Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Старикова, Классы проективно эквивалентных квадриков над локальными кольцами, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 2, 91–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:18:14

Классы проективно эквивалентных квадрик над локальными кольцами

© 2013 г. О. А. Старикова

Изучаются квадрики и квадратичные формы проективного пространства над локальным кольцом $R = 2R$ с нильпотентным главным максимальным идеалом. Задача перечисления классов проективно эквивалентных квадрик завершена при $|R^* : R^{*2}| = 2$; когда $|R^* : R^{*2}| = 4$, она решена вместе с задачей перечисления классов проективно конгруэнтных квадрик при дополнительном условии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00968) и Мин.обр.науки (тема 1.34.11).

1. Введение

В статье завершается решение задачи ([1] - [5] и др.) перечисления классов проективно эквивалентных квадрик и квадратичных форм проективного пространства RP_{n-1} ($n > 2$) над локальным кольцом R с нильпотентным главным максимальным идеалом, когда $R = 2R$ и $|R^* : R^{*2}| = 2$ (Теоремы 2, 3 и 4). Тесно связанной является задача классификации схем квадратичных форм полей и колец коэффициентов [3], [6] - [8]. В § 4 мы выявляем число классов проективно конгруэнтных (Теорема 6) и проективно эквивалентных (Теорема 7) квадрик со специальной схемой квадратичных форм порядка 4.

2. Предварительные замечания

Всюду далее основное кольцо R коэффициентов является ассоциативно-коммутативным и содержит единицу. Через R^* обозначаем его мультипликативную группу обратимых элементов.

Проективным пространством, ассоциированным со свободным R -модулем M , называют (см., например, [9]) множество $P(M)$ всех R -свободных прямых слагаемых ранга 1 модуля M . Каждое такое слагаемое представляется в виде Re с элементом e из M , на котором подходящая R -линейная функция на M принимает значение 1 (унимодулярный элемент).

Пусть V — свободный R -модуль ранга n . Его векторы будем задавать координатами относительно фиксированного базиса. Унимодулярные векторы над R — это векторы $v = (v_1, \dots, v_n)$, координаты которых порождают единичный идеал кольца R , т. е.

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = Rv_1 + Rv_2 + \dots + Rv_n = R.$$

Между унимодулярными над R векторами определено отношение

$$(v_1, \dots, v_n) \sim (u_1, \dots, u_n) \Leftrightarrow \exists t \in R^* : v_i = tu_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

являющееся отношением эквивалентности. Когда R — локальное кольцо, это позволяет определить ассоциированное с V проективное пространство более явно. Классы эквивалентности по отношению " $\sim$ " множества унимодулярных над R векторов есть по определению точки ассоциированного с V проективного пространства RP_{n-1} над кольцом R . Далее обозначение $v = (v_1, \dots, v_n)$ используем как для вектора $v \in V$, так и для класса эквивалентности с представителем v .

Определение 1. Пусть M и N — свободные модули над коммутативными кольцами A и B соответственно. Биективное отображение $\alpha : P(M) \rightarrow P(N)$ называют *проективностью*, если при любых $p_1, p_2, p_3 \in P(M)$ имеем $\alpha p_1 \subset \alpha p_2 + \alpha p_3$ тогда и только тогда, когда $p_1 \subset p_2 + p_3$.

Для кольцевого гомоморфизма $\sigma : A \rightarrow B$ отображение $\Phi : M \rightarrow N$ называется σ -полулинейным, если оно аддитивно и

$$\Phi(am) = \sigma(a)\Phi(m) \quad (a \in A, m \in M).$$

Индукированное отображение $P(\Phi) : P(M) \rightarrow P(N)$ ассоциированных проективных пространств получим, полагая $P(\Phi)(Ae) = B\Phi(e)$ для всякого унимодулярного элемента e модуля M . Следующая обобщенная основная теорема проективной геометрии доказана в [9].

Теорема 1. Пусть M и N — свободные модули конечного ранга не меньше 3 над коммутативными кольцами A и B соответственно. Тогда для любой проективности $\alpha : P(M) \rightarrow P(N)$ существует изоморфизм $\sigma : A \rightarrow B$ и σ -полулинейный изоморфизм $\Phi : M \rightarrow N$ такие, что $\alpha = P(\Phi)$. Если $\sigma_i : A \rightarrow B$ — изоморфизм и $\Phi_i : M \rightarrow N$ есть σ_i -полулинейный изоморфизм, $i = 1, 2$, причем $P(\Phi_1) = P(\Phi_2)$, то $\sigma_1 = \sigma_2$ и существует такое $b \in B$, что $\Phi_1 = b\Phi_2$.

