоречие с леммой 1.2(2). Следовательно, $\gamma \in \{0, 1\}$.

Для вершины $e \in L_0$ имеем $|\Delta_2(e)| = 31$ (причем 25 вершин из $\Delta_2(e)$ лежат в $\Delta(L_0)$) и $|\Delta_3(e)| = 6 - \gamma$, $\gamma \in \{0, 1\}$. Число ребер между $\Delta(L_0)$ и Δ' равно $12 \cdot 3 + 18 \cdot 2 = 72$, и каждая вершина из Δ' смежна в среднем с $6 \leq 72/(12 - \gamma) < 7$ вершинами из $\Delta(L_0)$.

Ввиду леммы 1.5(4) можно считать, что подграф $\Delta(u)$ является дизъюнктным объединением клик порядков l_1, l_2, l_3 : если $\{l_1, l_2, l_3\} = \{2, 3, 5\}$, то $|\Delta_2(u)| = 31$, если $\{l_1, l_2, l_3\} = \{2, 4, 4\}$, то $|\Delta_2(u)| = 32$, а если $\{l_1, l_2, l_3\} = \{3, 3, 4\}$, то $|\Delta_2(u)| = 33$. Значит, справедливо неравенство $|\Delta_3(u)| \leq 6 - \gamma$.

Если $u \in B_0 \cap \Delta_3(e)$, то $\Phi(e) \subset L_0$ (иначе $|\Delta_3(u)| \geq 12$, что невозможно), поэтому $L_0 = \Delta_3(u)$. Следовательно, $|\Delta_2(e) \cap \Delta' \cap \Delta(u)| = 5$. Но множество вершин подграфа $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ разбивается на две тройки, вершины каждой из которых смежны с одной и той же вершиной из максимальной 2-клики $\{w, w'\}$ подграфа $\Delta(e) \setminus L_0$. Поэтому без потери общности можно считать, что $|\Delta(w) \cap \Delta(u)| \geq 3$, противоречие.

Если $u \in B_2 \cap \Delta_3(e)$, то $\Delta_3(u)$ содержит 5-клику из L_0 . Если $\Phi(e) \not\subset L_0$, то $|\Phi| \geq 10$, что невозможно. Значит, $|\Delta_3(u)| = 5$, и $\Delta_3(u) = \Phi$. Далее, $|\Delta(e) \cap \Delta_2(u)| = 6$, поэтому $|\Delta(u) \cap \Delta_2(e) \cap \Delta'| = 4$ и степень вершины u в $\Delta_3(e)$ равна 4. Если $|\Delta_3(e)| = 6$, то $\Delta_3(e)$ является графом октаэдра, противоречие. Значит, $\Delta_3(e)$ является 5-кликой и $|\Delta| = 47$ (т.е. $\gamma = 1$). Более того, так как $|\Delta_3(u)| = 5$, то окрестность вершины u является дизъюнктным объединением клик порядков 2, 3 и 5, поэтому $\Delta_3(e)$ содержится в 6-клике L' из Δ , при этом единственная вершина $z \in L' \setminus \Delta_3(e)$ принадлежит подграфу $\Delta_2(e) \cap \Delta'$. Любая вершина $u' \in \Psi$ имеет 5 соседей в $L' \subset \Delta'$ и, следовательно, $u' \in B_2 \cup B_4$. Более того, u' имеет не менее одного соседа среди вершин подграфа $(\Delta_2(e) \cap \Delta') \setminus \Delta(u)$. Противоречие с тем, что тогда некоторая вершина из $(\Delta_2(e) \cap \Delta') \setminus \Delta(u)$ имеет не менее двух соседей в 6-клике L' . Значит, $\beta_2 = 0$.

