Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Характеристические подмодули инъективных модулей, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 2, 85–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1237>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:10:59

Характеристические подмодули инъективных модулей

© 2013 г. А. А. Туганбаев

Исследуются модули, являющиеся характеристическими подмодулями своих инъективных оболочек.

Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований. Проект 08-01-00693-а: Структурная теория колец.

Все кольца в этой статье предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными. Модуль называется *нетеровым*, если каждая строго возрастающая цепь его подмодулей конечна. Слова типа “ A – нетерово кольцо” означают, что A_A и ${}_A A$ – нетеровы модули. Модуль M называется *инъективным относительно модуля X* или *X -инъективным*, если для любого подмодуля X_1 в X каждый гомоморфизм $X_1 \rightarrow M$ продолжается до гомоморфизма $X \rightarrow M$. Модуль M над кольцом A называется *инъективным*, если M инъективен относительно любого A -модуля. Подмодуль M модуля E называется *существенным*, если $M \cap E_1 \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля E_1 в E . Если E – инъективный модуль и M – существенный подмодуль в E , то E называется *инъективной оболочкой* модуля M . Инъективная оболочка единственна с точностью до изоморфизма. Подмодуль M модуля E называется *характеристическим*, если $f(M) \subseteq M$ для каждого автоморфизма f модуля E .

В работах [3], [8], [10] модуль называется *автоморфизм-инвариантным*, если он является характеристическим подмодулем своей инъективной оболочки. Нетрудно проверить, что модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M – характеристический подмодуль некоторого инъективного модуля; см. замечание 6 ниже.

Замечание 1. В [3, Theorem 16] доказано, что модуль M является автоморфизм-инвариантным модулем в точности тогда, когда M – *псевдоинъективный* модуль, т.е. для любого подмодуля X в M каждый мономорфизм $X \rightarrow M$ продолжается до эндоморфизма модуля M . О псевдоинъективных модулях см., например, [6], [11], [3].

Замечание 2. Ясно, что каждый инъективный модуль является автоморфизм-инвариантным. Обратное неверно, поскольку каждая простая абелева группа является конечным автоморфизм-инвариантным неинъективным модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Кольцо A называется *правым кольцом Голди*, если A не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых правых идеалов и A – кольцо с условием максимальности

для правых аннуляторов. Кольцо называется *первичным*, если произведение любых двух его ненулевых идеалов не равно нулю. Пусть M – правый модуль над кольцом A и $t(M)$ – множество всех элементов из M , аннулируемых некоторыми делителями нуля кольца A . Модуль M называется *непериодическим* (соответственно, *периодическим*, *модулем без кручения*), если $t(M) \neq M$ (соответственно, $t(M) = M$, $t(M) = 0$).

В [6, Theorem 6] доказано, что каждый псевдоинъективный модуль без кручения над первичным правым кольцом Голди инъективен. В связи с этим и замечанием 1 мы докажем теорему 1, которая является первым основным результатом работы.

Теорема 1. Пусть A – первичное правое кольцо Голди и M – непериодический правый A -модуль. Равносильны условия:

- 1) M – автоморфизм-инвариантный модуль;
- 2) M – инъективный модуль.

Модуль называется *квазиинъективным* или *самоинъективным*, если он инъективен относительно себя.

Замечание 3. Хорошо известно, что модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда $f(M) \subseteq M$ для любого эндоморфизма f инъективной оболочки модуля M , см. [7] или [13, п. 17.11]. Ясно, что каждый квазиинъективный модуль является автоморфизм-инвариантным (псевдоинъективным). Пусть $\{F_{i=1}^\infty\}$ – счетное множество экземпляров поля $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и A – подкольцо прямого произведения всех F_i , состоящее из всех последовательностей, стабилизирующихся на конечном шаге. В [3, Example 9] показано, что A – автоморфизм-инвариантный модуль, не являющийся квазиинъективным.

Модуль называется *наследственным*, если все его подмодули проективны. Кольцо A называется *ограниченным*, если каждый его существенный правый или левый идеал содержит ненулевой идеал. Заметим, (см. [9]), что каждое наследственное нетерово первичное кольцо или ограничено, или примитивно справа и слева.

Замечание 4. В [6, теорема 5] доказано, что каждый псевдоинъективный периодический модуль над ограниченным наследственным нетеровым первичным кольцом квазиинъективен.

В связи с замечанием 4 и с замечанием 3 мы докажем теорему 2, которая является вторым основным результатом данной работы.