Отметим, что проективности проективного пространства на себя, называемые также его проективными преобразованиями, образуют группу по умножению. Пусть V — свободный R -модуль конечного ранга. Проективные линейные (σ -полулинейные для $\sigma = 1$) преобразования проективного пространства $P(V)$ по умножению образуют группу $RG(V)$, изоморфную группе $PGL(V)$ — факторгруппе группы $GL(V)$ обратимых линейных преобразований V по ее центру, см. также [10]. Через $RA(V)$ обозначим группу автоморфизмов проективного пространства $P(V)$, которые индуцированы автоморфизмами основного кольца R . Ясно, что $RA(V)$ и $RG(V)$ являются подгруппами группы проективных преобразований проективного пространства $P(V)$, причем $RG(V)$ есть нормальная подгруппа. Более того, из теоремы 1, в частном случае, когда $A = B = R$ и $M = N = V$, вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Группа проективностей проективного пространства $P(V)$ на себя совпадает с произведением группы $RG(V)$ на $RA(V)$.

Квадрикой проективного пространства RP_{n-1} , ассоциированного со свободным R -модулем ранга n , называют проективное многообразие его точек R^*v , определенное уравнением $vAv^T = 0$ с ненулевой симметричной $n \times n$ -матрицей A над R .

Симметрические $n \times n$ -матрицы A , B и соответствующие им квадрики называем проективно конгруэнтными, если существуют такие $k \in R^*$ и $U \in GL(n, R)$, что $kA = UBU^T$; при $k = 1$ матрицы A и B также называем конгруэнтными.

К одной из основных в теории квадратик относят задачу их классификации с точностью до проективностей. Квадрики, переводимые друг в друга проективностью, называют *проективно эквивалентными*.

Отношения проективной конгруэнтности и проективной эквивалентности квадратик пространств $RP_{n-1}(n > 2)$ над некоторыми локальными кольцами главных идеалов (например, при $R = Z_{p^m}$) совпадают. Поэтому исследуем квадрики вначале с точностью до проективной конгруэнтности.

3. Классы проективно конгруэнтных квадратик

Задача классификации квадратик тесно связана с исследованием симметричных форм и их матриц. В [1, Следствие 3.4] показано, что над локальным кольцом с обратимым элементом 2 ортогональный базис допускают лишь "сильно невырожденные" симметричные формы. В случае, когда $R = 2R$ есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$, всякая симметричная матрица A над R конгруэнтна диагональной матрице

$$\text{diag} (k_1 \varepsilon^{t_1}, k_2 \varepsilon^{t_2}, \dots, k_r \varepsilon^{t_r}, 0, \dots, 0) \quad (1)$$

с однозначно определенными показателями $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$, $\varepsilon^{t_r} \neq 0$ и $k_i \in R^*$ [2, Теорема 1.3]. Кроме того, если $1 + J \subseteq R^{*2}$ и $|R^* : R^{*2}| = 2$, то известен и нормальный вид. Позднее [11] отмечалось, что включение $1 + J \subseteq R^{*2}$ выполняется, когда $2 \in R^*$ и верно по крайней мере одно из утверждений: кольцо R полное, идеал J нильпотентный, кольцо R конечное.

Комбинаторное выражение числа классов проективно конгруэнтных квадратик проективного пространства RP_{n-1} получено в [2] для случая нильпотентного максимального идеала в R .

Пусть $\binom{p}{q}'$ равно $\binom{p}{q}$ для целых чисел $p \geq q \geq 0$ и равно 0 в других случаях; $\Omega_q(m)$ — совокупность упорядоченных наборов $(n_1, \dots, n_q)$ целых чисел $n_j > 0$ с суммой m ; $[\cdot]$ — целая часть числа.

Теорема 2 ([2], Теорема 3.2). Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным степени s главным максимальным идеалом, $2 \in R^*$ и $|R^* : R^{*2}| = 2$. Тогда число $N(n, s)$ классов проективно конгруэнтных квадратик пространства RP_{n-1} ($n > 2$) в случаях $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$ и $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ равно соответственно

$$\sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} 2^{q-1} \left\{ \binom{m/2-1}{q-1}' + \binom{m-1}{q-1} \right\},$$

$$\sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} \left\{ \binom{m/2-1}{q-1}' + \sum_{(n_1, \dots, n_q) \in \Omega_q(m)} \left[\frac{1}{2} \prod_{j=1}^q (n_j + 1) \right] \right\}.$$

Применяя методы интегрального представления комбинаторных сумм, Г.П. Егорычев и Е.В. Зима [4] нашли простые формулы для числа $N(n, s)$ из теоремы 2. Теоремы 1 и 2 из [4] резюмирует

Теорема 3. Если $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$, то

$$N(n, s) = \frac{1}{2} \binom{n+2s}{2s} + \frac{1}{2} \binom{\lfloor n/2 \rfloor + s}{s} - 1. \quad (2)$$

Если $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$ и $S(n, s) := \sum_{q=0}^s 2^{q-1} \binom{s}{q} \binom{n}{q}$, то

$$N(n, s) = S(n, s) + S(\lfloor n/2 \rfloor, s) - 1. \quad (3)$$

В [4, стр. 1435] сформулирована также задача о независимом алгебраическом доказательстве и интерпретации формул (2) и (3).