Если $u \in B_4 \cap \Delta_3(e)$, то $|\Delta(e) \cap \Delta_2(u)| = 7$, иначе $\Phi(e) \not\subset L_0$ и $|\Delta_3(u)| \geq 8$, что невозможно. Далее, $|\Delta(u) \cap \Delta_2(e)| = 7$, поэтому u смежна с 3 вершинами из $\Delta_2(e) \cap \Delta'$, и связная компонента Ψ подграфа $\Delta_3(e)$, содержащая u , является регулярным графом степени 3. Если граф $\Delta_3(e)$ несвязен, то по лемме 1.2(5) для некоторой вершины $z \in \Delta_3(e) \setminus \Psi$ подграф $\Delta_3(z)$ содержит 4 вершины из $\Phi \subset L_0$ и не менее 4 вершин из $\Psi \subset \Delta_3(e)$, противоречие. Значит, $\Delta_3(e)$ является связным графом, т.е. $\Delta_3(e) = \Psi$, и так как степень Ψ нечетна и $4 < |\Delta_3(e)| \leq 6$, то $|\Delta_3(e)| = 6$. Следовательно, $\Delta_3(e)$ является 2×3 -решеткой, $|\Delta| = 48$ и $\Delta_3(e) \subseteq B_4 \cup B_6$, причем любая вершина из $\Delta_3(e) \cap B_6$ имеет точно одного соседа в подграфе $\Delta_2(e) \cap \Delta'$. Если $\Phi \neq \Delta_3(u)$, то вершина $z \in \Delta_3(u) \setminus \Phi$ содержится в $\Delta_3(e) \setminus \Psi$, что невозможно. Поэтому подграф $\Delta_3(u)$ является 4-кликой и, следовательно, подграф $\Delta(u)$ является дизъюнктным объединением двух 3-клик и 4-клик.

Далее, возможны два случая:

(а) максимальная 1-клика из $\Psi(u)$ содержится в максимальной 4-клике из $\Delta(u)$, либо

(б) максимальная 1-клика из $\Psi(u)$ содержится в максимальной 3-клике из $\Delta(u)$.

Заметим, что в случае (б) подграф $\Delta_2(e) \cap \Delta(u)$ является дизъюнктным объединением клик порядков 2, 2 и 3, см. замечание 2.

Покажем, что подграф $B_6 \cap \Delta_3(e)$ не пуст. Положим $\beta'_j = |B_j \cap \Delta_3(e)|$, $\beta''_j = |B_j \cap \Delta_2(e) \cap \Delta'|$. Тогда $\sum_j j\beta'_j + \sum_j j\beta''_j = 72$, $\sum_j \beta'_j = \sum_j \beta''_j = 6$ и число ребер между $\Delta_3(e)$ и $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ равно $3\beta'_4 + \beta'_6 \leq \sum_j (10 - j)\beta''_j = 60 - \sum_j j\beta''_j = -12 + 4\beta'_4 + 6\beta'_6$. Отсюда $12 \leq \beta'_4 + 5\beta'_6$ и $\beta'_6 \geq 2$.

Выберем теперь вершину $w \in B_6 \cap \Delta_3(e)$. Тогда $|\Delta(w) \cap \Delta_2(e)| = 7$, поэтому окрестность вершины e в подграфе $\Delta_3(w)$ является дизъюнктивным объединением 2-клики и вершины, $|\Delta_3(w)| = 6$ и окрестность w является дизъюнктивным объединением клик порядков 2, 3 и 5. Обозначим через L' максимальную 6-клику графа Δ , содержащую вершину w . Заметим, что $|L' \cap \Delta(L_0)| \leq 3$, так как $w \in B_6$. С другой стороны, если $|L' \cap \Delta(L_0)| \leq 2$, то вершина из $L' \cap \Delta(L_0)$ имеет не менее четырех соседей в $L' \cap \Delta'$, что невозможно. Поэтому $|L' \cap \Delta(L_0)| = 3$.

Предположим, что вершины u и w лежат в одной максимальной 3-клике из $\Delta_3(e)$. Тогда случай (б) невозможен, выполнен случай (а), и подграф $\Delta(w) \cap \Delta_2(e)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков 1, 2 и 4, противоречие — см. замечание 2.

Следовательно, вершины u и w лежат в одной максимальной 2-клике из $\Delta_3(e)$, и выполнен случай (б). Тогда максимальная 3-клика из $\Delta_3(e)$, содержащая w , содержится в $B_6 \cap L'$, а максимальная 3-клика из $\Delta_3(e)$, содержащая u , содержится в B_4 и в некоторой максимальной 5-клике графа Δ .

Заметим, что между подграфами $\Delta(L_0)$ и $\Delta_3(e)$ имеется точно $3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 30$ ребер, поэтому между подграфами $\Delta(L_0)$ и $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ имеется $72 - 30 = 42$ ребра. Далее, каждая вершина из $B_4 \cap \Delta_3(e)$ имеет точно трех соседей в $\Delta_2(e) \cap \Delta'$, а каждая вершина из $B_6 \cap \Delta_3(e)$ имеет точно одного соседа в $\Delta_2(e) \cap \Delta'$. Поэтому между подграфами $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ и $\Delta_3(e)$ имеется 12 ребер, а подграф $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ содержит точно $(6 \cdot 10 - 42 - 12)/2 = 3$ ребра.

