Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, М. С. Нирова, О сильно регулярных графах
с $b_1 < 26$, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 3, 22–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:56:22

О сильно регулярных графах с $b_1 < 26$

© 2013 г. А. А. Махнев, М. С. Нирова

Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , $b_1 = k - \lambda - 1$. Хорошо известно, что если $b_1 = 1$, то Γ — многоугольник или полный многодольный граф с долями порядка 2. Ранее были классифицированы графы с $b_1 \leq 4$. Изучение графов даже в случае $b_1 = 5$ идет с большим трудом. Однако для сильно регулярных графов ситуация гораздо проще. В данной работе классифицированы сильно регулярные графы с $b_1 < 26$.

Работа выполнена при поддержке Российско-Словенского проекта 2012-2013 гг., программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $[a]$ обозначается окрестность a , т.е. подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, смежных с a . Для вершин a, b графа Γ через $d(a, b)$ обозначим расстояние между a, b в графе Γ . Под собственными значениями графа понимаются собственные значения его матрицы смежности. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство графов. Граф Γ называется локально $\mathcal{F}$ графом, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k , и каждое ребро графа Γ лежит точно в λ треугольниках. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин для любых двух несмежных вершин a, b . Подграф $[a] \cap [b]$ назовем λ -подграфом (μ -подграфом), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$).

Через $K_{m_1, \dots, m_n}$ обозначим полный n -дольный граф, с долями порядков $m_1, \dots, m_n$. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n \times m}$. Граф $K_{1, m}$ называется *m -лапой*. *Треугольным графом $T(m)$* называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$m \times n$ решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Графом *Джонсона $J(n, m)$* называется граф, вершинами которого являются m -элементные подмножества данного n -элементного множества, причем две вершины a, b смежны, только если $|a \cap b| = m - 1$. Граф *Пэли $P(q)$* в качестве вершин имеет элементы поля F_q , $q \equiv 1 \pmod{4}$, и две вершины a, b смежны,

только если $b - a$ является ненулевым квадратом в F_q . Граф Петерсена — это дополнительный граф для треугольного графа $T(5)$ (он имеет параметры $(10, 3, 0, 1)$). Граф Клебша (Шлефли) — это единственный сильно регулярный граф с параметрами $(16, 10, 6, 6)$ (с параметрами $(27, 16, 10, 8)$). Граф Шрикханде — это единственный сильно регулярный локально шестиугольный граф с параметрами $(16, 6, 2, 2)$. Имеется точно 3 сильно регулярных графа, имеющих параметры графа $T(8)$, но не изоморфных $T(8)$. Эти графы называются графами *Чанга*. Графом *Хофмана-Синглтона* называется единственный сильно регулярный граф с параметрами $(50, 7, 0, 1)$. Графом *Хигмена-Симса* называется единственный сильно регулярный граф с параметрами $(100, 22, 0, 6)$.

Частичной геометрией $pG_\alpha(s, t)$ называется система инцидентности, состоящая из точек и прямых, в которой каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (две прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L . Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. Если $\alpha = t$, то геометрия называется *сетью*. *Точечным графом* частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на одной прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Любой сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых α, s, t называется *псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s, t)$* . Заметим, что если Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s, t)$, α делит st и $\alpha < s$, то граф $\bar{\Gamma}$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha, s-\alpha)$.

Сильно регулярные графы с собственным значением -2 были классифицированы Зейделем (теорема 3.12.4 [1]). Любой зейделев граф — это либо полный многодольный граф $K_{r \times 2}$, либо решетчатый или треугольный граф, либо один из графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша или Шлефли.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1 = b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$.

В следствии 1.1.6 из [1] доказано, что если Γ — связный реберно регулярный граф с $b_1 = 1$, то Γ — многоугольник или полный многодольный граф $K_{n \times 2}$. Реберно регулярные графы с $2 \leq b_1 \leq 5$ изучались в работах [2-3]. Изучение реберно регулярных графов даже в случае $b_1 = 5$ идет с большим трудом. Однако для сильно регулярных графов ситуация гораздо проще. В данной работе классифицированы сильно регулярные графы с $b_1 < 26$.

Теорема 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с $0 < b_1 < 26$. Тогда Γ является одним из следующих графов:

- (1) граф с параметрами $(4b_1 + 1, 2b_1, b_1 - 1, b_1)$, $b_1 \notin \{5, 8, 14, 17, 19, 23\}$, или полный многодольный граф $K_{r \times (b_1+1)}$;
- (2) зейделев граф или его дополнение;
- (3) псевдогеометрический граф для $GQ(s, t)$, $\{s, t\} \in \{\{2, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 4\}, \{4, 6\}, \{5, 5\}\}$, или его дополнение;
- (4) псевдогеометрический граф для сети $pG_t(s, t)$, где либо $t = 2$, $s = 3, 4, 5, \dots, 13$, либо $t = 3$, $s = 4, 5, \dots, 10$, либо $t = 4$, $s = 6, 7, 8, 9$, либо $t = 5$, $s = 8, 9$, либо $t = s - 2$, $s = 7, 8, 9, 10$, либо $t = 12$, $s = 13$;