Теорема 2. Пусть A – ограниченное наследственное нетерово кольцо. Для A -модуля M равносильны условия:

- 1) M – автоморфизм-инвариантный модуль;
- 2) M – либо квазиинъективный периодический модуль, либо инъективный непериодический модуль.

Доказательство теорем 1 и 2 разбито на ряд утверждений, некоторые из них представляют самостоятельный интерес.

Пусть A – кольцо и M – правый A -модуль. Через $\text{Sing}(M)$ обозначается подмодуль в M , состоящий из всех элементов модуля M , аннуляторы которых в A являются существенными правыми идеалами. Модуль M называется *несингулярным* (соответственно, *сингулярным*), если $\text{Sing}(M) = 0$ (соответственно, $\text{Sing}(M) = M$).

Если X – существенный подмодуль модуля M , то M называется *существенным расширением* модуля X . Подмодуль X модуля M называется *замкнутым* в M , если $X = X'$ для каждого подмодуля X' в M , являющегося существенным расширением модуля X . Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Другие используемые в работе определения содержатся, например, в [13] и [12].

Модуль M называется *автоморфизм-продолжаемым*, если для любого подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до эндоморфизма M .

Замечание 5. Из замечания 1 следует, что каждый автоморфизм-инвариантный (т.е. псевдоинъективный) модуль является автоморфизм-продолжаемым. Однако не все автоморфизм-продолжаемые модули автоморфизм-инвариантны. Например, кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ является автоморфизм-продолжаемым $\mathbb{Z}$ -модулем, поскольку произвольный автоморфизм любого ненулевого подмодуля в $\mathbb{Z}$ есть умножение на 1 или -1 . При этом модуль $\mathbb{Z}$ не является автоморфизм-инвариантным, поскольку его инъективная оболочка $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ имеет такой автоморфизм $\varphi: q \rightarrow q/2$, что $\varphi(\mathbb{Z}) \not\subseteq \mathbb{Z}$.

Замечание 6. Для модуля M равносильны условия:

- 1) M – автоморфизм-инвариантный модуль;
- 2) M – характеристический подмодуль некоторого инъективного модуля Q .

В замечании 6 импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из того, что $Q = X \oplus Y$, где X – инъективная оболочка модуля M , и каждый автоморфизм α модуля X продолжается до автоморфизма β модуля Q с помощью правила $\beta(x+y) = \alpha(x) + y$.

Лемма 1. Пусть M – модуль и X, Y – подмодули в M с условием $X \cap Y = 0$. Если $f: Y \rightarrow X$ – гомоморфизм, то существует такой автоморфизм α модуля $X \oplus Y$, что эндоморфизм $\alpha - 1$ модуля $X \oplus Y$ совпадает с f на Y .

Доказательство. Определим эндоморфизм α модуля Z соотношением $\alpha(x+y) = x + f(y) + y$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Допустим, что

$$0 = \alpha(x+y) = x + f(y) + y, \quad x \in X, y \in Y.$$

Тогда α – мономорфизм, поскольку

$$y = -x - f(y) \in X \cap Y = 0, \quad f(y) = 0, \quad x = x + f(y) + y = \alpha(x+y) = 0.$$

Кроме того, для любых $x \in X$ и $y \in Y$

$$x + y = (x - f(y)) + (f(y) + y) = \alpha(x - f(y)) + \alpha(y) \in \alpha(X \oplus Y).$$

Поэтому α – искомый автоморфизм модуля $X \oplus Y$.

Лемма 2. Пусть A – кольцо, M – автоморфизм-продолжаемый правый A -модуль и X, Y – подмодули в M с условием $X \cap Y = 0$.

- 1) Если $f: Y \rightarrow X$ – гомоморфизм, то существует эндоморфизм g модуля M , который совпадает с $f: Y \rightarrow X$ на Y .
- 2) Если $M = X \oplus Y$, то модуль X инъективен относительно Y .
- 3) Если модуль M/X несингулярен, то модуль X инъективен относительно Y .

Доказательство. 1) По лемме 1 существует такой автоморфизм α модуля $X \oplus Y$, что эндоморфизм $\alpha - 1_{X \oplus Y}$ модуля $X \oplus Y$ совпадает с гомоморфизмом $f: Y \rightarrow X$ на Y . Так как M – автоморфизм-продолжаемый модуль, то автоморфизм α модуля $X \oplus Y$ продолжается до эндоморфизма β модуля M . Обозначим через g эндоморфизм $\beta - 1_M$ модуля M . Тогда g совпадает с f на Y .