Окрестность любой вершины из $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ может содержать либо точно одну вершину из $\Delta_3(e)$, либо максимальную 2-клику из $\Delta_3(e)$ (и найдется не более трех вершин из $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ с таким свойством), либо максимальную 3-клику из $\Delta_3(e)$. Поэтому $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ содержит две вершины u', u'' , окрестность каждой из которых содержит некоторую максимальную 3-клику из $\Delta_3(e)$. Так как $|L' \cap \Delta(L_0)| = 3$, то $u', u'' \notin L'$, и вершины u', u'' смежны и содержатся в максимальной 5-клике графа Δ , содержащей 3-клику $B_4 \cap \Delta_3(e)$. При этом хотя бы одна из вершин u', u'' (для определенности, u') принадлежит B_6 . Поскольку $|\Delta_2(u) \cap L_0| = 2$, $|\Delta_2(u') \cap L_0| = 3$, то найдется такая вершина $e^* \in L_0$, что $e^* \in \Delta_3(u) \cap \Delta_3(u')$. Теперь u' можно рассматривать вместо вершины w , следовательно, подграф $\Delta(u')$ является дизъюнктивным объединением клик порядков 2, 3 и 5, противоречие с тем, что, как показано выше, он содержит максимальную 4-клику.

Итак, можно считать, что $u \in B_6 \cap \Delta_3(e)$. В этом случае либо $|\Delta(e) \cap \Delta_2(u)| = 8$ и Φ является 3-кликой, либо $|\Delta(e) \cap \Delta_2(u)| = 7$ и Φ является 2×3 -решеткой.

Предположим, что Φ является 3-кликой. Тогда подграф Ψ регулярен степени 2, поэтому Ψ является 3-кликой или 2×2 -решеткой. В любом случае, так как $|\Delta_3(e)| \geq 5$, то найдется вершина $z \in \Delta_3(e) \setminus \Psi$. По лемме 1.2(5) имеем $\Phi \cup \Psi \subseteq \Delta_3(z)$, поэтому подграф $\Delta_3(z)$ является дизъюнктивным объединением 3-клик Φ и Ψ . Теперь $|\Delta| = 48$, и окрестность в Δ каждой из вершин e, u, z является дизъюнктивным объединением клик порядков 2, 3 и 5. Далее, каждая из 3-клик Φ и Ψ лежит в некоторой максимальной 6-клике из Δ . Отсюда $|\Delta_2(z)| \geq |\cup_{e' \in \Phi} \Delta_1(e') \setminus \Phi| + |\cup_{u' \in \Psi} \Delta_1(u') \setminus \Psi| = 2 \cdot (3 + 3 \cdot (10 - 5)) = 36$, противоречие.

Следовательно, $\Phi = \Delta_3(u)$ является 2×3 -решеткой и $\Delta(u)$ — дизъюнктивное объединение клик порядков 2, 3 и 5. Далее, $|\Delta| = 48$, $\Delta' = B_6$ и $|B_6| = 12$. Подграф $\Delta_3(e)$ также является 2×3 -решеткой, обозначим ее через Ω_1 . Обозначим через Ω_2 подграф $\Delta_2(e) \cap \Delta'$.

Покажем, что Ω_2 является 2×3 -решеткой. Пусть $\{f, g\}$ — максимальная 2-клика из $\Delta(e)$. Тогда каждая из вершин f, g смежна с тремя вершинами из Ω_2 , и каждая

смежная с f вершина из Ω_2 имеет не более одного соседа в $\Delta(g) \cap \Omega_2$ (и, быть может, еще двух соседей в $\Delta(f) \cap \Omega_2$). Поэтому степень любой вершины в подграфе Ω_2 не больше 3. Поскольку число ребер между Ω_1 и Ω_2 равно 6, то граф Ω_2 регулярен степени 3 на 6 вершинах, следовательно, является 2×3 -решеткой.

Положим $L_1 = L_0 \cap \Delta_3(u)$, $L_2 = L_0 \setminus L_1$. Через M обозначим 6-клику из Δ , содержащую вершину u . Положим $\{u'\} = \Omega_2 \cap \Delta(u)$.