Замечание 1. Отметим, что числа $\binom{n+2s}{2s}$ и $\binom{\lfloor n/2 \rfloor + s}{s}$ в формуле (2) (аналогично, $2S(n, s)$ и $2S(\lfloor n/2 \rfloor, s)$ в формуле (3)) выражают соответственно число L всех классов конгруэнтных $n \times n$ -матриц и число L_1 классов конгруэнтных матриц, инвариантных относительно проективной конгруэнтности. Алгебраическое доказательство теоремы 2.2 приведено в [5], см. также обзор [12].

Нам потребуется следующее утверждение для выявления числа классов проективно эквивалентных квадрик

Следствие 1. Число L_2 классов конгруэнтных $n \times n$ -матриц, неинвариантных относительно проективной конгруэнтности, в случаях $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ и $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$ равно соответственно

$$\binom{n+2s}{2s} - \binom{\lfloor n/2 \rfloor + s}{s},$$

$$\sum_{q=0}^s 2^q \binom{s}{q} \binom{n}{q} - \sum_{q=0}^s 2^q \binom{s}{q} \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{q}.$$

4. Классы проективно эквивалентных квадрик

Цель параграфа – перечислить классы проективно эквивалентных квадрик проективного пространства RP_{n-1} ($n > 2$), когда R есть локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$, $|R^* : R^{*2}| = 2$ и $R = 2R$.

Если элементы ε и $k\varepsilon$ для фиксированного неквадрата k неавтоморфны в R (например, при $R = \mathbb{Z}_p^m$), то отношения проективной конгруэнтности и проективной эквивалентности квадрик пространства RP_{n-1} ($n > 2$) совпадают и число классов проективно эквивалентных квадрик равно $N(n, s)$. Поэтому исследуем случай, когда элемент ε автоморфен $k\varepsilon$ для фиксированного неквадрата k в R .

Как и выше, $N(n, s)$ — число классов проективно конгруэнтных квадрик проективного пространства RP_{n-1} ($n > 2$), L_1 (соответственно, L_2) — число классов конгруэнтных матриц, инвариантных (соответственно, неинвариантных) относительно проективной конгруэнтности.

Число $U(n, m)$ в случае $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ определим равенством

$$U(n, m) = N(n, s - m) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{q + m - 1}{q} (1 + N(n - 2q, s - m)),$$

а при $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$ полагаем

$$U(n, m) = N(n, s - m) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^q \binom{m}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r - 1}{q - 1} (1 + N(n - 2r, s - m)).$$

Лемма 2. Число классов проективно конгруэнтных квадратик проективного пространства RP_{n-1} ($n > 2$), инвариантных относительно проективной эквивалентности, равно

$$U(n, s - \lfloor s/2 \rfloor) + U(n, \lfloor s/2 \rfloor) - (L_1 - 1).$$

Доказательство. Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом, $2 \in R^*$, $|R^* : R^{*2}| = 2$. На случай, когда $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ и, следовательно, $R^* = R^{*2} \cup (-R^{*2})$, распространяется закон инерции вещественных квадратичных форм [2, Теорема 2.1]: всякая симметричная $n \times n$ -матрица над кольцом R конгруэнтным преобразованием приводится к виду $(E_r - \text{единичная матрица порядка } r)$

$$\text{diag}(-\varepsilon^i E_{s_i}, \varepsilon^i E_{r_i - s_i}, \dots, -\varepsilon^m E_{s_m}, \varepsilon^m E_{r_m - s_m}, 0, \dots, 0), \quad (4)$$

где $0 \leq i < \dots < m$, $0 \leq s_i \leq r_i, \dots, 0 \leq s_m \leq r_m$, $\varepsilon^m \neq 0$, $r_i + \dots + r_m \leq n$, причем показатели $i, \dots, m$ и целые числа $r_i, \dots, r_m$, $s_i, \dots, s_m$ не зависят от способа приведения. Поэтому каждая симметричная матрица порядка n определяется однозначно, с точностью до конгруэнтности, произвольным (неупорядоченным) набором n диагональных элементов из множества $\{0, \pm 1, \pm \varepsilon, \pm \varepsilon^2, \dots, \pm \varepsilon^{s-1}\}$. Найдем число классов проективно конгруэнтных квадратик, инвариантных относительно проективной эквивалентности. Рассмотрим инвариантный относительно проективной эквивалентности класс проективно конгруэнтных квадратик с представителем A вида (4). В зависимости от условий $\varphi(A)$ конгруэнтна A (соответственно, $-A$) мы должны иметь для любого четного (соответственно, нечетного) показателя j ($i \leq j \leq m$) равенство $r_j = 2s_j$. Пусть вначале $\varphi(A)$ конгруэнтна A . Тогда A характеризуется набором q элементов множества $\{1, \varepsilon^2, \dots\}$ четных степеней элемента ε и набором $n - 2q$ элементов множества $\{0, \pm \varepsilon, \pm \varepsilon^3, \dots\}$. Для четной или нечетной ступени нильпотентности s максимального идеала число таких квадратик равно соответственно

$$N\left(n, \frac{s}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{q + \frac{s}{2} - 1}{q} \left(1 + N\left(n - 2q, \frac{s}{2}\right)\right)$$