2) Пусть Y_1 – подмодуль в Y и f_1 – гомоморфизм из Y_1 в X . По 1) существует эндоморфизм g модуля M , который совпадает с $f_1: Y_1 \rightarrow X$ на Y_1 . Пусть π – проекция модуля $M = X \oplus Y$ на X с ядром Y и $u: Y \rightarrow M$ – естественное вложение. Обозначим через f гомоморфизм $\pi g u$ из Y в X . Тогда f совпадает с f_1 на Y_1 . Поэтому модуль X инъективен относительно Y .

3) Пусть Y_1 – подмодуль в Y и f_1 – гомоморфизм из Y_1 в X . По лемме Цорна существует такой подмодуль Z в Y , что $Y_1 \cap Z = 0$ и $Y_1 \oplus Z$ – существенный подмодуль в Y . Обозначим $Y_2 = Y_1 \oplus Z$. Гомоморфизм $f_1: Y_1 \rightarrow X$ продолжается до гомоморфизма $f_2: Y_2 \rightarrow X$ с помощью соотношения $f_2(y_1 + z) = f_1(y_1)$. По 1) существует эндоморфизм g модуля M , который совпадает с $f_2: Y_2 \rightarrow X$ на Y_2 .

Остается доказать, что $g(y) \in X$ для любого элемента y модуля Y . Пусть $h: M \rightarrow M/X$ – естественный эпиморфизм. Так как Y_2 – существенный подмодуль в Y , то $yB \subseteq Y_2$ для некоторого существенного правого идеала B кольца A ; см., например, [12, 4.4(1)]. Тогда

$$\begin{aligned} g(y)B &= g(yB) \subseteq g(Y_2) = f_2(Y_2) = f_1(Y_1) \subseteq X, \\ h(g(y))B &= h(g(y)B) \subseteq h(X) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $h(g(y)) \in \text{Sing}(M/X) = 0$ и $g(y) \in \text{Ker}(h) = X$.

Для удобства мы соберем в леммах 3, 4 и 5 несколько хорошо известных результатов.

Лемма 3. Пусть A – кольцо, n – натуральное число, X и Y – правые A -модули, причем X является Y -инъективным.

- 1) X – $\bar{Y}$ -инъективный модуль для любого подфактора $\bar{Y}$ модуля Y^n .
- 2) Каждый модуль, инъективный относительно модуля A_A , является инъективным модулем.
- 3) Если модуль Y^n содержит изоморфную копию модуля A_A , то модуль X инъективен.

Утверждения 1) и 2) леммы 3 содержатся, например, в [13, пп. 16.2 и 16.4], а утверждение 3) вытекает из 1) и 2).

Лемма 4. Пусть A – полупервичное правое кольцо Голди и M – правый A -модуль.

- 1) $\text{Sing}(M) = t(M)$. В частности, M несингулярен (соответственно, сингулярен) в точности тогда, когда M – периодический модуль (соответственно, модуль без кручения).
- 2) Существенное расширение любого сингулярного правого A -модуля является сингулярным модулем.
- 3) Если существует такой подмодуль X в M , что модули X и M/X сингулярны, то модуль M сингулярен.
- 4) $\text{Sing}(M)$ – замкнутый подмодуль в M и модуль $M/\text{Sing}(M)$ несингулярен.

Доказательство. 1) Утверждение доказано в [5, Proposition 6.9].

2) и 3) Утверждения доказаны в [5, Proposition 6.10].

4) Утверждение следует из 1) и 2).

Лемма 5. Пусть A – первичное правое кольцо Голди и Y – ненулевой несингулярный правый A -модуль.

- 1) Существует такое натуральное число n , что модуль Y^n содержит изоморфную копию модуля A_A .
- 2) Если X – Y -инъективный A -модуль, то X – инъективный модуль.

В лемме 5 утверждение 1) доказано в [5, Corollary 6.25], а утверждение 2) вытекает из 1) и леммы 3(3).

Лемма 6. Пусть A – первичное правое кольцо Голди и M – несингулярный автоморфизм-продолжаемый правый A -модуль.

- 1) Если X – собственный замкнутый подмодуль в M , то X – инъективный модуль.
- 2) Если M – неравномерный модуль, то M – инъективный модуль.

Доказательство. 1) Так как X – собственный замкнутый подмодуль несингулярного модуля M , то модуль M/X несингулярен и $X \cap Y = 0$ для некоторого ненулевого подмодуля Y в M . По леммам 1 и 2(3) модуль X инъективен относительно Y . По лемме 5(2) модуль X инъективен.