Так как $u \in B_6$, то $M \cap \Delta(L_0)$ содержит не более трех вершин. С другой стороны, если $|M \cap \Delta(L_0)| \leq 2$, то вершина из $M \cap \Delta(L_0)$ имеет более трех соседей в $M \cap \Delta'$, что невозможно. Поэтому $|M \cap \Delta(L_0)| = 3$, и M содержит либо максимальную 2-клику, либо максимальную 3-клику из Ω_1 . Если M содержит максимальную 2-клику из Ω_1 , то необходимо $u, u' \in M$, противоречие с тем, что тогда u' имеет двух соседей в Ω_1 . Следовательно, M содержит максимальную 3-клику из Ω_1 .

Далее, вершины u и u' одновременно находятся на расстоянии 3 по крайней мере от одной вершины из L_0 . Поэтому максимальная 2-клика $\{u, u'\} \cap \Delta'$ содержится в некоторой 2×3 -решетке $\Delta_3(e')$ для некоторой вершины $e' \in L_0$. Теперь граф $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Delta'$ содержит четыре 2×3 -решетки, и можно считать, что $\Omega_2 = \Delta_2(e_i)$ для двух вершин $e_1, e_2 \in L_0$.

Рассмотрев максимальные 2-клики $\{f_1, g_1\}$ и $\{f_2, g_2\}$ в подграфах $\Delta(e_1)$ и $\Delta(e_2)$ соответственно, мы видим, что их вершины смежны с 3-кликами 2×3 -решетки Ω_2 . Поэтому можно считать, что вершины f_1, f_2 принадлежат некоторой 6-клике M_1 графа Δ , содержащей одну 3-клику решетки Ω_2 , а вершины g_1, g_2 принадлежат некоторой 6-клике M_2 графа Δ , содержащей вторую 3-клику решетки Ω_2 .

Аналогично, окрестность каждой вершины из максимальных 3-клик $\{r_1, s_1, t_1\}$ и $\{r_2, s_2, t_2\}$ в графах $\Delta(e_1)$ и $\Delta(e_2)$, соответственно, содержит некоторую максимальную 2-клику решетки Ω_2 . Поэтому можно считать, что для $x \in \{r, s, t\}$ вершины x_1, x_2 принадлежат максимальной 4-клике N_x графа Δ , содержащей максимальную 2-клику решетки Ω_2 . Теперь максимальная 2-клика из Ω_2 , содержащая u' , содержится в некоторой максимальной 4-клике N_x графа Δ , поэтому вершины u, u' принадлежат некоторой максимальной 3-клике графа Δ , содержащей единственную вершину из $\Delta(L_0)$. Таким образом, можно считать, что $\Omega_1 = \Delta_2(e_i)$ для двух вершин $e_5, e_6 \in L_0 \setminus \{e_1, e_2\}$. Наконец, $u, u' \in \Delta_2(e_3)$ и $(\Omega_1 \cup \Omega_2) \setminus \Delta_2(e_3) = \Delta_2(e_4)$ для двух вершин $e_3, e_4 \in L_0 \setminus \{e_1, e_2, e_5, e_6\}$.

Рассмотрим теперь окрестность вершины f_1 : она содержит максимальную 2-клику $\{e_1, g_1\}$, 5-клику из M_1 , содержащую f_2 и, без ограничения общности, некоторую вершину из $\Delta(e_3)$. Следовательно, $\Delta(f_1)$ содержит еще максимальную 3-клику $\{q_4, q_5, q_6\}$, где, без ограничения общности, можно считать, что $q_i \in \Delta(e_i)$.

Симметрично, окрестность некоторой вершины f' из максимальной 2-клики графа $\Delta(e_5)$ содержит максимальную 3-клику $\{q_1, q_2, q_3\}$, где $q_i \in \{f_i, g_i, r_i, s_i, t_i\}$ для $i = 1, 2$. Противоречие с тем, что любое такое ребро $\{q_1, q_2\}$ уже лежит в одной из максимальных клик M_1, M_2 или N_x , $x \in \{r, s, t\}$. Лемма доказана.

4. Доказательство неравенства $|L_0| \neq 5$

В силу результатов § 2 и § 3 верно равенство $|L_0| = 5$. В следующих леммах получено противоречие с этим равенством, которое завершает доказательство теоремы.

