Общероссийский математический портал

В. П. Елизаров, В. Л. Куракин, Факторно разрешимые кольца, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 3, 33–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:00:40

Факторно разрешимые кольца

© 2013 г. В. П. Елизаров, В. Л. Куракин

Система линейных уравнений над кольцом R называется факторно разрешимой, если для каждого собственного идеала I кольца R разрешима ее факторсистема над кольцом R/I . Кольцо называется факторно разрешимым, если над ним разрешима любая факторно разрешимая система. В настоящей работе показано, что разложимое кольцо факторно разрешимо, что коммутативная область главных идеалов факторно разрешима тогда и только тогда, когда она подпрямой неразложима, и что конечное коммутативное кольцо факторно разрешимо тогда и только тогда, когда оно не локальное.

1. Введение

Всюду далее термин «кольцо» означает ассоциативное кольцо с единицей, а термин «идеал» — двусторонний идеал кольца. Через $R_{m,n}$ обозначим совокупность всех матриц размеров $m \times n$ с элементами из кольца R . В частном случае полагаем $R_{m,1} = R^{(m)}$.

Будем рассматривать системы линейных уравнений над кольцом R вида

$$Ax^\downarrow = b^\downarrow, \quad (1)$$

где $A \in R_{m,n}$, $b^\downarrow \in R^{(m)}$. Система уравнений (1) называется *разрешимой*, если она имеет хотя бы одно решение в $R^{(n)}$, и *неразрешимой* в противном случае.

Пусть I — идеал кольца R и $\bar{R} = R/I$ — соответствующее факторкольцо. Для любой матрицы $A \in R_{m,n}$ обозначим через $\bar{A} \in \bar{R}_{m,n}$ ее образ при каноническом эпиморфизме $R \rightarrow \bar{R}$. Систему уравнений

$$A\bar{x}^\downarrow = \bar{b}^\downarrow \quad (2)$$

назовем *факторсистемой* системы уравнений (1) над факторкольцом $\bar{R}$. Будем говорить, что система уравнений (1) *разрешима над факторкольцом R/I* , если разрешима система уравнений (2).

Систему уравнений (1) назовем *факторно разрешимой*, если для каждого собственного идеала I кольца R разрешима факторсистема (2). Свойство факторной разрешимости системы уравнений над кольцом введено в [2]; в [4, глава 8] факторно разрешимая система уравнений называется *согласованной относительно факторколец*.

Ясно, что всякая разрешимая система уравнений является и факторно разрешимой. Обратное утверждение неверно: соответствующий пример — уравнение $0x_1 = 2$

над кольцом вычетов $\mathbb{Z}_4$. Возникает вопрос: при каких условиях на кольцо R и/или на матрицу $(A, b^\downarrow)$ факторно разрешимая система уравнений (1) является разрешимой?

Будем говорить, что кольцо R *факторно разрешимо*, если над R разрешима любая факторно разрешимая система вида (1). Простое кольцо по определению факторно не разрешимо.

Известны некоторые результаты о факторно разрешимых системах уравнений и кольцах. Напомним, что рангом матрицы над коммутативным кольцом называется наибольший порядок ее ненулевого минора. Система уравнений полного ранга ($m \leq n$, $\text{rang } A = m$) над коммутативным кольцом разрешима тогда и только тогда, когда она факторно разрешима [2]. Коммутативная область главных идеалов, пересечение всех ненулевых идеалов которой равно нулю, факторно разрешима [3].

В настоящей работе показано, что класс всех разложимых колец есть подкласс класса всех факторно разрешимых колец (теорема 1), что коммутативная область главных идеалов факторно разрешима тогда и только тогда, когда пересечение всех ее идеалов равно нулю (теорема 2), и что в классе всех конечных подкоммутативных справа или слева колец факторно разрешимыми являются нелокальные кольца и только они (теорема 4).

2. Системы уравнений над произвольными кольцами

Укажем один класс факторно разрешимых колец.

Теорема 1. *Любое разложимое кольцо R факторно разрешимо.*

Доказательство. Пусть e — единица кольца R . Так как R — разложимое кольцо, то $e = e_0 + e_1$ — сумма двух ненулевых ортогональных центральных идемпотентов и $R = e_0R + e_1R$ — прямая сумма идеалов [5, глава 7].

