Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Потехина, М. И. Толовиков, Осциллирующее случайное блуждание и произведение Адамара рациональных функций, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 3, 96–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:28:47

Осциллирующее случайное блуждание и произведение Адамара рациональных функций

© 2013 г. Е. А. Потехина, М. И. Толовиков

В статье рассматриваются методы вычисления произведения Адамара рациональных функций и некоторые приложения произведения Адамара к вероятностным задачам. Найдены явные формулы для произведений Адамара рациональных функций в виде отношения определителей, элементы которых зависят от коэффициентов числителя и знаменателя дробей, задающих эти функции. Дается приложение к вычислению распределений статистик, связанных с осциллирующим случайным блужданием с целочисленными величинами скачков.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-00139а.

Введение

В настоящей статье рассматриваются алгоритмы вычисления произведения Адамара рациональных функций и некоторые приложения произведения Адамара к вероятностным задачам.

Произведением Адамара степенных рядов $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ называется степенной ряд $f(x) * g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k x^k$. Хорошо известно, что произведение Адамара разложений в ряд рациональных функций является рациональной функцией ([1], с. 308, [2], с. 27). Мы получим явные формулы, выражающие произведение Адамара рациональных функций в виде отношения определителей и через операции над матрицами. Насколько мы знаем, такие формулы ранее известны не были.

Как отмечает Р. Стенли ([1], с.380), установление точных источников утверждения о рациональности произведения Адамара степенных рядов, заданных рациональными функциями, было бы трудным делом. Подобные утверждения для других классов функций, например, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами, рассматриваются в работах Гурвица (см. [2], с. 55) и Стэнли [3]. Отметим, что доказательства этих утверждений конструктивны в том смысле, что дают алгоритмы отыскания соответствующих дифференциальных уравнений для произведения по уравнениям для сомножителей.

Произведение Адамара тесно связано с Ω -оператором Мак-Магона, введённом им в комбинаторной теории разбиений целых чисел. Этот оператор для ряда от одной переменной λ определяется следующим образом:

$$\Omega_{\geq} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \lambda^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Вопрос о том, как сделать это определение корректным, мы здесь не рассматриваем. Нас интересует связь Ω -оператора с произведением Адамара, которая может быть выражена следующим соотношением:

$$f(x) * g(x) = \Omega_{\geq} \left[\left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) f \left(\frac{1}{\lambda} \right) g(\lambda x) \right].$$

Таким образом, вычисление произведения Адамара может быть сведено к вычислению Ω -оператора. Справедливо и обратное утверждение, иллюстрацией к которому может служить лемма 5 настоящей статьи. Вычисление Ω -оператора представляет интерес в связи с рядом комбинаторных задач, которые могут быть решены с его привлечением. Много таких задач рассмотрено в серии работ Эндрюса с соавторами, подробный список которых приведён в [4]. Результаты этих работ получены с помощью систем компьютерной алгебры, поскольку объём вычислений слишком велик, чтобы выполнить их вручную.

Работа [4] посвящена построению алгоритма вычисления Ω -оператора Мак-Магона для случая рациональных функций. В силу отмеченного выше, этот алгоритм позволяет вычислять также произведения Адамара. Алгоритм использует разложение рациональных функций на простейшие дроби (возможное в случае алгебраической замкнутости поля коэффициентов) и технику симметрических функций для отыскания Ω -оператора от произведений простейших дробей. В настоящей статье получены явные формулы для произведений Адамара рациональных функций в виде отношения определителей, элементы которых зависят от коэффициентов числителей и знаменателей дробей, задающих эти функции. В формулы входят хорошо известные алгебраические объекты: результаты и субрезультаты многочленов. Вывод формул использует комбинаторную технику и поэтому не зависит от алгебраических свойств поля коэффициентов. Другие рассматриваемые нами методы вычислений связаны с переносом понятия произведения Адамара на матричные ряды. В ряде случаев этот подход также оказывается полезным.

Приводимые в статье примеры продемонстрируют трудоёмкость вычислений в простейших случаях и сложность получаемых формул. В некоторых примерах возможны другие методы вычисления, в частности, применение разложения на простейшие дроби, которым мы здесь почти не пользуемся. В последних двух пунктах даётся применение произведения Адамара к осциллирующим случайным блужданиям с целочисленными значениями скачков. Цель этих пунктов – показать возможность явного вычисления распределений некоторых характеристик случайного блуждания в случаях, когда производящие функции исходных случайных величин рациональны. Отметим, что метод доказательства теоремы 1 имеет своим источником вероятностную технику, связанную с осциллирующими случайными блужданиями. Этот метод был предложен в работе [5], развитием идей которой является настоящая статья.