(5) псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(5 + \alpha, 4)$, $\alpha \in \{1, \dots, 6, 15, 20, 30, 60\}$, $pG_2(4, t)$ ($t = 3, 7$), $pG_2(5, 5)$, $pG_3(s, 2)$ ($s = 5, 6, 8, 9, 12$), $pG_3(5, 7)$, $pG_4(7, 2)$, $pG_4(7, 3)$, $pG_4(8, 3)$, $pG_4(11, 3)$, $pG_5(9, 3)$, $pG_5(14, 2)$, $pG_6(8, 5)$, $pG_6(15, 2)$, $pG_8(15, 2)$, $pG_9(18, 2)$, $pG_9(15, 3)$, $pG_{10}(15, 3)$, $pG_{14}(20, 3)$, $pG_{14}(21, 3)$, $pG_{15}(24, 2)$, $pG_{15}(19, 3)$ или $pG_{20}(24, 3)$;

(6) дополнительный граф к графу из пункта (5);

(7) граф с параметрами $(50, 7, 0, 1)$, $(56, 10, 0, 2)$, $(77, 16, 0, 4)$, $(81, 20, 1, 6)$, $(82, 36, 15, 16)$, $(85, 30, 11, 10)$, $(85, 14, 3, 2)$, $(99, 14, 1, 2)$, $(100, 33, 14, 9)$, $(100, 22, 0, 6)$, $(120, 77, 52, 44)$, $(126, 25, 8, 4)$, $(136, 30, 8, 6)$, $(155, 42, 17, 9)$, $(162, 23, 4, 3)$, $(196, 39, 14, 6)$, $(243, 22, 1, 2)$, $(300, 26, 4, 2)$, $(400, 21, 2, 1)$ или его дополнение.

Сначала приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры (v, k, λ, μ) . Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай) и v является суммой квадратов двух целых чисел, либо неглавные собственные значения $n - t$, $-t$ графа Γ — целые числа, где $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$, $n - \lambda + \mu = 2t$ и кратность собственного значения $n - t$ равна $\frac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если t — целое число, большее 1, то $t - 1$ делит $k - \lambda - 1$ и

$$\mu = \lambda + 2 + (t - 1) - \frac{k - \lambda - 1}{t - 1}, \quad n = t - 1 + \frac{k - \lambda - 1}{t - 1}.$$

Доказательство. Это лемма 3.1 из [4].

Лемма 2. Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий целочисленные собственные значения $k, n - t, -t$, и $b_1 = k - \lambda - 1$. Тогда

(1) $b_1 = (n - t + 1)(t - 1)$;

(2) если $t - 1 = b_1$, то Γ является полным многодольным графом $K_{r \times (b_1 + 1)}$;

(3) если b_1 — простое число, то Γ является полным многодольным графом $K_{r \times (b_1 + 1)}$ или зейделевым графом;

(4) если $b_1 = 2(t - 1)$, то Γ является дополнительным к зейделеву графу.

Доказательство. Напомним, что $\lambda - \mu = (n - t) - t$ и $k - \mu = t(n - t)$. Поэтому $b_1 = t(n - t) - (n - t) + t - 1 = (t - 1)(n - t + 1)$. Утверждение (1) доказано.

Если $t - 1 = b_1$, то по утверждению (1) получим $n - t = 0$ и Γ является полным многодольным графом $K_{r \times (b_1 + 1)}$. Утверждение (2) доказано.

Если b_1 — простое число, то $t - 1 = b_1$ или 1. В первом случае Γ является полным многодольным графом $K_{r \times (b_1 + 1)}$, а во втором случае — зейделевым графом. Утверждение (3) доказано.

Если $b_1 = 2(t - 1)$, то $n - t = 1$ и Γ является дополнительным к зейделеву графу.

Лемма 3. Пусть Γ — сильно регулярный граф. Если $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ и $b_1 < 26$, то $b_1 \neq 5, 8, 14, 17, 19, 23$.

Доказательство. Если $v = 4\mu + 1$ является степенью простого числа, то граф Пэли на v вершинах имеет параметры $(v, 2\mu, \mu - 1, \mu)$. Если $b_1 \leq 23$, то $v = 4b_1 + 1$ не является степенью простого числа для $b_1 = 5, 8, 11, 14, 16, 17, 19, 21$ или 23. Но в случае $b_1 = 11$ число $v = 45$ равно $36 + 9$, в случае $b_1 = 16$ число $v = 65$ равно $49 + 16$, а в случае $b_1 = 21$ число $v = 85$ равно $81 + 4$.

Лемма 4. Пусть Γ — сильно регулярный граф с $0 < b_1 < 26$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) если Γ — граф Зейделя, то Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 2}$, $n \times n$ решеткой, $n \leq 26$, треугольным графом $T(n)$, $n \leq 28$, графом Петерсена, Клебша, Шлефли, Шрикханде или одним из трех графов Чанга;

(2) если Γ — дополнительный граф к графу Зейделя, то Γ является дополнительным графом к $n \times n$ решетке, $n \leq 14$, треугольному графу $T(n)$, $n \leq 16$, графу Петерсена, Клебша, Шлефли, Шрикханде или одному из трех графов Чанга.