Лемма 4.1. *Для любой вершины $e \in L_0$ подграф $\Delta(e) \setminus L_0$ является дизъюнктным объединением i -клики и $(i + j)$ -клики, где $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$ и $2i + j \leq 6$.*

Доказательство. Для вершины $e \in L_0$ подграф $\Sigma(e) \cap \Sigma_2(c)$ является дизъюнктивным объединением 2-клики $\{l, l^*\} = L \setminus L_0$ и двух клик L_1, L_2 . Обозначим через ϵ , $\epsilon \in \{0, \dots, 4\}$, число ребер между подграфом $\Sigma(c) \cap (\Delta(l) \cup \Delta(l^*))$ и кликой L_1 . Тогда между подграфом $\Sigma(c) \cap (\Delta(l) \cup \Delta(l^*))$ и кликой L_2 имеется в точности $4 - \epsilon$ ребер. Каждая вершина из $(\Sigma(e) \cap \Sigma_2(c)) \setminus (\Delta(l) \cup \Delta(l^*))$ имеет точно по одному соседу в L_1 и в L_2 , поэтому $2|L_1| - \epsilon = 2|L_2| - (4 - \epsilon)$. Отсюда $|L_1| = |L_2| - 2 + \epsilon$. Следовательно, можно считать, что $\Delta(e) \setminus L_0$ является дизъюнктивным объединением i -клики, $i \in \{0, \dots, 3\}$, и $(i + j)$ -клики, $j \in \{0, 1, 2\}$, при этом $2i + j \leq 6$.

Если $i = 0$, то ввиду леммы 1.5(1) имеем $j > 0$. Тогда Δ является $5 \times (j + 1)$ -решеткой. Противоречие с тем, что для несмежных вершин $e, e^* \in \Delta$ граф $\Sigma_3(e) \cap \Sigma_3(e^*)$ содержит подграф $\Sigma_3(c) \setminus \Delta$, число вершин в котором равно $48 - 5(j + 1) > p_{33}^2$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Подграф $\Delta(e) \setminus L_0$ не содержит изолированной вершины.*

Доказательство. Предположим (в обозначениях предыдущей леммы), что $i = 1$. По лемме 1.5(2) имеем $|\Delta| = 48$. Далее, $|\Delta(e)| = 6 + j$, $|\Delta_2(e)| = 9 + 5j$, $|\Delta_3(e)| = 32 - 6j$ и число ребер между $\Delta_2(e)$ и $\Delta_3(e)$ не больше $4|\Delta_2(e)|$ (ввиду леммы 1.2(2)), но не меньше $3|\Delta_3(e)|$ (ввиду леммы 1.2(6)), поэтому $j = 2$, и подграф $\Delta(e) \setminus L_0$ является дизъюнктивным объединением некоторой вершины u и 3-клики $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Для любой вершины $e' \in L_0$, $e' \neq e$, подграф $\Delta(e') \setminus L_0$ является дизъюнктивным объединением либо вершины и 3-клики, либо двух 2-клик, и число ребер между $\Delta(L_0)$ и Δ' не меньше $5 \cdot 6$, но не больше $6 + 4 \cdot 8$.

Далее, окрестность вершины u в графе Δ является дизъюнктивным объединением вершины e и двух клик порядков 4 и 3. Поэтому $|\Delta_2(u)| = 19$, при этом $\Delta_2(u)$ содержит 7 вершин из $\Delta(e)$ и не более 12 вершин из $\Delta_3(e)$. Следовательно, вершины e, u находятся на расстоянии 3 по крайней мере от 8 вершин $z_j \in \Delta_3(e)$, $j = 1, \dots, 8$. Так как $|\Delta(z_j) \cap \Delta_2(e) \cap \Delta'| = 0$, то по лемме 1.2(6) имеем $z_j \notin B_0 \cup B_2$. Теперь число ребер между $\Delta(L_0)$ и $\Delta' \cap \Delta_3(e) \cap \Delta_3(u)$ не меньше 32, а число ребер между $\Delta(L_0)$ и $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ равно 6. Отсюда следует, что $|\Delta_3(e) \cap \Delta_3(u)| = 8$, $|\Delta_3(e) \cap \Delta_2(u)| = 12$, при этом любая вершина из $\Delta_3(e) \cap \Delta_2(u)$ не имеет соседей из $\Delta(L_0)$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Подграф $\Delta(e) \setminus L_0$ является дизъюнктивным объединением клик порядков либо 2, 4 и 4, либо 3, 3 и 4.*

Доказательство. Предположим (в обозначениях леммы 4.1), что $i = 2$. Тогда $|\Delta_1(e)| = 8 + j$, $|\Delta_2(e)| = 20 + 6j$, и по лемме 1.5(3) имеем $|\Delta| \geq 46$.