или

$$N\left(n, \frac{s-1}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{q + \frac{s+1}{2} - 1}{q} \left(1 + N\left(n - 2q, \frac{s-1}{2}\right)\right).$$

Если $\varphi(A)$ конгруэнтна $-A$, то A характеризуется набором q элементов множества $\{\varepsilon, \varepsilon^3, \dots\}$ нечетных степеней элемента ε и набором $n - 2q$ элементов множества

$\{0, \pm 1, \pm \varepsilon^2, \dots\}$. Число таких квадратик для четного или нечетного s равно соответственно

$$N\left(n, \frac{s}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{q + \frac{s}{2} - 1}{q} \left(1 + N\left(n - 2q, \frac{s}{2}\right)\right)$$

или

$$N\left(n, \frac{s+1}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{q + \frac{s-1}{2} - 1}{q} \left(1 + N\left(n - 2q, \frac{s+1}{2}\right)\right).$$

Пусть теперь матрица $\varphi(A)$ конгруэнтна как матрице A , так и матрице $-A$. В этом случае матрицу A характеризует ненулевой набор $\lfloor n/2 \rfloor$ элементов множества $\{0, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{s-1}\}$. Число таких наборов, а следовательно, и классов проективно конгруэнтных квадратик (равное числу классов ненулевых проективно конгруэнтных матриц) с представителями A равно

$$\binom{\lfloor n/2 \rfloor + s}{s} - 1 = L_1 - 1.$$

Таким образом, число классов проективно конгруэнтных квадратик, инвариантных относительно проективной эквивалентности, равно

$$U(n, s - \lfloor s/2 \rfloor) + U(n, \lfloor s/2 \rfloor) - (L_1 - 1).$$

При $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$ и $k \in R^* \setminus R^{*2}$ имеем $R^* = R^{*2} \cup kR^{*2}$. Согласно [2, Теорема 2.2] всякая симметричная $n \times n$ -матрица над R конгруэнтна единственной диагональной матрице вида

$$\text{diag} \left(\underbrace{\delta_i \varepsilon^i, \varepsilon^i, \dots, \varepsilon^i}_{r_i}, \dots, \underbrace{\delta_m \varepsilon^m, \varepsilon^m, \dots, \varepsilon^m}_{r_m}, 0, \dots, 0 \right), \quad (5)$$

$$\delta_i, \dots, \delta_m \in \{1, k\}, \quad 0 \leq i < \dots < m, \quad \varepsilon^m \neq 0, \quad r_i + \dots + r_m \leq n.$$

Матрица (5) характеризуется набором коэффициентов $\delta_i, \dots, \delta_m$ и кортежем показателей $(i, \dots, m)$. Найдем число классов проективно конгруэнтных квадратик, инвариантных относительно проективной эквивалентности.

Рассмотрим инвариантный относительно проективной эквивалентности класс проективно конгруэнтных квадратик с представителем A вида (5). В зависимости от условий $\varphi(A)$ конгруэнтна A (соответственно, $\varphi(A)$ конгруэнтна kA) для любого нечетного (соответственно, четного) показателя j ($i \leq j \leq m$) должно выполняться условие $r_j \equiv 0 \pmod{2}$.

Пусть вначале $\varphi(A)$ конгруэнтна kA . Обозначим через q количество различных четных показателей j ($i \leq j \leq m$) в матрице (5), а через $2r$ сумму соответствующих четным показателям j чисел r_j . Тогда число классов проективно конгруэнтных квадратик с матрицами kA , конгруэнтными $\varphi(A)$, в случае четной ступени нильпотентности s равно

$$N\left(n, \frac{s}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^q \binom{\frac{s}{2}}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r-1}{q-1} \left(1 + N\left(n - 2r, \frac{s}{2}\right)\right),$$

а при нечетном s получаем

$$N\left(n, \frac{s-1}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^q \binom{\frac{s+1}{2}}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r-1}{q-1} \left(1 + N\left(n-2r, \frac{s-1}{2}\right)\right).$$

Если $\varphi(A)$ конгруэнтна A , то, обозначая через q количество различных нечетных показателей j ($i \leq j \leq m$) в матрице (5), а через $2r$ сумму соответствующих нечетным показателям j чисел r_j , находим число классов проективно конгруэнтных квадратик с матрицами A для четной и, соответственно, нечетной ступени нильпотентности s :

$$N\left(n, \frac{s}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^q \binom{\frac{s}{2}}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r-1}{q-1} \left(1 + N\left(n-2r, \frac{s}{2}\right)\right),$$

и

$$N\left(n, \frac{s+1}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^q \binom{\frac{s-1}{2}}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r-1}{q-1} \left(1 + N\left(n-2r, \frac{s+1}{2}\right)\right).$$

Пусть теперь матрица $\varphi(A)$ конгруэнтна как матрице A , так и матрице kA . Число проективно конгруэнтных классов квадратик с такими матрицами находим, исходя из условия четности всех чисел $r_i, \dots, r_m$:

$$\sum_{q=1}^s 2^q \binom{s}{q} \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{q} = \sum_{q=0}^s 2^q \binom{s}{q} \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{q} - 1 = L_1 - 1.$$

Таким образом, число классов проективно конгруэнтных квадратик, инвариантных относительно проективной эквивалентности, равно

$$U(n, s - \lfloor s/2 \rfloor) + U(n, \lfloor s/2 \rfloor) - (L_1 - 1).$$

Лемма доказана.