Доказательство. Если Γ является $n \times n$ решеткой, то $k = 2(n - 1)$, $\lambda = n - 2$ и $b_1 = n - 1$, поэтому $n \leq 26$. Если Γ является треугольным графом $T(n)$, то $k = 2(n - 2)$, $\lambda = n - 2$ и $b_1 = n - 3$, поэтому $n \leq 28$. Если Γ является графом Петерсена, Клебша, Шлефли, Шрикханде или одним из трех графов Чанга, то $b_1 = 2, 3, 5, 3$ или 5 соответственно. Утверждение (1) доказано.

Если Γ — дополнительный граф к сильно регулярному графу $\bar{\Gamma}$ с параметрами $(\bar{v}, \bar{k}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, то $b_1 = \bar{k} - \bar{\mu}$. Если $\bar{\Gamma}$ является $n \times n$ решеткой, то $b_1 = 2n - 4$, поэтому $n \leq 14$. Если $\bar{\Gamma}$ является треугольным графом $T(n)$, то $b_1 = 2n - 8$, поэтому $n \leq 16$. Если $\bar{\Gamma}$ является графом Петерсена, Клебша, Шлефли, Шрикханде или одним из трех графов Чанга, то $b_1 = 2, 4, 8, 4$ или 8 соответственно. Лемма доказана.

Пусть до конца работы Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) , не являющимся графом в половинном случае, имеющим собственное значение $-t$, $1 < t - 1 < b_1/2$ и $b_1 \leq 25$. Заметим, что если Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s, t)$, то $b_1 = t(s - \alpha + 1)$.

Лемма 5. Если $b_1 = 6$, то либо Γ является графом Хофмана-Синглтона или его дополнением, либо Γ является графом с параметрами $(26, 10, 3, 4)$ или его дополнением.

Доказательство. По предположению $t - 1 = 2$ и по лемме 2 получим $n - t + 1 = 3$. Но в этом случае граф $\bar{\Gamma}$ также имеет собственные значения 2 и -3, поэтому $b_1 = 6$.

Теперь $k = 6 + \mu$, $n = 5$, по прямоугольному соотношению μ делит 36, а по условию целочисленности 5μ делит $2(6 + \mu)(9 + \mu)$. Поэтому μ сравнимо с ± 1 по модулю 5. Если $\mu = 1$, то Γ имеет параметры $(50, 7, 0, 1)$ и является графом Хофмана-Синглтона.

Если $\mu = 4$, то Γ имеет параметры $(26, 10, 3, 4)$. Если $\mu = 6$, то Γ является графом в половинном случае. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры $(26, 15, 8, 9)$ и является дополнительным графом к графу с параметрами $(26, 10, 3, 4)$. Если же $\mu = 36$, то Γ является дополнительным графом к графу Хофмана-Синглтона. Лемма доказана.

Заметим, что граф с параметрами $(26, 15, 8, 9)$ является псевдогеометрическим графом для $pG_3(5, 2)$.

Лемма 6. Если $b_1 = 8$, то выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Γ является псевдогеометрическим графом для $GQ(4, 2)$, $pG_2(5, 2)$, $pG_3(6, 2)$ или $pG_4(7, 2)$;

(2) Γ является дополнительным графом для псевдогеометрического графа обобщенного четырехугольника $GQ(3, 3)$ или для графа Гевиртца.

Доказательство. По предположению $m - 1 = 2$ и по лемме 2 получим $n - m + 1 = 4$. В этом случае граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -4, поэтому $\bar{b}_1 = 9$.

Теперь $k = 9 + \mu$, $\lambda = \mu$, $n = 6$, по прямоугольному соотношению μ делит 72, а по условию целочисленности 6μ делит $2(9 + \mu)(12 + \mu)$. Поэтому μ делится на 3 и делит 36. Если $\mu = 3$, то Γ имеет параметры $(45, 12, 3, 3)$ и является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(4, 2)$.

Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(36, 15, 6, 6)$ и является псевдогеометрическим графом для сети $pG_2(5, 2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры $(35, 18, 9, 9)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(6, 2)$. Заметим, что в этом случае дополнительный граф для Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(4, 3)$.

Если $\mu = 12$, то Γ имеет параметры $(36, 21, 12, 12)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_4(7, 2)$. Если $\mu = 18$, то Γ имеет параметры $(40, 27, 18, 18)$ и является дополнительным графом для псевдогеометрического графа обобщенного четырехугольника $GQ(3, 3)$. Если же $\mu = 36$, то Γ имеет параметры $(56, 45, 36, 36)$ и является дополнительным графом для графа Гевиртца с параметрами $(56, 10, 0, 2)$.

Лемма 7. Если $b_1 = 9$, то Γ является дополнительным графом для одного из графов в заключении леммы 6.

Доказательство. По предположению $m - 1 = 3$ и по лемме 2 получим $n - m + 1 = 3$. В этом случае граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 3 и -3, поэтому $\bar{b}_1 = 8$ и $\bar{m} = 3$.