Выберем вершину $u \in B_{2n} \cap \Delta_3(e)$ (для некоторого n ; конкретные значения будут рассмотрены ниже) и обозначим через Φ связную компоненту подграфа $\Delta_3(u)$, содержащую вершину e , а через Ψ связную компоненту подграфа $\Delta_3(e)$, содержащую вершину u .

Если $j = 0$, то граф Δ регулярен степени 8, и окрестность любой вершины из Δ является дизъюнктивным объединением трех клик порядков либо 2, 2, 4, либо 2, 3, 3. Далее, $|\Delta(L_0)| = 20$, число ребер между $\Delta(L_0)$ и Δ' равно 40, и верно неравенство $17 \leq |\Delta_3(e)| \leq 19$.

Пусть $u \in B_0 \cap \Delta_3(e)$. По лемме 1.2(6) вершина u имеет не менее трех соседей среди четырех вершин подграфа $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ (а, значит, $\Delta_2(e) \cap \Delta' \subset \Delta(u)$). Так как в подграфе $\Delta_2(e) \cap \Delta'$ найдется пара несмежных вершин, имеющих общего соседа в $\Delta(e) \cup (\Delta_2(e) \cap \Delta')$, то $\beta_0 = 1$. Далее, $\Phi = L_0$ (так как $\Phi(e) \subset L_0$), но поскольку $|\Delta_3(u)| \geq 16$, то найдется вершина $z \in \Delta_3(u) \setminus \Phi$. По лемме 1.2(5) верно включение

$\Phi \subset \Delta_3(z)$, следовательно, $z \in B_0$, противоречие с тем, что $B_0 = \{u\}$. Следовательно, $\beta_0 = 0$. Теперь $\sum_{k=2}^8 \beta_k \geq 21$ и $\sum_{k=2}^8 k\beta_k = 40$, что противоречиво. Значит, $j \neq 0$.

Пусть $j = 1$. Тогда граф Δ регулярен степени 9, и окрестность любой вершины из Δ является дизъюнктивным объединением трех клик порядков 2, 3 и 4, либо 3, 3 и 3. Далее, $|\Delta(L_0)| = 25$, число ребер между $\Delta(L_0)$ и Δ' равно 60, и верно неравенство $10 \leq |\Delta_3(e)| \leq 12$. В частности, найдется вершина, принадлежащая $B_0 \cup B_2$.

Пусть $u \in B_0 \cap \Delta_3(e)$. Тогда по лемме 1.2(6) подграф $\Delta(e) \cap \Delta_2(u)$ является дизъюнктивным объединением двух клик одинакового порядка и содержит не менее 3 вершин, поэтому $|\Delta(e) \cap \Delta_2(u)| = 4$, и связная компонента Φ подграфа $\Delta_3(u)$, содержащая вершину e , является 2×5 -решеткой. Тогда $|\Delta_2(u)| \geq |(\cup_{e' \in \Phi} \Delta(e')) \setminus \Phi| \geq 10 \cdot 2 + 5 \cdot 2$, противоречие. Значит, $\beta_0 = 0$.

Пусть $u \in B_2 \cap \Delta_3(e)$. Если $|\Delta(u) \cap \Delta_2(e)| = 3$, то подграф $\Phi(e)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков 1, 2 и 3, поэтому $|\Delta_3(u)| \geq 18$, что невозможно.

Если $|\Delta(u) \cap \Delta_2(e)| = 4$, то подграф $\Phi(e)$ является дизъюнктивным объединением клик порядков 1, 1 и 3 (тогда $|\Delta_3(u)| \geq 13$, поэтому этот случай невозможен), либо порядков 2 и 3 (и подграф $\Phi = \Delta_3(u)$ является 3×4 -решеткой). Если подграф Φ является 3×4 -решеткой, то $|\Delta_2(u)| \geq |\cup_{e' \in \Phi} \Delta_1(e') \setminus \Phi| \geq 12 \cdot 2 + 3 + 4 = 31$, противоречие.

