Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Малышев, Влияние роста упаковочного числа графов на сложность задачи о независимом множестве, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 2, 63–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:47:15

Влияние роста упаковочного числа графов на сложность задачи о независимом множестве

© 2013 г. Д. С. Малышев

В статье изучается влияние предельного роста упаковочного числа графов (как функции от числа вершин) на сложностной статус задачи о независимом множестве. Доказывается, что при некоторых естественных предположениях эта задача полиномиально разрешима тогда и только тогда, когда упаковочное число растет по порядку не быстрее логарифма числа вершин.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, коды проектов 10-01-00357-а, 11-01-00107-а и 12-01-00749-а, и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2012 гг.» (номера ГК 16.740.11.0310 и 14.B37.21.0393), лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, грант правительства РФ, дог. 11.G34.31.0057.

Введение

Настоящая работа является продолжением работ [2, 3]. В этой работе и работах [2, 3] изучается влияние некоторых числовых характеристик графов на трудоемкость решения задачи о независимом множестве. Напомним, что *независимым множеством графа* называется любое множество из попарно не смежных вершин. Независимое множество наибольшей мощности в графе G называется *наибольшим независимым множеством графа*, а его мощность — *числом независимости графа* и обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* (далее, задача НМ) состоит для заданного графа в вычислении его числа независимости.

В работах [2, 3] в качестве соответствующей характеристики рассматривалось количество ребер $|E(G)|$ графа G . В настоящей работе таким параметром является *H -упаковочное число графа G* , т.е. наибольшее k , при котором G содержит подграф, изоморфный kH (kH — бесвязное объединение k экземпляров графа H). Это число обозначается через $p_H(G)$. Например, если $H = K_1$, то $p_H(G) = |V(G)|$ — число вершин графа G , а если $H = K_2$, то $p_H(G)$ — размер наибольшего паросочетания G .

Целью работ [2, 3] являлось изучение влияния скорости роста количества ребер в графах (как функции от числа вершин) на трудоемкость решения задачи НМ.

Именно, рассматривались классы графов $G'_{f(n)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{G : G \text{ — связный, } |V(G)| = n, |E(G)| \leq f(n)\}$ и для монотонных функций $f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ставился вопрос об отыскании «разделителя» между полиномиальной разрешимостью и NP-полнотой. Например, было доказано, что если $f(n)$ растет асимптотически медленнее, чем

$f^*(n) = n$, то задача НМ полиномиально разрешима в классе $G'_{f(n)}$, а если асимптотически быстрее, чем $f^*(n)$, то данная задача NP-полна в этом классе.

Целью настоящей работы является получение полного описания случаев эффективной разрешимости задачи НМ в множестве классов графов вида $G^H_{f(n)} = \{G : p_H(G) \leq f(|V(G)|)\}$ в зависимости от выбора графа H и функции $f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Отметим, что для многих графов H выбор функции $f(n)$ никак не влияет на сложность задачи НМ. Действительно, если H не принадлежит определенному классу графов, то, согласно теореме 1 из [1], задача НМ является NP-полной в классе $\{G : p_H(G) = 0\}$. Речь идет о классе T , состоящем из всевозможных графов, каждая компонента связности которых является деревом с не более чем тремя листьями. С другой стороны, если H — пустой граф (граф без ребер) с s вершинами, то $p_H(G) = \lfloor \frac{|V(G)|}{s} \rfloor$. Легко проверить, что в этом случае $G^{O_s}_{f(n)}$ (O_s — пустой граф с s вершинами) состоит из всех графов, количество вершин которых принадлежит подмножеству $\tilde{\mathbb{N}}$ множества $\mathbb{N}$, определяемому функцией $f(n)$. Тем самым, принадлежность $G \in G^{O_s}_{f(n)}$ определяется только принадлежностью числа $|V(G)|$ множеству $\tilde{\mathbb{N}}$, а не структурой графа G . Поэтому далее случай пустого графа H не рассматривается. Таким образом, задача рассматривается только для непустых графов H из класса T .

Основным результатом этой работы является полное описание функций $f(n)$, обеспечивающих полиномиальную разрешимость задачи НМ в классе графов $G^H_{f(n)}$. Именно, для любого непустого графа $H \in T$ и любой функции $f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (из некоторого широкого класса функций) задача о независимом множестве является полиномиально разрешимой в классе графов $G^H_{f(n)}$ тогда и только тогда, когда $f(n) \in O(\log(n))$. Этот результат верен при выполнении так называемой гипотезы об экспоненциальном времени (ЕТ-гипотезы). Данное предположение является усилением известной гипотезы $P \neq NP$ и утверждает, что некоторые дискретные задачи (в том числе и задача НМ) не имеют субэкспоненциальных алгоритмов [8]. Напомним, что алгоритм решения задачи НМ называется *субэкспоненциальным*, если время его работы ограничено величиной $2^{o(n)}$, где n — количество вершин в графе. Вера в возможность существования только строго экспоненциальных алгоритмов для решения рассматриваемых в [8] задач является довольно распространенной (см., например, работы [4, 5, 7, 8] и ссылки в них). Автор настоящей публикации тоже разделяет эту веру.