Лемма 8. Если $b_1 = 10$, то Γ имеет параметры $(85, 14, 3, 2)$ или $(49, 18, 7, 6)$.

Доказательство. По предположению $m - 1 = 2$ и по лемме 2 получим $n - m + 1 = 5$. В этом случае граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -5, поэтому $\bar{b}_1 = 12$.

Теперь $k = 12 + \mu$, $\lambda = \mu + 1$, $n = 7$, по прямоугольному соотношению μ делит 120, а по условию целочисленности 7μ делит $2(12 + \mu)(15 + \mu)$. Поэтому μ сравнимо с 2 или -1 по модулю 7. Если $\mu = 2$, то Γ имеет параметры $(85, 14, 3, 2)$.

Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(49, 18, 7, 6)$ и является псевдогеометрическим графом для сети $pG_2(6, 2)$. Если $\mu = 20$, то Γ имеет параметры $(49, 32, 21, 20)$ и не существует по [5]. Если $\mu = 30$, то Γ имеет параметры $(57, 42, 31, 30)$. Но дополнительный граф для этого графа имеет параметры $(57, 14, 1, 4)$ и не существует по [6]. Если же $\mu = 120$, то Γ имеет параметры $(144, 132, 121, 120)$. Противоречие с тем, что $\bar{\lambda} = v - 2k - 2 + \mu = -2$.

Лемма 9. Если $b_1 = 12$, то выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Γ является дополнительным графом для одного из графов в заключении леммы 8;
- (2) либо Γ имеет параметры $(99, 14, 1, 2)$ или $(50, 21, 8, 9)$, либо Γ является дополнительным графом для одного из графов с указанными параметрами;
- (3) Γ либо имеет параметры $(69, 20, 7, 5)$, либо является псевдогеометрическим графом для $pG_2(7, 2)$ или $pG_3(8, 2)$;
- (4) Γ является дополнительным графом либо для псевдогеометрического графа обобщенного четырехугольника $GQ(3, 5)$, либо для графа с параметрами $(77, 16, 0, 4)$.

Доказательство. По предположению $m - 1 = 2, 3$ или 4. Если $m - 1 = 4$, то граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 4 и -3, поэтому $\bar{b}_1 = 10$ и Γ является дополнительным графом для одного из графов в заключении леммы 8.

Если $m - 1 = 3$, то граф Γ имеет собственные значения 3 и -4. В этом случае граф $\bar{\Gamma}$ также имеет собственные значения 3 и -4, поэтому $\bar{b}_1 = 12$.

Теперь $k = 12 + \mu$, $\lambda = \mu - 1$, $n = 7$, по прямоугольному соотношению μ делит 144, а по условию целочисленности 7μ делит $3(12 + \mu)(16 + \mu)$. Поэтому μ сравнимо с ± 2 по модулю 7. Если $\mu = 2$, то Γ имеет параметры $(99, 14, 1, 2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры $(50, 21, 8, 9)$.

Если $\mu = 12$, то Γ является графом в половинном случае. Если $\mu = 16$, то Γ имеет параметры $(50, 28, 15, 16)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_4(7, 3)$. Если же $\mu = 72$, то Γ имеет параметры $(99, 84, 71, 72)$.

Если $m - 1 = 2$, то граф Γ имеет собственные значения 5 и -3. В этом случае граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -6, поэтому $\bar{b}_1 = 15$.

Теперь $k = 15 + \mu$, $\lambda = \mu + 2$, $n = 8$, по прямоугольному соотношению μ делит 180, а по условию целочисленности 8μ делит $2(15 + \mu)(18 + \mu)$. Поэтому μ сравнимо с 1 по модулю 4 или с -2 по модулю 8. Если $\mu = 1$, то Γ имеет параметры $(209, 16, 3, 1)$. Противоречие с тем, что число 5-клик в Γ равно $209 \cdot 4/5$. Если $\mu = 5$, то Γ имеет параметры $(69, 20, 7, 5)$. Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(64, 21, 8, 6)$ и является псевдогеометрическим графом для сети $pG_2(7, 2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры $(57, 24, 11, 9)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(8, 2)$.

Если $\mu = 30$, то Γ имеет параметры $(64, 45, 32, 30)$ и является дополнительным графом для псевдогеометрического графа обобщенного четырехугольника $GQ(3, 5)$. Если $\mu = 45$, то Γ имеет параметры $(77, 60, 47, 45)$ и является дополнительным графом для графа с параметрами $(77, 16, 0, 4)$.

Лемма 10. Если $b_1 = 14$, то либо Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(8, 2)$ или $pG_3(9, 2)$, либо Γ — дополнительный граф для графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$.

Доказательство. По предположению $m - 1 = 2$ и $n - m + 1 = 7$, граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -7, поэтому $\bar{b}_1 = 18$.