Если $|\Delta(u) \cap \Delta_2(e)| = 5$, то подграф $\Phi(e)$ является дизъюнктивным объединением вершины и клики порядка 3. Поэтому подграф Φ является 2×4 -решеткой, а подграф Ψ регулярен степени 4. Более того, $|\Delta_3(u)| \geq 9$, поэтому найдется вершина $z \in \Delta_3(u) \setminus \Phi$, для которой по лемме 1.2(5) верно включение $\Phi \cup \Psi \subseteq \Delta_3(z)$, поэтому $|\Delta_3(z)| \geq 8 + 5 = 13$, противоречие.

Наконец, если $|\Delta(u) \cap \Delta_2(e)| = 6$, то подграф Φ является 4-кликой из L_0 . Тогда найдется вершина $z \in \Delta_3(u) \setminus \Phi$. По лемме 1.2(5) верно включение $\Phi \subset \Delta_3(z)$. Следовательно, $z \in B_2$. Но в этом случае $|\Delta(z) \cap \Delta_2(e)| = 6$ и вершины u и z имеют общих соседей в $\Delta_2(e) \cap \Delta'$, противоречие с тем, что они находятся на расстоянии 3. Лемма доказана.

Итак, в обозначениях леммы 4.1 возможны два случая: либо $i = 2, j = 2$, либо $i = 3, j = 0$.

Лемма 4.4. Верно неравенство $|L_0| \neq 5$.

Доказательство. Ввиду леммы 4.3 имеем $|\Delta(L_0)| = 30$. Если окрестность вершины e в графе Δ является дизъюнктивным объединением клик порядков 2, 4, 4, то $|\Delta_2(e)| = 32$ и выполняется $3 \leq |\Delta_3(e)| \leq 5$, причем $|\Delta_2(e) \cap \Delta'| = 8$. Если окрестность вершины e в графе Δ является дизъюнктивным объединением клик порядков 3, 3, 4, то $|\Delta_2(e)| = 33$ и $0 \leq |\Delta_3(e)| \leq 4$, причем $|\Delta_2(e) \cap \Delta'| = 9$.

Пусть в Δ имеется x вершин u с $|\Delta_2(u)| = 32$ и y вершин w с $|\Delta_2(w)| = 33$. Тогда $x + y = |\Delta|$, число максимальных l -клик в Δ равно $x/3$, если $l = 3$, равно $2y/4$, если $l = 4$, равно $(2x + y)/5$, если $l = 5$.

Если $x = 0$, то 10 делит y и $y = |\Delta|$, поэтому $|\Delta| \in \{40, 30, 20\}$. Если $|\Delta| = 40$, то ввиду леммы 1.5(1) подграф $\Sigma_3(c) \setminus \Delta$ является дизъюнктивным объединением клик, порядок каждой из которых не больше 2. Противоречие с тем, что тогда число вершин из $\Sigma_2(c)$, каждая из которых имеет хотя бы одного соседа в $\Sigma_3(c) \setminus \Delta$, не меньше $4 \cdot (11 \cdot 2 + 7) > |\Sigma_2(c)|$. Для остальных значений $|\Delta|$ противоречие аналогичное. Значит, $x > 0$ и ввиду леммы 1.5(3) имеем $|\Delta| \geq 46$.

Покажем, что $|\Delta| \neq 46$. В противном случае подграф $\Sigma_3(c) \setminus \Delta$ является 2-кликой $\{d, d'\}$, при этом $\Sigma_3(d) \cap \Sigma_3(d')$ содержит 2-клику $\{c, c'\}$, которая является связной компонентой в $\Sigma_3(d)$. Поэтому $\Delta \subset \cap_{x \in \{d, d', c, c'\}} \Sigma_3(x)$. Отсюда следует, что подграф $\Sigma_2(c)$ содержит не более $108 - |\Sigma(\{d, d', c'\})| = 108 - (11 \cdot 2 + 7) - 12 = 67$ вершин, каждая из которых имеет хотя бы одного соседа в Δ . Поскольку между Δ и $\Sigma_2(c)$ имеется в точности $46 \cdot 8 = 368$ ребер, то вершина из $\Sigma_2(c) \setminus \Sigma(\{d, d', c'\})$ смежна в среднем не менее чем с $368/67 > 5$ вершинами, противоречие с тем, что Δ не содержит 6-клик.