Пусть $U(n, m)$ выбраны как в лемме 2.

Теорема 4. Число классов проективно эквивалентных квадратик проективного пространства $RP_{n-1}, n > 2$, равно

$$\frac{1}{2} \left(U(n, s - \lfloor s/2 \rfloor) + U(n, \lfloor s/2 \rfloor) + \frac{1}{2} L_2 \right).$$

Доказательство. Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом, $2 \in R^*$ и $|R^* : R^{*2}| = 2$. Найдем число классов проективно эквивалентных квадратик проективного пространства $RP_{n-1}, n > 2$. Обозначим через n_1 (соответственно, n_2) число классов проективно конгруэнтных квадратик инвариантных (неинвариантных) относительно проективной эквивалентности. Пусть φ — автоморфизм проективного пространства $RP_{n-1}, n > 2$, индуцированный автоморфизмом кольца R и удовлетворяющий условию $\varphi(\varepsilon) = k\varepsilon$. В случае, когда

матрицы A и $\varphi(A)$ проективно конгруэнтны, класс проективно конгруэнтных квадрик с представителем A , очевидно, является также классом проективно эквивалентных квадрик. В оставшихся случаях A и $\varphi(A)$ представляют два различных класса проективно конгруэнтных квадрик. Таким образом, число классов проективно эквивалентных квадрик равно

$$n_1 + \frac{1}{2} n_2 = \frac{1}{2}(n_1 + n_2) + \frac{1}{2} n_1.$$

Число $n_1 + n_2$ есть число $N(n, s)$ всех классов проективно конгруэнтных квадрик, найденное в теореме 2 (см. также теорему 3). В силу леммы 2 число классов проективно конгруэнтных квадрик, инвариантных относительно проективной эквивалентности, равно

$$n_1 = U(n, s - \lfloor s/2 \rfloor) + U(n, \lfloor s/2 \rfloor) - (L_1 - 1).$$

Но, согласно утверждению теоремы 3,

$$n_1 + n_2 = N(n, s) = L_1 - 1 + \frac{1}{2}L_2.$$

Поэтому искомое число классов проективно эквивалентных квадрик равно

$$\frac{1}{2}(n_1 + n_2) + \frac{1}{2} n_1 = \frac{1}{2} \left(U(n, s - \lfloor s/2 \rfloor) + U(n, \lfloor s/2 \rfloor) + \frac{1}{2}L_2 \right).$$

Теорема доказана.

При $n = 3$ теорема дает число классов проективно эквивалентных квадрик проективной плоскости, выявлявшееся ранее в [13].

Следствие 2. [13, Теорема 5]. Пусть N есть число классов проективно эквивалентных квадрик проективной плоскости RP_2 над локальным кольцом R с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$. Допустим, что $2 \in R^*$, $|R^* : R^{*2}| = 2$ и элементы ε и $k\varepsilon$ в кольце R автоморфны для неквадрата k . Тогда для четного или нечетного числа s число N равно, соответственно,

$$(s(5s^2 + 15s + 28))/12 \quad \text{или} \quad (5s^3 + 15s^2 + 31s - 3)/12,$$

если $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$, а при $1 + R^{*2} \subset R^{*2}$, соответственно,

$$(s(5s^2 + 21s + 28))/12 \quad \text{или} \quad (5s^3 + 21s^2 + 31s + 3)/12.$$

5. Перечисление квадрик и схемы квадратичных форм

Задача перечисления квадрик и квадратичных форм тесно связана (см. [3], [6] - [8]) с задачей классификации схем квадратичных форм (quadratic form schemes) основных колец коэффициентов, называемых ниже также QF-схемами.

Для элементов $a = rR^{*2}$ и $b = sR^{*2}$ группы $G = R^*/R^{*2}$ полагаем

$$D(a, b) = \{tR^{*2} \mid t \in (rR^2 + sR^2) \cap R^*\}.$$

Когда R есть поле, известны [8] следующие свойства:

- 1) $D(1, a)$ – подгруппа группы G и $a \in D(1, a)$;
- 2) $a \in D(1, -b) \Leftrightarrow b \in D(1, -a)$;
- 3) $bD(1, -a) \cap D(1, -ac) \cap dD(1, -c) \neq \emptyset \Rightarrow aD(1, -b) \cap D(1, -bd) \cap cD(1, -d) \neq \emptyset$.