Теперь $k = 18 + \mu$, $\lambda = \mu + 3$, $n = 9$, по прямоугольному соотношению μ делит $18 \cdot 14$, а по условию целочисленности 9μ делит $2(18 + \mu)(21 + \mu)$. Поэтому μ сравнимо с 0 или -3 по модулю 9. Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(81, 24, 9, 6)$ и является псевдогеометрическим графом для сети $pG_2(8, 2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры $(70, 27, 12, 9)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(9, 2)$.

Если $\mu = 36$, то Γ имеет параметры $(76, 54, 39, 36)$. В этом случае дополнительный граф для Γ является псевдогеометрическим графом для $GQ(3, 6)$ и по [7] не существует. Если $\mu = 42$, то Γ имеет параметры $(81, 60, 45, 42)$ и является дополнительным графом для графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$. Если же $\mu = 63$, то Γ имеет параметры $(100, 81, 66, 63)$ и $\bar{\lambda} = -1$.

Лемма 11. Если $b_1 = 15$, то выполняется одно из следующих утверждений:

(1) либо Γ является псевдогеометрическим графом для $GQ(3, 5)$ или единственным сильно регулярным графом с параметрами $(77, 16, 0, 4)$, либо Γ является дополнительным графом для графа с параметрами $(69, 20, 7, 5)$, $(64, 21, 8, 6)$ или $(57, 24, 11, 9)$;

(2) Γ является псевдогеометрическим графом для $GQ(5, 3)$, $pG_3(7, 3)$, $pG_4(8, 3)$, $pG_5(9, 3)$, $pG_{12}(16, 3)$, $pG_{15}(19, 3)$ или $pG_{20}(24, 3)$.

Доказательство. По предположению $m - 1 = 3$ или 5. Если $m - 1 = 5$, то $n - m + 1 = 3$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 5 и -3, поэтому $\bar{b}_1 = 12$ и $\bar{m} - 1 = 2$. В этом случае по лемме 9 выполняется утверждение (1).

Если $m - 1 = 3$, то $n - m + 1 = 5$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 3 и -5. Теперь $k = 16 + \mu$, $\lambda = \mu$, $n = 8$, по прямоугольному соотношению μ делит $16 \cdot 15$, а по условию целочисленности 8μ делит $3(16 + \mu)(20 + \mu)$. Поэтому μ сравнимо с 4 по модулю 8 или делится на 16. Если $\mu = 4$, то Γ имеет параметры $(96, 20, 4, 4)$ и является псевдогеометрическим графом для $GQ(5, 3)$. Если $\mu = 12$, то Γ имеет параметры $(64, 28, 12, 12)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(7, 3)$.

Если $\mu = 16$, то Γ имеет параметры $(63, 32, 16, 16)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_4(8, 3)$. Если $\mu = 20$, то Γ имеет параметры $(64, 36, 20, 20)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_5(9, 3)$. Если $\mu = 48$, то Γ имеет параметры $(85, 64, 48, 48)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_{12}(16, 3)$. Если $\mu = 60$, то Γ имеет параметры $(96, 76, 60, 60)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_{15}(19, 3)$. Если $\mu = 80$, то Γ имеет параметры $(115, 96, 80, 80)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_{20}(24, 3)$. является дополнительным графом для графа с параметрами $(115, 18, 1, 3)$. Если же $\mu = 240$, то Γ имеет параметры $(273, 256, 240, 240)$ и $\bar{\lambda} = -1$. Лемма доказана.

Заметим, что граф с параметрами $(69, 48, 32, 36)$ является псевдогеометрическим для $pG_6(8, 5)$, а псевдогеометрический граф для $pG_{20}(24, 3)$ является дополнительным графом для графа с параметрами $(115, 18, 1, 3)$.

Лемма 12. Если $b_1 = 16$, то выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Γ имеет параметры $(126, 25, 8, 4)$ частного графа Джонсона $J(10, 5)$;
- (2) Γ является либо псевдогеометрическим графом для $pG_2(9, 2)$ или $pG_8(15, 2)$, либо дополнительным графом к псевдогеометрическому графу для $pG_2(4, 7)$ или $pG_3(5, 7)$, либо дополнительным графом к графу Хигмена-Симса;
- (3) Γ является дополнительным графом для графа из пункта (2) леммы 11.

Доказательство. По предположению $m - 1 = 2$ или 4. Если $m - 1 = 2$, то $n - m + 1 = 8$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -8, поэтому $\bar{b}_1 = 21$. Теперь $k = 21 + \mu$, $\lambda = 4 + \mu$, $n = 10$, по прямоугольному соотношению μ делит $21 \cdot 16$, а по условию целочисленности 10μ делит $2(21 + \mu)(24 + \mu)$. Поэтому μ делит 168 и μ сравнимо с ± 1 по модулю 5. Если $\mu = 1$, то Γ имеет параметры $(375, 22, 6, 1)$ и окрестность вершины в Γ не может быть объединением 7-клик. Если $\mu = 4$, то Γ имеет параметры $(126, 25, 8, 4)$. Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(81, 27, 10, 6)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_2(9, 2)$. Если $\mu = 14$, то Γ имеет параметры $(76, 35, 18, 14)$ и является дополнительным графом к псевдогеометрическому графу для $pG_3(5, 7)$. Если $\mu = 21$, то Γ имеет параметры $(75, 42, 25, 21)$ и является дополнительным графом к псевдогеометрическому графу для $pG_2(4, 7)$. Если $\mu = 24$, то Γ имеет параметры $(76, 45, 28, 24)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_8(15, 2)$. Если $\mu = 56$, то Γ имеет параметры $(100, 77, 60, 56)$ и является дополнительным графом к графу Хигмена-Симса. Наконец, если $\mu = 84$, то Γ имеет параметры $(126, 105, 88, 84)$ и в дополнительном графе получим $\bar{\lambda} = -2$.