Пусть (1) — произвольная факторно разрешимая система линейных уравнений над R . Систему уравнений

$$e_i A x^\downarrow = e_i b^\downarrow, \quad i \in \{0, 1\}, \quad (3)$$

над кольцом $e_i R$, ввиду изоморфизма $R/e_i R \cong e_{1-i} R$, можно рассматривать как систему над факторкольцом $R/e_{1-i} R$, т. е. как факторсистему.

Так как система уравнений (1) факторно разрешима, то системы уравнений (3) разрешимы для $i \in \{0, 1\}$. Если $e_i h_i^\downarrow \in e_i R^{(n)}$, $i \in \{0, 1\}$, — их решения, то

$$h^\downarrow = e_0 h_0^\downarrow + e_1 h_1^\downarrow$$

— решение системы уравнений (1) над R .

Из теоремы 1 получаем, что класс всех разложимых колец является подклассом класса всех факторно разрешимых колец. Установим связи между условиями разрешимости для различных факторсистем системы уравнений (1).

Утверждение 1. *Если $I \subset J$ — идеалы кольца R и система (1) разрешима над кольцом R/I , то она разрешима и над кольцом R/J .*

Доказательство. Так как система (1) разрешима над кольцом R/I , то существует $h^\downarrow \in R^{(n)}$, для которого $Ah^\downarrow \in b^\downarrow + I^{(m)}$. Тогда $Ah^\downarrow \in b^\downarrow + J^{(m)}$, т. е. система разрешима над кольцом R/J .

Утверждение 2. Пусть любой идеал кольца R содержит некоторый его минимальный идеал, например, R -артиново кольцо. Тогда следующие утверждения равносильны.

(а) Кольцо R факторно разрешимо.

(б) Если для любого минимального идеала I кольца R система уравнений (1) разрешима над факторкольцом R/I , то она разрешима и над кольцом R .

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б) Пусть кольцо R факторно разрешимо. Рассмотрим систему уравнений (1), разрешимую над факторкольцом R/I для любого минимального идеала I кольца R . Если J — произвольный идеал кольца R , то по условию $I \subset J$ для некоторого минимального идеала I кольца R . В силу утверждения 1 система уравнений (1) разрешима над кольцом R/J . Так как кольцо R факторно разрешимо, то система (1) разрешима над R .

(б) $\Rightarrow$ (а) Рассмотрим систему уравнений (1), разрешимую над факторкольцом R/I для произвольного идеала I кольца R . Тогда она разрешима и в случае, когда I — минимальный идеал. В силу условия (б) система уравнений (1) разрешима над R . Тем самым доказано, что кольцо R факторно разрешимо.

Укажем один признак факторной неразрешимости кольца. Через $M(R)$ обозначим пересечение всех ненулевых идеалов кольца R . Кольцо называется *подпрямо неразложимым*, если пересечение всех его ненулевых идеалов отлично от нуля, т. е. $M(R) \neq 0$ (см. [10, § 2.2] или [6, § 2.1]). Это условие равносильно тому, что кольцо R не допускает нетривиального представления в виде подпрямой суммы идеалов.

Утверждение 3. Подпрямо неразложимое кольцо факторно не разрешимо.

Доказательство. По условию $M(R) \neq 0$. Пусть $b \in M(R)$, $b \neq 0$. Уравнение $0x_1 = b$ ввиду утверждения 1 факторно разрешимо, но оно не имеет решений в кольце R .

Примерами подпрямо неразложимых колец являются конечные локальные квазифробениусовы кольца и кольца матриц над ними [7, 8, 9], а также коммутативные локальные артиновы кольца главных идеалов [1, глава 8].

Коммутативное кольцо без делителей нуля, все идеалы которого главные, назовем областью главных идеалов.

Теорема 2. Для области главных идеалов следующие свойства равносильны.

(а) Область R факторно разрешима.

(б) $M(R) = 0$.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) справедлива в силу утверждения 3. Импликация (б) $\Rightarrow$ (а) доказана в [3, теорема 2].

3. Системы уравнений над конечными кольцами

Рассмотрим конечные локальные кольца.

Теорема 3. Конечное локальное кольцо R не является факторно разрешимым.

Доказательство. Пусть M — максимальный идеал и $\bar{R} = R/M$ — поле вычетов кольца R . Если I — произвольный минимальный идеал кольца R , то по лемме Накаямы (см. [5, теорема 9.2.1(d)], [1, глава 2]) $IM \neq I$, так как $I \neq 0$. Так как I минимален, то $IM = 0$. Отсюда следует, что правило $a\Delta\bar{r} = ar$, $a \in I$, $r \in R$, корректно задает на I структуру правого пространства над полем $\bar{R}$.