Группа $G = R^*/R^{*2}$ с ее отображением $a \mapsto D(1, a)$ и выделенным элементом -1 называется QF -схемой поля R . Схема квадратичных форм поля полностью определяет его кольцо Витта [6]–[8].

Схему квадратичных форм определяют также и как абстрактную группу $G = (G, \cdot, 1)$ экспоненты 2 с выделенным элементом $-1 \in G$, $-a := (-1)a$, и отображением $a \mapsto D(1, a)$, удовлетворяющим условиям 1) – 3). Эти понятия переносятся и на кольца.

При $|R^* : R^{*2}| = 2$ для локальных колец R существует три QF -схемы L_1 , $L_{1,1}$ и $L_{1,0}$, определяемые в зависимости от включения $1+R^{*2} \subseteq R^{*2}$ или $R^* \cap (1+R^2) \not\subseteq R^{*2}$. Эти QF -схемы соответственно определяются условиями:

$$\begin{aligned} L_1 : 1 &\neq -1, \quad D(1, 1) = \{1\}; \\ L_{1,1} : 1 &\neq -1, \quad D(1, 1) = G; \\ L_{1,0} : 1 &= -1, \quad D(1, 1) = G. \end{aligned}$$

QF -схема L_1 , очевидно, реализуется как QF -схема поля, а также локального кольца R с ограничением $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$, равносильным равенству $D(1, 1) = \{1\}$. Равенство $D(1, 1) = G$ эквивалентно условию $R^* \cap (1 + R^{*2}) \not\subseteq R^{*2}$. Таким образом, для локальных колец с QF -схемами порядка 2 классы квадрик перечисляют Теоремы 2, 3 и 4.

Квадратичные схемы порядка 4 могут быть представлены как групповые произведения $L_{1,1} \times L_{1,0}$, $L_{1,0} \times L_{1,0}$, $L_1 \times L_{1,0}$ и групповые расширения $L_1[t]$, $L_{1,0}[t]$, $L_{1,1}[t]$ соответствующих QF -схем порядка 2 (см. [8], с.275).

Проиллюстрируем применимость разработанных методов перечисления классов квадрик в случае локального кольца R главных идеалов с индексом $|R^* : R^{*2}| > 2$. Кольца с QF -схемами $L_{1,1} \times L_{1,0}$ и $L_{1,0} \times L_{1,0}$ определяются условием $R^* \subseteq R^2 + bR^2$ для всех $b \in R^*$, а также $-1 \in R^* \setminus R^{*2}$ или $-1 \in R^{*2}$ соответственно.

Теорема 5. Пусть $R = 2R$ есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$, $1 + J \subseteq R^{*2}$, $|R^* : R^{*2}| = 4$ и $R^* \subseteq R^2 + bR^2$ для всех $b \in R^*$. Тогда всякая ненулевая симметричная $n \times n$ -матрица над R конгруэнтна единственной диагональной матрице вида

$$\text{diag} \left(\underbrace{(\delta_i \varepsilon^i, \varepsilon^i, \dots, \varepsilon^i)}_{r_i}, \dots, \underbrace{(\delta_m \varepsilon^m, \varepsilon^m, \dots, \varepsilon^m)}_{r_m}, 0, \dots, 0 \right), \quad (6)$$

$$\delta_i, \dots, \delta_m \in R^*/R^{*2}, \quad 0 \leq i < \dots < m, \quad \varepsilon^m \neq 0, \quad r_i + \dots + r_m \leq n.$$

Доказательство. Всякая симметричная матрица A над R конгруэнтна диагональной матрице вида (1) [2], Теорема 1.3]. Диагональная матрица переходит в конгруэнтную матрицу, если какие-либо два ее диагональных элемента вида a и ab умножить на обратимый элемент из $1 + bR^2$ [2], Лемма 2.5]. В силу условия $R^* \subseteq R^2 + bR^2$

для всех $b \in R^*$ всякая симметричная матрица A над R конгруэнтна матрице вида (6).

Остается доказать совпадение конгруэнтных матриц A и $D = UAU^T$ вида (6). Представим их в клеточно-диагональном виде $\text{diag}(f_1 A_1, f_1 f_2 A_2, \dots, f_1 f_2 \dots f_q A_q, O)$, $f_1 f_2 \dots f_q \neq 0$, где A_j – обратимые диагональные клетки и O – нулевая клетка. Тогда при $1 \leq t \leq q$ клетки A_t и D_t имеют вид $\text{diag}(\delta, 1, \dots, 1)$ с $\delta \in R^*/R^{*2}$ и могут различаться лишь значениями δ . Ясно, что для клетки A_t значение $\delta = \delta(A_t)$ совпадает с $|A_t|$; аналогично $\delta(D_t) = |D_t|$. По лемме 2.6 из [2] при условии $1 + J \subseteq R^{*2}$ получаем $|A_t| \cdot |D_t| \in R^{*2}$. Поскольку $|A_t|, |D_t| \in R^*/R^{*2}$, отсюда вытекают равенства $\delta(A_t) = \delta(D_t)$ и $A_t = D_t$ для всех t , и поэтому $A = D$. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть R – локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом, $2 \in R^*$, $|R^* : R^{*2}| = 4$ и $R^* \subseteq R^2 + bR^2$ для всех $b \in R^*$. Тогда число $\hat{N}(n, s)$ классов проективно конгруэнтных квадрат пространств RP_{n-1} ($n > 2$) равно