Покажем, что $|\Delta| \neq 48$. Предположим противное и выберем вершину e с $|\Delta_3(e)| = 5$. Тогда подграф $\Delta_3(e)$ является либо 5-кликой, либо дизъюнктным объединением клик, либо дизъюнктным объединением 4-цикла и изолированной вершины.

Если $\Delta_3(e)$ является 5-кликой, то подграф $\Delta_2(e)$ содержит 30 вершин, имеющих хотя бы одного соседа из $\Delta_3(e)$. Обозначим множество таких вершин через Ω . Далее, для любой вершины $u \in \Delta_3(e)$ степень вершины e в подграфе $\Delta_3(u)$ равна 4, поэтому подграф $\Delta_3(u)$ также является 5-кликой, и любая вершина z из $\Delta_2(e) \setminus \Omega$ находится на расстоянии два от любой вершины из $\Delta_3(e)$. Противоречие с тем, что тогда z имеет всего 10 соседей в Ω и двух соседей из $\Delta(e)$.

Если $\Delta_3(e)$ является дизъюнктивным объединением изолированной вершины u и 4-клики, то подграф $\Delta_2(e)$ содержит не менее 35 вершин, имеющих хотя бы одного соседа из $\Delta_3(e)$, противоречие с тем, что $|\Delta_2(e)| = 32$. Если $\Delta_3(e)$ является дизъюнктивным объединением 2-клики и 3-клики, то подграф $\Delta_2(e)$ содержит не менее 35 вершин, имеющих хотя бы одного соседа из $\Delta_3(e)$, аналогичное противоречие. Такое же противоречие получается в предположении, что $\Delta_3(e)$ является дизъюнктивным объединением более двух клик.

Значит, $\Delta_3(e)$ является дизъюнктивным объединением 4-цикла и изолированной вершины u . Для любой вершины u' из данного 4-цикла вершины e, u имеют степень 2 в подграфе $\Delta_3(u')$, поэтому $\Delta_3(u')$ содержит не менее 6 вершин, противоречие.

Наконец, покажем, что $|\Delta| \neq 47$. Предположим, что $|\Delta| = 47$, положим $\{d\} = \Sigma_3(c) \setminus \Delta$ и выберем вершину $e \in \Delta$ с $|\Delta_2(e)| = 4$. Поскольку вершины c, d имеют степень 10 в подграфе $\Sigma_3(e)$, то каждая из вершин c, d лежит в некоторой максимальной 5-клике подграфа $\Sigma_3(e)$. Следовательно, вершины c, d лежат в одной связной компоненте Ω графа $\Sigma_3(e)$. Ввиду доказанного выше верно равенство $|\Omega| = 47$. По лемме 1.2(5) имеем $\Delta_3(e) \subset \Sigma_3(c) \cap \Sigma_3(d)$, поэтому подграф $\Delta_3(e)$ содержит изолированную вершину d' (которая не принадлежит подграфу Ω). Легко видеть, что $\Delta_3(e)$ не является дизъюнктивным объединением изолированных вершин. Выберем вершину $u \in \Delta_3(e)$, имеющую ненулевую степень в подграфе $\Delta_3(e)$. Тогда вершины d', e имеют ненулевую степень в подграфе $\Delta_3(u)$ и поэтому лежат в одной связной компоненте подграфа $\Delta_3(u)$, противоречие с тем, что $|\Delta_3(u)| \leq 4$. Лемма доказана, и этим завершается доказательство теоремы.

Список литературы

1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A., Distance-regular graphs. *Springer, Berlin* (1989).
2. Godsil C. D., Geometric distance-regular covers. *J. Math* (1993) **22**, №2, 31–38.

3. Koolen J. H., Bang S., On distance-regular graphs with smallest eigenvalue at least $-m$. *J. Combin. Theory* (2010) **100**, №6, 573–584.
4. Blokhuis A., Brouwer A. E., Determination of the distance-regular graphs without 3-claws. *Discrete Math* **1997**, №1-3, 225–227.
5. Bang S., Geometric distance-regular graphs without 4-claws. *arXiv:1101.0440*.
6. Bang S., Koolen J. H., On geometric distance-regular graphs. *accepted for publication in European Journal of Combinatorics*.
7. Koolen J. H., Park J., Shilla distance-regular graphs.. *European J. Combin* (2010) **31**, №8, 2064–2073.

Статья поступила 11.11.2011.