2) Так как M – несингулярный неравномерный модуль, то M – существенное расширение модуля $X_1 \oplus X_2$, где X_1 и X_2 – ненулевые несингулярные замкнутые подмодули в Y . По 1) модули X_1 и X_2 инъективны. Тогда $X_1 \oplus X_2$ – существенное инъективное прямое слагаемое модуля M . Поэтому $M = X_1 \oplus X_2$ и M инъективен.

Лемма 7. Пусть A – первичное правое кольцо Голди, M – автоморфизм-продолжаемый правый A -модуль и $M \neq \text{Sing}(M)$.

- 1) $\text{Sing}(M)$ – инъективный модуль.
- 2) Существует прямое разложение $M = \text{Sing}(M) \oplus Y$, где Y – ненулевой несингулярный автоморфизм-продолжаемый модуль, причем либо модуль M инъективен и модуль Y равномерен, либо Y – автоморфизм-продолжаемый равномерный неинъективный модуль.

Доказательство. Обозначим $X = \text{Sing}(M)$.

1) По лемме 4(4) X – замкнутый подмодуль в M . Так как $X \neq M$, то по лемме 6(1) X – инъективный модуль.

2) Так как X – собственный инъективный подмодуль модуля M , то по 1) существует прямое разложение $M = X \oplus Y$, где Y – ненулевой несингулярный автоморфизм-продолжаемый модуль. Если Y – неравномерный модуль, то по лемме 6(2) Y – инъективный модуль. Тогда $M = X \oplus Y$ – инъективный модуль.

Лемма 8 ([1, 3.5]). Если M – прямая сумма равномерных модулей, то M является квазиинъективным модулем в точности тогда, когда M – псевдоинъективный модуль.

Замечание 7 (Окончание доказательства теоремы 1). Импликация $2) \Rightarrow 1)$ следует из того, что любой инъективный модуль является автоморфизм-инвариантным.

$1) \Rightarrow 2)$. Пусть A – первичное правое кольцо Голди и M – автоморфизм-инвариантный непериодический правый A -модуль. По лемме 4(4), лемме 7(2) и замечанию 1 можно считать, что $M = X \oplus Y$, где X – инъективный сингулярный модуль, Y – ненулевой несингулярный равномерный автоморфизм-инвариантный модуль. По лемме 8 модуль Y – квазиинъективный. По лемме 5(2) Y – инъективный модуль. Тогда $M = X \oplus Y$ – инъективный модуль.

Предложение 1. Пусть A – ограниченное наследственное нетерово первичное кольцо. Для A -модуля M равносильны условия:

- 1) M – автоморфизм-инвариантный модуль;
- 2) M – квазиинъективный модуль;
- 3) M – либо квазиинъективный периодический модуль, либо инъективный непериодический модуль.

Доказательство. Импликация $1) \Rightarrow 3)$ вытекает из теоремы 1 и замечания 4.

Импликация $2) \Rightarrow 1)$ следует из замечания 3.

Импликация $3) \Rightarrow 2)$ проверяется непосредственно.

Замечание 8. Теорема 2 вытекает из предложения 1.

Список литературы

1. Alahmadi A., Er N., Jain S. K., Modules which are invariant under monomorphisms of their injective hulls. *J. Australian Math. Soc.* (2005) **79**, №3, 2265–2271.
2. Er N., Rings whose modules are direct sums of extending modules. *Proc. Amer. Math. Soc.* (2009) **137**, №7, 2265–2271.
3. Er N., Singh S., Srivastava A.K., *J. Algebra* (2013) **379**, 223–229.
4. Goodearl K. R., *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*. Marcel Dekker, New York, 1976.
5. Goodearl K. R., Warfield R. B., *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
6. Jain S. K., Singh S., Quasi-injective and pseudo-injective modules. *Canadian Math. Bull.* (1975) **18**, №3, 359–366.
7. Johnson R. E., Wong F. T., Quasi-injective modules and irreducible rings. *J. London Math. Soc.* (1961) **36**, 260–268.
8. Lee T. K., Zhou Y., Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls. *J. Algebra Appl.* (2013) **6**, №2,.
9. Lenagan T. H., Bounded hereditary Noetherian prime rings. *J. London Math. Soc.* (1973) **6**, 241–246.
10. Singh S., Srivastava A. K., Rings of invariant module type and automorphism-invariant modules *Contemporary Mathematics* (2013).
11. Teply M. L., Pseudo-injective modules which are not quasiinjective. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1975) **49**, №2, 305–310.
12. Tuganbaev A., *Semidistributive Modules and Rings*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1998.
13. Wisbauer R., *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach, Philadelphia, 1991.

Статья поступила 13.03.2013.