$$\sum_{q=1}^s 4^{q-1} \left(\binom{n}{q} + 3 \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{q} \right) \binom{s}{q}.$$

Доказательство. Рассмотрим классы конгруэнтных симметрических $n \times n$ -матриц над кольцом R с точностью до отношения проективной конгруэнтности. Обозначим через K_1 (аналогично, K_2) число классов ненулевых конгруэнтных матриц, инвариантных (соответственно, неинвариантных) относительно проективной конгруэнтности. В случае, когда матрицы kA попарно конгруэнтны для $k \in R^*/R^{*2}$, класс конгруэнтных матриц с представителем A , очевидно, является также классом проективно конгруэнтных матриц. В оставшихся случаях матрицы kA представляют четыре различных класса конгруэнтных матриц. Таким образом, получаем число классов проективно конгруэнтных квадрат

$$\hat{N}(n, s) = K_1 + \frac{1}{4} K_2 = \frac{1}{4} ((K_1 + K_2) + 3 K_1) = \frac{1}{4} (K + 3K_1).$$

Включение $1 + J \subseteq R^{*2}$ вытекает из условия нильпотентности максимального идеала J . Тем самым, для числа $K = K_1 + K_2$ всех классов ненулевых конгруэнтных матриц вида (6) получаем

$$K = \sum_{q=1}^s 4^q \binom{s}{q} \binom{n}{q}.$$

Необходимым и достаточным условием конгруэнтности матриц $k_1 A$ и $k_2 A$ для $k_1, k_2 \in R^*/R^{*2}$ является четность чисел $r_i, \dots, r_m$, поэтому

$$K_1 = \sum_{q=1}^s 4^q \binom{s}{q} \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{q}.$$

Резюмируя, получаем утверждение теоремы.

Если элементы ε и $k\varepsilon$ для $k \in R^*/R^{*2}$ неавтоморфны в R , то отношения проективной конгруэнтности и проективной эквивалентности квадрат пространств RP_{n-1}

совпадают. Остается рассмотреть случай, когда для $k \in R^*/R^{*2}$ существует автоморфизм ϕ_k кольца R , при котором $\phi_k(\varepsilon) = k\varepsilon$.

Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом, $2 \in R^*$, $|R^* : R^{*2}| = 4$, $R^* \subseteq R^2 + bR^2$ для всех $b \in R^*$ и

$$V(n, m) = \hat{N}(n, s - m) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 4^q \binom{m}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r-1}{q-1} (1 + \hat{N}(n - 2r, s - m)),$$

где $\hat{N}(n, s)$ — число классов проективно конгруэнтных квадрик. Числа K всех классов конгруэнтных квадрик и K_1 классов конгруэнтных квадрик, инвариантных относительно проективной конгруэнтности, найдены в теореме 6.

Теорема 7. В случае, когда элементы ε и $k\varepsilon$ автоморфны для любого обратимого элемента k из R , число классов проективно эквивалентных квадрик пространства RP_{n-1} ($n > 2$) равно

$$\frac{1}{16}(K + 12(V(n, s - \lfloor s/2 \rfloor) + V(n, \lfloor s/2 \rfloor)) - 9K_1).$$

Доказательство. Найдем число классов проективно эквивалентных квадрик проективного пространства RP_{n-1} , $n > 2$. Обозначим через n_1 (соответственно, n_2) число классов проективно конгруэнтных квадрик инвариантных (неинвариантных) относительно проективной эквивалентности. Пусть ϕ_k — автоморфизм проективного пространства RP_{n-1} , индуцированный автоморфизмом кольца R и удовлетворяющий условию $\phi_k(\varepsilon) = k\varepsilon$. В случае, когда матрицы A и $\phi_k(A)$ проективно конгруэнтны, класс проективно конгруэнтных квадрик с представителем A , очевидно, является также классом проективно эквивалентных квадрик. В оставшихся случаях A и $\phi_k(A)$ представляют четыре различных класса проективно конгруэнтных квадрик. Таким образом, число классов проективно эквивалентных квадрик равно

$$n_1 + \frac{1}{4} n_2 = \frac{1}{4}((n_1 + n_2) + 3n_1).$$

Число $n_1 + n_2$ есть число $\hat{N}(n, s)$ всех классов проективно конгруэнтных квадрик, выявленное в теореме 6.

