Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Храпченко, Упрощенное доказательство одной нижней оценки сложности, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 2, 82–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:29:40

Упрощенное доказательство одной нижней оценки сложности

© 2013 г. В. М. Храпченко

Значительно упрощено доказательство одного известного неравенства, позволяющего получать квадратичные нижние оценки сложности П-схем (или, что то же самое, формул над базисом $\{\&, \vee, \sim\}$) для многих булевых функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований ОМН РАН "Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики проект "Синтез и сложность управляющих систем".

В работе [1] было доказано неравенство

$$L(f_n) \geq \frac{|R|^2}{|M^1||M^0|}, \quad (1)$$

где $f_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная булева функция (быть может, не всюду определенная), $L(f_n)$ — сложность минимальной (по числу контактов) П-схемы, реализующей f_n , M^1 — произвольное подмножество множества вершин n -мерного единичного куба (т. е. двоичных наборов), в которых функция f_n равна 1, M^0 — произвольное подмножество вершин n -мерного единичного куба, в которых функция f_n равна 0, R — множество всех ребер куба, соединяющих вершины из M^1 с вершинами из M^0 (т. е. множество всех таких пар наборов $(\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^0)$, что $\tilde{\sigma}^1 \in M^1$, $\tilde{\sigma}^0 \in M^0$ и наборы $\tilde{\sigma}^1$ и $\tilde{\sigma}^0$ отличаются друг от друга ровно в одном разряде, $|M|$ — мощность множества M .

Первоначальное доказательство (как это чаще всего и бывает) шло не по самому короткому пути и было перегружено деталями, не имеющими прямого отношения к основному ходу рассуждения.

Первый шаг по улучшению доказательства сделал В.В.Глаголев и сообщил свое наблюдение автору. Возможность дальнейшего упрощения заметил К.Л.Рычков и использовал это в работе [2]. Наконец, последний шаг сделал автор. Поскольку неравенство (1) включается в курсы лекций по дискретной математике и математической кибернетике, автор счел полезным опубликовать улучшенное доказательство.

В доказательстве неравенства (1) существенную роль играют два понятия, относящиеся к контактным схемам (в том числе и к П-схемам): общеизвестное понятие цепи (без самопересечений) и не так часто встречающееся понятие тупикового сечения. Стоит кое-что напомнить.

Множество контактов схемы называется *сечением*, если оно содержит хотя бы по одному контакту из каждой цепи этой схемы. Контактная схема проводит (реализуемая ею функция равна 1) на наборе $\tilde{\sigma}$ в том и только том случае, когда в ней есть

цепь, все контакты которой замкнуты на этом наборе, и не проводит (реализуемая ею функция равна 0) на наборе $\tilde{\sigma}$ в том и только том случае, когда есть сечение схемы, все контакты которого разомкнуты на этом наборе. По аналогии с сечением цепь будет рассматриваться также и как соответствующее множество контактов. Наконец, сечение называется *тупиковым*, если любое его собственное подмножество сечением не является.

В работе [3] доказана следующая

Лемма 1.. *Во всякой Π -схеме каждая цепь с каждым тупиковым сечением имеет ровно один общий контакт.*

Лемма легко доказывается индукцией по числу контактов. При всей своей простоте она играет решающую роль в последующих рассуждениях.

Доказательство неравенства (1). Рассмотрим произвольную Π -схему S , реализующую $f_n(x_1, \dots, x_n)$. Число ее контактов (сложность) обозначим через L и контакты занумеруем числами от 1 до L . Каждому набору $\tilde{\sigma}^1 \in M^1$ сопоставим (какую-нибудь одну) цепь схемы S , все контакты которой замкнуты на этом наборе, а каждому набору $\tilde{\sigma}^0 \in M^0$ сопоставим (какое-нибудь одно) тупиковое сечение схемы S , все контакты которого разомкнуты на этом наборе.