По-видимому, попытки обобщения рассматриваемой проблемы на независимую (т.е. с отсутствием ребер между разными экземплярами) систему копий H (и поиска «разделяющей» функции) будут безрезультатными уже для $H = K_1$. Действительно, в этом случае соответствующим параметром графа G будет число независимости $\alpha(G)$. Для выявления «разделяющей» функции, видимо, возникнет необходимость разрабатывать алгоритмы с параметризованной оценкой трудоемкости $O(g(\alpha(G))n^C)$, где $g(n)$ — некоторая функция, а C — некоторая константа. Однако, существование таких алгоритмов маловероятно [6]. Именно поэтому все внимание сосредоточено на параметре $p_H(G)$.

1. Результаты работы

Понятие H -упаковочного числа может быть определено через понятия H -упаковки и оптимальной H -упаковки. Любой набор из попарно непересекающихся по вершинам

подграфов графа G , каждый из которых изоморфен H , называется H -упаковкой графа G . Оптимальной называется H -упаковка G с наибольшим числом подграфов, а количество подграфов в оптимальной H -упаковке графа G есть H -упаковочное число G .

Граф $G_1 \oplus G_2$ — бесвязное объединение графов G_1 и G_2 , т.е. граф $(V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$.

Лемма 1. Для любого непустого графа H , произвольных графа G и числа p справедливо неравенство $p_H(G) \leq p_H(G \oplus O_p) \leq \frac{|V(H)|(p_H(G)+1)}{2}$.

Доказательство. Неравенство $p_H(G) \leq p_H(G \oplus O_p)$ очевидно. Рассмотрим оптимальную H -упаковку графа $G \oplus O_p$. Переобозначим $p_H(G \oplus O_p)$ через p_1 , а $p_H(G)$ через p_2 . Граф H изоморфен графу $H' \oplus O_s$ для некоторого целого неотрицательного s (считаем, что $H' \oplus O_0 = H'$) и некоторого графа H' без изолированных вершин. Ясно, что $H' \neq K_1$ (так как H не пустой). Граф $G \oplus O_p$ (и даже G) содержит подграф $p_1 H'$. В оптимальной H -упаковке графа $G \oplus O_p$ выберем k произвольных экземпляров подграфа H' . Тогда в данной упаковке еще останется $p_1 - k$ экземпляров этого графа. В качестве k выберем наибольшее число, для которого выполняется неравенство $\frac{(p_1 - k)|V(H')|}{s} \geq k$ (если $s = 0$, то положим $k = p_1$). Это значит, что граф G содержит kH в качестве подграфа (это следует из того, что при $s \neq 0$ граф $(p_1 - k)H'$ содержит подграф kO_s). Но тогда $\lceil \frac{p_1|V(H')|}{s+|V(H')|} \rceil = k \leq p_2$. Поэтому справедливо неравенство $\frac{p_1|V(H')|}{s+|V(H')|} - 1 \leq p_2$, т.е. $p_1 \leq \frac{|V(H)|(p_2+1)}{|V(H')|} \leq \frac{|V(H)|(p_2+1)}{2}$. Лемма 1 доказана.

Функцию $f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, представимую в виде $f(n) = \log_2(n)\beta(n)$, где $\beta(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, будем называть надлогарифмической.

Лемма 2. Если ЕТ-гипотеза справедлива, то для любого непустого графа H и любой надлогарифмической функции $f(n)$ задача НМ не решается за полиномиальное время в классе графов $G_{f(n)}^H$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $k(n) = \max\{k : f(k) \leq n\}$. Ввиду неограниченности и монотонности функции $f(k)$ функция $k(n)$ определена при любом n . Ясно, что для любого n выполнено неравенство $f(k(n) + 1) \geq n + 1$. Понятно, что $k(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $f(k)$ — надлогарифмическая функция, то $f(k) = \log_2(k)\beta(k)$, где $\beta(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Потенцируя неравенство $f(k(n)) \leq n$, получаем, что $(k(n))^{\beta(k(n))} \leq 2^n$. Но тогда $k(n) \leq 2^{\frac{n}{\beta(k(n))}}$. Так как $\beta(k(n)) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то $k(n) \in 2^{o(n)}$.

Добавим к каждому графу G изолированные вершины в количестве $k(|V(G)|)$ штук. Получившийся граф обозначим через G' , а всю совокупность получившихся графов через G' . По лемме 1 имеем $p_H(G') \leq \frac{|V(H)|(p_H(G)+1)}{2}$, причем $p_H(G) \leq \frac{|V(G)|}{|V(H)|}$. Поэтому $p_H(G') \leq \frac{|V(G)|+|V(H)|}{2}$. Вместе с тем, выполняется неравенство $|V(G)| \leq f(k(|V(G)|) + 1) \leq f(k(|V(G)|) + |V(G)|) = f(|V(G')|)$. Поэтому $p_H(G') \leq \frac{f(|V(G')|)+|V(H)|}{2}$. Поскольку неравенство $\frac{f(n)+|V(H)|}{2} \leq f(n)$ не выполняется только для конечного множества аргументов n , то совокупность $G' \setminus G_{f(n)}^H$ является конечной. Отсюда будет следовать утверждение леммы 2, так как далее будет показано,

что при выполнении ЕТ-гипотезы задача НМ не решается за полиномиальное время в классе графов G' .