Найдем число классов проективно конгруэнтных квадрик, инвариантных относительно проективной эквивалентности. Рассмотрим инвариантный относительно проективной эквивалентности класс проективно конгруэнтных квадрик с представителем A вида (6). В зависимости от условий $\phi_k(A)$ конгруэнтна A (соответственно, $\phi_k(A)$ конгруэнтна kA) для любого нечетного (соответственно, четного) показателя j ($i \leq j \leq m$) должно выполняться условие $r_j \equiv 0 \pmod{2}$. Число классов проективно конгруэнтных квадрик с матрицами kA , конгруэнтными $\phi_k(A)$, в случае четной ступени нильпотентности s равно

$$\hat{N}\left(n, \frac{s}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 4^q \binom{\frac{s}{2}}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r-1}{q-1} \left(1 + \hat{N}\left(n - 2r, \frac{s}{2}\right)\right),$$

а при нечетном s получаем

$$\hat{N}\left(n, \frac{s-1}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 4^q \binom{\frac{s+1}{2}}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r-1}{q-1} \left(1 + \hat{N}\left(n - 2r, \frac{s-1}{2}\right)\right).$$

Аналогично, число классов проективно конгруэнтных квадратик с матрицами A , конгруэнтными $\phi_k(A)$, для четной и, соответственно, нечетной степени нильпотентности s равно

$$\widehat{N}\left(n, \frac{s}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 4^q \binom{\frac{s}{2}}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r-1}{q-1} \left(1 + \widehat{N}\left(n - 2r, \frac{s}{2}\right)\right),$$

и

$$\widehat{N}\left(n, \frac{s+1}{2}\right) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 4^q \binom{\frac{s+1}{2}}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r-1}{q-1} \left(1 + \widehat{N}\left(n - 2r, \frac{s+1}{2}\right)\right).$$

Пусть теперь матрица $\phi_k(A)$ конгруэнтна как матрице A , так и матрице kA . Число проективно конгруэнтных классов квадратик с такими матрицами находим, исходя из условия четности всех чисел $r_i, \dots, r_m$:

$$\sum_{q=1}^s 4^q \binom{s}{q} \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{q} = K_1.$$

Таким образом, число классов проективно конгруэнтных квадратик, инвариантных относительно проективной эквивалентности, равно

$$V(n, s - \lfloor s/2 \rfloor) + V(n, \lfloor s/2 \rfloor) - K_1.$$

Но, согласно доказательству теоремы 6,

$$\widehat{N}(n, s) = \frac{1}{4}(K + 3K_1).$$

Значит, искомое число классов проективно эквивалентных квадратик равно

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\widehat{N}(n, s) + 3n_1) &= \frac{1}{16}(K + 3K_1 + 12(V(n, s - \lfloor s/2 \rfloor) + V(n, \lfloor s/2 \rfloor) - K_1)) = \\ &= \frac{1}{16}(K + 12(V(n, s - \lfloor s/2 \rfloor) + V(n, \lfloor s/2 \rfloor)) - 9K_1). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Милнор Дж., Хьюзмоллер Д., *Симметрические билинейные формы*. Наука, Москва, 1986.
2. Левчук В. М., Старикова О. А., Квадратичные формы проективных пространств над кольцами. *Матем. сборник* (2006) **197**, №6, 97–110.
3. Левчук В. М., Старикова О. А., Нормальный вид и схемы квадратичных форм. *Фундамент. и прикл. матем.* (2007) **13**, №1, 161–178.
4. Egorychev G. P., Zima E. V., Simple formulae for the number of quadrics and symmetric forms of modules over local rings. *Comm. in Algebra* (2008) **36**, 1426–1436.
5. Старикова О. А., Свистунова А. В., Перечисление квадратик проективных пространств над локальными кольцами. *Изв. вузов. Матем.* (2011) **12**, 59–63.

6. Kula M., Fields and quadratic form schemes. *Ann. Math. Sil.* (1985) **1**, №13, 7–22.
7. Kula M., Counting Witt rings.. *J. Algebra* (1998) **206**, №2, 568–587.
8. Marshall M., The elementary type conjecture in quadratic form theoryContemp. *Math* (2004) **344**, 275–293.
9. Ojanguren M., Sridharan R., A note on the fundamental theorem of projective geometry. *Comm. Math. Helv.* (1969) **3**, 310–315.
10. О'Мира О., Лекции о линейных группах. В сб. перев. "Аutomорфизмы классических групп" (1976) 57–167.
11. Cao Yonglin, Szechtman F., Congruence of symmetric matrices over local rings. *Linear Algebra Appl.* (2009) **431**, №9, 1687–1690.
12. Старикова О. А., Квадратичные формы и квадрики пространств над локальными кольцами. *Фундамент. и прикл. матем.* (2012) **17**, №3, 97–110.
13. Старикова О. А., Перечисление квадрик проективных плоскостей и пространств над локальными кольцами главных идеалов. *Алгебра и теория моделей* (2003) **4**, 110–115.

Статья поступила 12.02.2013.