Если $m - 1 = 4$, то $n - m + 1 = 4$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 4 и -4. В этом случае $\bar{b}_1 = 15$ и Γ является дополнительным графом для графа из пункта (2) леммы 11.

Лемма 13. Если $b_1 = 18$, то выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Γ имеет параметры $(100, 33, 14, 9)$;
- (2) Γ имеет параметры $(400, 21, 2, 1)$, $(162, 23, 4, 3)$, $(81, 32, 13, 12)$, $(81, 50, 31, 30)$ или $(85, 30, 11, 10)$;

(3) Γ является псевдогеометрическим графом для $GQ(6, 3)$ или для $pG_{10}(15, 3)$;

(4) Γ либо имеет параметры $(81, 20, 1, 6)$, либо является псевдогеометрическим графом для $pG_6(8, 6)$ или $pG_4(6, 6)$.

Доказательство. По предположению $m-1 = 2, 3$ или 6 . Если $m-1 = 2$, то $n-m+1 = 9$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -9 , поэтому $\bar{b}_1 = 24$. Теперь $k = 24 + \mu$, $\lambda = 5 + \mu$, $n = 11$, по прямоугольному соотношению μ делит $24 \cdot 18$, а по условию целочисленности 11μ делит $2(24 + \mu)(27 + \mu)$. Поэтому μ делит $24 \cdot 54$ и 11 делит $(\mu + 2)(\mu + 5)$. Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(121, 30, 11, 6)$ и Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(10, 2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры $(100, 33, 14, 9)$. Если $\mu = 72$, то Γ имеет параметры $(121, 96, 77, 72)$ и $\bar{\lambda} = -1$. Если $\mu = 108$, то Γ имеет параметры $(155, 132, 113, 108)$ и $\bar{\lambda} = -3$.

Если $m-1 = 3$, то $n-m+1 = 6$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 3 и -6 . В этом случае $\bar{b}_1 = 20$. Теперь $k = 20 + \mu$, $\lambda = 1 + \mu$, $n = 9$, по прямоугольному соотношению μ делит $20 \cdot 18$, а по условию целочисленности 9μ делит $3(20 + \mu)(24 + \mu)$. Поэтому μ делит $24 \cdot 60$ и 3 делит $\mu(\mu + 2)$. Если $\mu = 1$, то Γ имеет параметры $(400, 21, 2, 1)$. Если μ делится на 3 , то 9 делит $24 + \mu$, поэтому либо $\mu = 3$ и Γ имеет параметры $(162, 23, 4, 3)$, либо $\mu = 12$ и Γ имеет параметры $(81, 32, 13, 12)$, либо $\mu = 30$ и Γ имеет параметры $(81, 50, 31, 30)$. Если $\mu = 4$, то Γ имеет параметры $(133, 24, 5, 4)$ и является псевдогеометрическим графом для $GQ(6, 3)$. Если $\mu = 10$, то Γ имеет параметры $(85, 30, 11, 10)$. Если $\mu = 40$, то Γ имеет параметры $(88, 60, 41, 40)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_{10}(15, 3)$. Если же $\mu \geq 90$, то $\bar{\lambda} < 0$.

Если $m-1 = 6$, то $n-m+1 = 3$, граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 6 и -3 , поэтому $\bar{b}_1 = 14$. По лемме 10 граф Γ либо имеет параметры $(81, 20, 1, 6)$, либо является псевдогеометрическим графом для $pG_6(8, 6)$ или $pG_4(6, 6)$.

Лемма 14. Если $b_1 = 20$, то выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_3(12, 2)$, $pG_5(14, 2)$, $pG_6(15, 2)$, $pG_9(18, 2)$ или для $pG_{15}(24, 2)$;

(2) Γ имеет параметры $(243, 22, 1, 2)$, $(82, 36, 15, 16)$ или $(82, 45, 24, 25)$;

(3) Γ является дополнительным графом для графа из пунктов (2–3) заключения леммы 13.