Построим таблицу размера $|M^1| \times |M^0| \times L$, каждая строка которой соответствует паре наборов $(\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^0)$, где $\tilde{\sigma}^1 \in M^1$, $\tilde{\sigma}^0 \in M^0$, а i -й столбец соответствует i -му контакту. Заполнять таблицу будем постепенно. Для этого будем по очереди рассматривать ребра, соединяющие вершины из M^1 с вершинами из M^0 , т. е. пары соседних (отличающихся в одном разряде) наборов $(\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^0)$ ($\tilde{\sigma}^1 \in M^1$, $\tilde{\sigma}^0 \in M^0$). Каждая такая пара определяет цепь (сопоставленную набору $\tilde{\sigma}^1$) и тупиковое сечение (сопоставленное набору $\tilde{\sigma}^0$). Согласно лемме 1, они имеют ровно один общий контакт. Пусть его номер будет i . Тогда на пересечении i -го столбца и строки, соответствующей паре $(\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^0)$, ставится 1.

После того, как будут просмотрены все ребра, соединяющие вершины из M^1 с вершинами из M^0 , в таблице появится $|R|$ единиц. Обозначим число единиц в i -м столбце через a_i . Это число пар соседних наборов $(\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^0)$ ($\tilde{\sigma}^1 \in M^1$, $\tilde{\sigma}^0 \in M^0$), для каждой из которых соответствующие цепь и тупиковое сечение пересекаются по i -му контакту. Покажем, что все наборы, входящие в эти пары, различны.

Пусть i -му контакту приписан символ x_j^α ($j \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$). Тогда для любой из рассматриваемых пар $(\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^0)$ ($\tilde{\sigma}^1 \in M^1$, $\tilde{\sigma}^0 \in M^0$) в соответствующей цепи на наборе $\tilde{\sigma}^1$ замкнуты все контакты и, стало быть, в j -м разряде набора $\tilde{\sigma}^1$ стоит α , а в соответствующем тупиковом сечении на наборе $\tilde{\sigma}^0$ разомкнуты все контакты, и, стало быть, в j -м разряде набора $\tilde{\sigma}^0$ стоит $\bar{\alpha}$. Таким образом, по набору $\tilde{\sigma}^1$ из такой пары набор $\tilde{\sigma}^0$ определяется однозначно: в j -м разряде стоит противоположное значение, а во всех остальных разрядах значения совпадают. Аналогично в обратную сторону. Это означает, что наборы $\tilde{\sigma}^1$ и $\tilde{\sigma}^0$ в этом множестве пар встречаются по одному разу.

Итак, имеется a_i наборов $\tilde{\sigma}^1$, для которых соответствующая цепь содержит i -й контакт, и a_i наборов $\tilde{\sigma}^0$, для которых соответствующее тупиковое сечение содержит i -й контакт. Объединяя каждый из рассматриваемых наборов $\tilde{\sigma}^1$ с каждым из рассматриваемых наборов $\tilde{\sigma}^0$, получим a_i^2 пар, обладающих свойством: цепь и тупиковое сечение, соответствующие паре, пересекаются по i -му контакту. Против каждой такой пары в i -м столбце таблицы поставим 1 (если там единицы еще не было). В результате в i -м столбце таблицы будет a_i^2 единиц.

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^L a_i = |R|,$$

а число единиц в таблице равно

$$\sum_{i=1}^L a_i^2.$$

Поскольку цепь и тупиковое сечение имеют ровно один общий контакт, в каждой строке таблицы содержится не более одной единицы, а значит, общее число единиц в таблице не больше числа ее строк:

$$\sum_{i=1}^L a_i^2 \leq |M^1| |M^0|.$$

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получаем:

$$|R|^2 = \left(\sum_{i=1}^L a_i \cdot 1 \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^L a_i^2 \right) \underbrace{(1^2 + \dots + 1^2)}_L \leq |M^1| |M^0| L.$$

Ввиду произвольности П-схемы S отсюда следует неравенство (1).

Список литературы

1. Храпченко В. М., Об одном методе получения нижних оценок сложности П-схем. *Матем. заметки* (1971) **10**, №1, 83–92.
2. Рычков К. Л., Модификация метода В. М. Храпченко и его применение к оценке сложности П-схем для кодовых функций. *Методы дискретного анализа в теории графов и схем* (1985) **42**, 91–98.
3. Храпченко В. М., О сложности реализации линейной функции в классе П-схем. *Матем. заметки* (1971) **9**, №1, 35–40.

Статья поступила 19.12.2012.