Пусть $I_1, \dots, I_n$ — все минимальные идеалы кольца R . Чтобы доказать, что R факторно не разрешимо согласно утверждению 2, достаточно указать систему линейных уравнений над R , которая не разрешима над R , но разрешима над R/I_s для $1 \leq s \leq n$.

Выберем ненулевые элементы $a_s \in I_s$, $1 \leq s \leq n$, и рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1x_1 = a_1, \\ \dots \dots \\ a_nx_n = a_n, \\ x_1 + \dots + x_n = (n-1)e, \end{cases} \quad (4)$$

где e — единица кольца R . Покажем, что она не разрешима над R . Действительно, из уравнения $a_sx_s = a_s$ следует, что $a_s\bar{x}_s = a_s$ в пространстве I_s над полем $\bar{R}$. Тогда $a_s(\bar{x}_s - \bar{e}) = 0$, а поскольку $a_s \neq 0$, то $\bar{x}_s = \bar{e}$, $1 \leq s \leq n$. В таком случае последнее уравнение системы не выполняется.

Теперь покажем, что система (4) разрешима над R/I_s . Например, покажем, что система разрешима над R/I_1 . Положим $x_1 = 0$, $x_2 = \dots = x_n = 1$. Тогда первое уравнение в факторкольце R/I_1 обращается в истинное равенство $0 = 0$. Уравнения со второго по n -е, а также последнее уравнение, очевидно, обращаются в истинные равенства. Следовательно, система разрешима над R/I_1 .

Теорема доказана.

Любое коммутативное артиново кольцо является прямой суммой локальных колец [1, глава 8]. Поэтому доказанные результаты описывают факторно разрешимые кольца в классе конечных коммутативных колец. Этот класс колец можно расширить.

Кольцо R называется *подкоммутативным справа (слева)*, если для любых его элементов r_1 и r_2 найдется такой элемент $c \in R$ ($d \in R$), что выполняется равенство $r_1r_2 = r_2c$ ($r_1r_2 = dr_1$). Всякое коммутативное кольцо является подкоммутативным справа и слева. Опишем факторно разрешимые кольца в классе конечных подкоммутативных справа или слева колец.

Теорема 4. *Для конечного подкоммутативного справа (слева) кольца R следующие свойства равносильны.*

- (а) Кольцо R факторно разрешимо.
- (б) Кольцо R не является локальным.
- (в) Кольцо R разложимо.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) следует из теоремы 3. Так как любое конечное подкоммутативное справа (слева) кольцо с единицей представляется в виде прямой суммы локальных колец (см. [4, глава 2], в коммутативном случае [1, глава 8]), то свойства (б) и (в) равносильны. Импликация (в) $\Rightarrow$ (а) доказана в предложении 1.

Список литературы

1. Атья М., Макдональд И., *Введение в коммутативную алгебру*. Мир, Москва, 1972.
2. Елизаров В. П., Условия совместности систем линейных уравнений над кольцами. *Фундамент. и прикл. матем.* (2000) **6**, №3, 777–788.
3. Елизаров В. П., Условия, необходимые для разрешимости системы линейных уравнений над кольцом. *Дискр. матем.* (2004) **16**, №2, 44–53.
4. Елизаров В. П., *Конечные кольца*. Гелиос-АРВ, Москва, 2006.
5. Каш Ф., *Модули и кольца*. Мир, Москва, 1981.
6. Ламбек И., *Кольца и модули*. Мир, Москва, 1971.
7. Нечаев А. А., Критерии полноты систем функций на конечном кольце и квазифробениусовы кольца. *Сиб. мат. ж.* (1982) **23**, №3, 175–187.
8. Нечаев А. А., Конечные квазифробениусовы модули, приложения к кодам и линейным рекуррентам. *Фундаментальная и прикладная математика* (1995) **1**, №1, 229–254.
9. Nechaev A. A., Finite rings with applications. In: *Handbook of Algebra*, M. Hazewinkel (ed.), **5**. Elsevier, 2008, pp.213–320.
10. Херстейн И., *Некоммутативные кольца*. Мир, Москва, 1972.

Статья поступила 19.02.2009.