Доказательство. По предположению $m-1 = 2, 4$ или 5 . Если $m-1 = 2$, то $n-m+1 = 10$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -10 , поэтому $\bar{b}_1 = 27$. Теперь $k = 27 + \mu$, $\lambda = 6 + \mu$, $n = 12$, по прямоугольному соотношению μ делит $27 \cdot 20$, а по условию целочисленности 12μ делит $2(27 + \mu)(30 + \mu)$. Поэтому μ делит $27 \cdot 10$ и 6 делит $(\mu + 3)\mu$. Если $\mu = 3$, то Γ имеет параметры $(231, 30, 9, 3)$ и Γ является псевдогеометрическим графом для $GQ(10, 2)$, противоречие. Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(144, 33, 12, 6)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_2(11, 2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры $(117, 36, 15, 9)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(12, 2)$. Если $\mu = 15$, то Γ имеет параметры $(99, 42, 21, 15)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_5(14, 2)$. Если $\mu = 18$, то Γ имеет параметры $(96, 45, 24, 18)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_6(15, 2)$. Если $\mu = 27$, то Γ имеет параметры $(95, 54, 33, 27)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_9(18, 2)$. Если $\mu = 30$, то Γ имеет параметры $(96, 57, 36, 30)$ и не существует (см. домашнюю стр. А. Броувер). Если $\mu = 45$, то Γ имеет параметры $(105, 72, 51, 45)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_{15}(24, 2)$.

Если $m-1 = 4$, то $n-m+1 = 5$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 4 и -5 . В этом случае $\bar{b}_1 = 20$. Теперь $k = 20 + \mu$, $\lambda = \mu - 1$, $n = 9$, по прямоугольному

соотношению μ делит $20 \cdot 20$, а по условию целочисленности 9μ делит $4(20+\mu)(25+\mu)$. Поэтому 9 делит $(\mu-2)(\mu+2)$. Если $\mu = 2$, то Γ имеет параметры $(243, 22, 1, 2)$. Если $\mu = 16$, то Γ имеет параметры $(82, 36, 15, 16)$. Если $\mu = 20$, то Γ — граф в половинном случае. Если $\mu = 25$, то Γ имеет параметры $(82, 45, 24, 25)$.

Если $m-1 = 5$, то $n-m+1 = 4$, граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 5 и -4. В этом случае $\bar{b}_1 = 18$ и Γ является дополнительным графом для графа из пунктов (2-3) заключения леммы 13.

Лемма 15. Если $b_1 = 21$, то выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Γ либо имеет параметры $(100, 66, 44, 42)$, $(136, 30, 8, 6)$ или $(300, 26, 4, 2)$, либо Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_3(9, 3)$, $pG_9(15, 3)$, $pG_{14}(20, 3)$;

(2) Γ является дополнительным графом для графа из пунктов (1-2) заключения леммы 12.

Доказательство. По предположению $m-1 = 3$ или 7. Если $m-1 = 3$, то $n-m+1 = 7$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 3 и -7, поэтому $\bar{b}_1 = 24$. Теперь $k = 24 + \mu$, $\lambda = 2 + \mu$, $n = 10$, по прямоугольному соотношению μ делит $24 \cdot 21$, а по условию целочисленности 10μ делит $3(24+\mu)(28+\mu)$. Поэтому 5 делит $(\mu-1)(\mu-2)$. Если $\mu = 2$, то Γ имеет параметры $(300, 26, 4, 2)$. Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(136, 30, 8, 6)$. Если $\mu = 12$, то Γ имеет параметры $(100, 36, 14, 12)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(9, 3)$. Если $\mu = 36$, то Γ имеет параметры $(96, 60, 38, 36)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_9(15, 3)$. Если $\mu = 42$, то Γ имеет параметры $(100, 66, 44, 42)$. Если $\mu = 56$, то Γ имеет параметры $(111, 80, 58, 56)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_{14}(20, 3)$.

Если $m-1 = 7$, то $n-m+1 = 3$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 7 и -3. В этом случае $\bar{b}_1 = 16$ и Γ является дополнительным графом для графа из пунктов (1-2) заключения леммы 12.

Лемма 16. Если $b_1 = 24$, то выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Γ имеет параметры $(196, 39, 14, 6)$, $(155, 42, 17, 9)$ или $(120, 77, 52, 44)$;

(2) Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_3(10, 3)$, $pG_4(11, 3)$ или $pG_{14}(21, 3)$;

(3) Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(5 + \alpha, 4)$, $\alpha \in \{1, \dots, 6, 15, 20, 30, 60\}$;

(4) Γ является дополнительным графом к одному из графов в пункте (1) заключения леммы 15;

(5) Γ является дополнительным графом к графу с параметрами $(121, 30, 11, 6)$ или $(100, 33, 14, 9)$.

Доказательство. По предположению $m-1 = 2, 3, 4, 6$ или 8. Если $m-1 = 2$, то $n-m+1 = 12$, поэтому $n = 14$, граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -12, поэтому $\bar{b}_1 = 33$. Теперь $k = 33 + \mu$, $\lambda = 8 + \mu$, по прямоугольному соотношению μ делит $33 \cdot 24$, а по условию целочисленности 14μ делит $2(33+\mu)(36+\mu)$. Поэтому 7 делит $(\mu-2)(\mu+1)$. Если $\mu = 2$, то Γ имеет параметры $(456, 35, 10, 2)$. Этот граф не существует ввиду границы Брувера-Ноймайера. Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(196, 39, 14, 6)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_2(13, 2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры $(155, 42, 17, 9)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(14, 2)$. Если $\mu = 44$, то Γ имеет параметры $(120, 77, 52, 44)$. Последние три графа существуют.