Предположим противное: существует полиномиальный алгоритм решения задачи НМ в классе графов G' . Любая изолированная вершина графа входит в каждое его наибольшее независимое множество. Поэтому существуют такие положительные константы C и α , что задача НМ для графов с n вершинами решается за время $C(n + k(n))^\alpha$. Отсюда следует, что в классе всех графов существует субэкспоненциальный алгоритм решения задачи НМ. Это противоречит предположению о справедливости ЕТ-гипотезы. Значит, выдвинутое предположение было неверным. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого натурального C и любого непустого графа $H \in T$ задача НМ полиномиально разрешима в классе графов $G_{C[\log_2(n)]}^H$.*

Доказательство. В начале покажем, что задача НМ для графов из $G_{C[\log_2(n)]}^H$ полиномиально сводится к той же задаче для графов, не содержащих подграфа H . Для этого рассмотрим произвольный граф G с n вершинами, принадлежащий классу $G_{C[\log_2(n)]}^H$. Жадным образом вычислим H -упаковку графа G . Иными словами, найдем в графе G подграф H , затем удалим из G вершины найденного графа H , в полученном графе снова найдем подграф H и т.д. Будем повторять эту процедуру, пока это возможно. В результате получим, что при некотором $k \leq C[\log_2(n)]$ будут найдены такие порожденные подграфы G' и G'' графа G и некоторый подграф kH графа G , что $V(kH) = V(G')$, $V(G') \cap V(G'') = \emptyset$, $V(G') \cup V(G'') = V(G)$ и G'' не содержит подграфа H . В G' сгенерируем всевозможные независимые множества. Это делается за полиномиальное от n время, так как $k \leq C[\log_2(n)]$. Каждое независимое множество S графа G' определяет порожденный подграф G''_S графа G'' . Множество вершин графа G''_S образуют те вершины G'' , которые в G не являются смежными ни с одной вершиной из S . Понятно, что число независимости графа G равно максимуму из чисел $|S| + \alpha(G''_S)$, взятому по всем независимым множествам S графа G' . Но для любого независимого множества S граф G''_S не содержит подграфа H . Поэтому имеет место полиномиальное сведение, обозначенное в начале абзаца.

Известно (теорема 1 работы [1]), что для любого графа $H \in T$ задача НМ является полиномиально разрешимой в множестве графов, не содержащих подграфа H . Отсюда и из предыдущего абзаца следует утверждение леммы 3. Лемма 3 доказана.

Определим семейство функций F . Это множество состоит из функций $f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, которые либо растут не быстрее логарифма (т.е. $f(n) \in O(\log(n))$), либо являются надлогарифмическими. По мнению автора, все «естественные» функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ принадлежат классу F .

Объединяя результаты лемм 2 и 3, получаем утверждение, являющееся основным в настоящей работе.

Теорема 1. *Если ЕТ-гипотеза справедлива, то для любого непустого графа $H \in T$ и любой функции $f(n) \in F$ задача о независимом множестве является полиномиально разрешимой в классе графов $G_{f(n)}^H$ тогда и только тогда, когда $f(n) \in O(\log(n))$.*

Список литературы

1. Коробицын Д. В., О сложности задач на наследственных классах графов. *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 34–40.
2. Малышев Д. С., Совместное влияние количества ребер и компонент связности в графах на сложность вычисления числа независимости. В сб.: *В кн.: Материалы Российской конференции « Дискретная оптимизация и исследование операций »*. ИМ СО РАН, Новосибирск, 2010, с. 136.
3. Малышев Д. С., Анализ влияния числа ребер в связных графах на трудоемкость решения задачи о независимом множестве. *Дискретный анализ и исследование операций* (2011) **18**, №3, 83–87.
4. Chen J., Huang X., Kanj I., Xia G., Strong computational lower bounds via parameterized complexity. *J. Computer and System Sci.* (2006) **72**, 1346–1367.
5. Dantsin E., Wolpert A., On moderately exponential time for SAT. *Lect. Notes Comput. Sci.* (2010) **6175**, 313–325.
6. Downey R., Fellows M., Parameterized complexity. *Springer-Verlag* (1999).
7. Flum J., Grohe M., Subexponential fixed-parameter tractability. In: *Parameterized Complexity Theory, EATCS Texts in Theoretical Computer Science*. Springer-Verlag, 2006, pp. 417–451.
8. Impagliazzo R., Paturi R., Zane F., Which problems have strongly exponential complexity? *J. Computer and System Sci.* (2001) **62**, 512–530.

Статья поступила 23.05.2011.