Если $m - 1 = 3$, то $n - m + 1 = 8$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 3 и -8, поэтому $\bar{b}_1 = 28$. Теперь $k = 28 + \mu$, $\lambda = 3 + \mu$, $n = 11$, по прямоугольному соотношению μ делит $28 \cdot 24$, а по условию целочисленности 11μ делит $3(28 + \mu)(32 + \mu)$. Поэтому 11 делит $(\mu - 5)(\mu - 1)$. Если $\mu = 1$, то Γ имеет параметры $(726, 29, 4, 1)$, противоречие с тем, что 5 не делит 29. Если $\mu = 12$, то Γ имеет параметры $(121, 40, 15, 12)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(10, 3)$. Если $\mu = 16$, то Γ имеет параметры $(111, 44, 19, 16)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_4(11, 3)$. Если $\mu = 56$, то Γ имеет параметры $(121, 84, 59, 56)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_{14}(21, 3)$.

Если $m - 1 = 4$, то $n - m + 1 = 6$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 4 и -6, поэтому $\bar{b}_1 = 25$. Теперь $k = 25 + \mu$, $\lambda = \mu$, $n = 10$, по прямоугольному соотношению μ делит $25 \cdot 24$, а по условию целочисленности 10μ делит $4(25 + \mu)(30 + \mu)$. Поэтому 5 делит μ . Если $\mu = 5$, то Γ имеет параметры $(175, 30, 5, 5)$, это псевдо $GQ(6, 4)$ -граф. Если $\mu = 10$, то Γ имеет параметры $(120, 35, 10, 10)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(9, 3)$. Если $\mu = 15$, то Γ имеет параметры $(105, 40, 15, 15)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_9(15, 3)$. Если $\mu = 20$, то Γ имеет параметры $(100, 45, 20, 20)$. Если $\mu = 25$, то Γ имеет параметры $(99, 50, 25, 25)$. Если $\mu = 30$, то Γ имеет параметры $(100, 55, 30, 30)$. Если $\mu = 40$, то Γ имеет параметры $(105, 65, 40, 40)$, противоречие с тем, что vk нечетно. Если $\mu = 50$, то Γ имеет параметры $(112, 75, 50, 50)$. Если $\mu = 60$, то Γ имеет параметры $(120, 85, 60, 60)$. Если $\mu = 75$, то Γ имеет параметры $(133, 100, 75, 75)$. Если $\mu = 100$, то Γ имеет параметры $(156, 125, 100, 100)$. Если $\mu = 120$, то Γ имеет параметры $(175, 145, 120, 120)$, противоречие с тем, что vk нечетно. Если $\mu = 150$, то Γ имеет параметры $(204, 175, 150, 150)$. Если $\mu = 200$, то Γ имеет параметры $(253, 225, 200, 200)$, противоречие с тем, что vk нечетно. Если $\mu = 300$, то Γ имеет параметры $(352, 325, 300, 300)$.

Если $m - 1 = 6$, то $n - m + 1 = 4$, поэтому $n = 10$, граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 6 и -4, поэтому $\bar{b}_1 = 21$. Поэтому Γ является дополнительным графом к одному из графов в пункте (1) леммы 15.

Если $m - 1 = 8$, то $n - m + 1 = 3$, поэтому $n = 11$, граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 8 и -3, поэтому $\bar{b}_1 = 18$. Поэтому Γ является дополнительным графом к графу с параметрами $(121, 30, 11, 6)$ или $(100, 33, 14, 9)$ (см. лемму 13).

Лемма 17. Если $b_1 = 25$, то Γ является дополнительным графом для одного из графов в пункте (3) заключения леммы 16.

Доказательство. По предположению $m - 1 = 5$, $n - m + 1 = 5$, поэтому $n = 10$, граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 5 и -5, поэтому $\bar{b}_1 = 24$. Отсюда Γ является дополнительным графом для одного из графов в пункте (3) заключения леммы 16. Лемма доказана.

Из лемм 3–17 следует теорема.

Список литературы

1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A., *Distance-regular graphs*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
2. Махнев А. А., О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов. *Известия РАН, сер. матем.* (2004) **68**, 159–172.
3. Казарина В. И., Махнев А. А., О реберно регулярных графах с $b_1 = 5$. *Владикавказский матем. журнал* (2009) **11**, №1, 29–42.

4. Махнев А. А., О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ -подграфы. *Дискр. анализ и исслед. операций* (1996) **3**, №3, 71–83.
5. Bussemaker F., Haemers W., Mathon R., Wilbrink H. A., A $(49,16,3,6)$ strongly regular graph does not exist. *Europ. J. Comb.* (1989) **10**, 413–418.
6. Wilbrink H. A., Brouwer A. E., $(57,14,1)$ strongly regular graph does not exist. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser. A* (1983) **45**, 117–121.
7. Махнев А. А., О псевдогеометрических графах некоторых частичных геометрий. *Вопросы алгебры* (1997), № 11 60–67.

Статья поступила 21.05.2011.