1. Комбинаторная лемма

Последовательность действительных чисел $(z_n)_{n=0}^\infty$ назовём осциллирующей, если она удовлетворяет условиям: $z_n > 0 \Rightarrow z_{n+1} \leq z_n$, $z_n \leq 0 \Rightarrow z_{n+1} \geq z_n$ для всех неотрицательных целых n . Будем использовать обозначение $\text{sg}(z) = 1$ при $z > 0$ и $\text{sg}(z) = 0$ при $z \leq 0$, $\overline{\text{sg}}(z) = 1 - \text{sg}(z)$. Определим число z и последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty$, $(y_n)_{n=1}^\infty$ равенствами: $z = z_0$, $x_n = z_{l(n)} - z_{l(n)-1}$, $y_n = z_{h(n)-1} - z_{h(n)}$, где $l(n)$ – наименьшее натуральное число такое, что $\overline{\text{sg}}(z_0) + \dots + \overline{\text{sg}}(z_{l(n)-1}) = n$, $h(n)$ – наименьшее натуральное число такое, что $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_{h(n)-1}) = n$. Тогда равенство $\Phi((z_n)_{n=0}^\infty) = (z, (x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty)$ задаёт отображение Φ множества осциллирующих последовательностей $(z_n)_{n=0}^\infty$ в множество троек $(z, (x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty)$, где z – действительное число, $(x_n)_{n=1}^\infty$, $(y_n)_{n=1}^\infty$ – последовательности неотрицательных действительных чисел.

Обратно, пусть z – действительное число и $(x_n)_{n=1}^\infty$, $(y_n)_{n=1}^\infty$ – две последовательности неотрицательных действительных чисел. Определим последовательность $(z_n)_{n=0}^\infty$ равенствами:

$$z_0 = z, \quad z_n = z_{n-1} - \text{sg}(z_{n-1})y_{\text{sg}(z_0)+\dots+\text{sg}(z_{n-1})} + \overline{\text{sg}}(z_{n-1})x_{\overline{\text{sg}}(z_0)+\dots+\overline{\text{sg}}(z_{n-1})} \quad \text{для } n > 0. \quad (1)$$

Тогда $(z_n)_{n=0}^\infty$ – такая осциллирующая последовательность, что

$$\Phi((z_n)_{n=0}^\infty) = (z, (x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty).$$

Таким образом, отображение Φ обратимо, а значит, является биекцией.

Положим $x_0 = \max(z, 0)$, $y_0 = -\min(z, 0)$, так что $z = x_0 - y_0$. Тогда (1) равносильно равенству $z_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{\overline{\text{sg}}(z_0)+\dots+\overline{\text{sg}}(z_{n-1})} - y_0 - y_1 - \dots - y_{\text{sg}(z_0)+\dots+\text{sg}(z_{n-1})}$.

Лемма 1. Пусть $(z_n)_{n=0}^\infty$ – осциллирующая последовательность. Тогда для всех $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$ справедливы следующие утверждения.

1. $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_n) \leq k \Leftrightarrow x_0 + x_1 + \dots + x_{n-k} - y_0 - y_1 - \dots - y_k \leq 0$;
 $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_n) > k \Leftrightarrow x_0 + x_1 + \dots + x_{n-k} - y_0 - y_1 - \dots - y_k > 0$;
 $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_n) = k \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + x_1 + \dots + x_{n-k} - y_0 - y_1 - \dots - y_k \leq 0 \\ x_0 + x_1 + \dots + x_{n-k+1} - y_0 - y_1 - \dots - y_{k-1} > 0 \end{cases}.$
2. Если $a \leq 0$, то $(\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_n) = k \ \& \ z_n = a) \Leftrightarrow (x_0 + x_1 + \dots + x_{n-k} - y_0 - y_1 - \dots - y_k = a \ \& \ y_k > -a)$;
 если $a > 0$, то $(\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_n) = k \ \& \ z_n = a) \Leftrightarrow (x_0 + x_1 + \dots + x_{n-k+1} - y_0 - y_1 - \dots - y_{k-1} = a \ \& \ x_{n-k+1} \geq a).$

Доказательство. 1. Пусть $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_n) \leq k$, тогда $\overline{\text{sg}}(z_0) + \dots + \overline{\text{sg}}(z_n) \geq n - k + 1$, поэтому $l(n - k + 1) \leq n + 1$. Учитывая, что $l(n - k + 1)$ – наименьшее натуральное число, при котором $\overline{\text{sg}}(z_0) + \dots + \overline{\text{sg}}(z_{l(n-k+1)-1}) = n - k + 1$, заключаем, что $z_{l(n-k+1)-1} \leq 0$, $z + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-k} - y_1 - y_2 - \dots - y_{l(n-k+1)-1-n+k} \leq 0$. Так как $l(n - k + 1) - 1 - n + k \leq k$ и все члены последовательности $(y_n)_{n=1}^\infty$ неотрицательны, то $z + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-k} - y_1 - y_2 - \dots - y_k \leq 0$. Аналогично, если $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_n) > k$, то $h(k + 1) \leq n + 1$, поэтому $z_{h(k+1)-1} > 0$, $z + x_1 + x_2 + \dots + x_{h(k+1)-1-k} - y_1 - y_2 - \dots - y_k > 0$. Учитывая, что $h(k + 1) - 1 - k \leq n - k$ и все члены последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty$ неотрицательны, получаем: $z + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-k} - y_1 - y_2 - \dots - y_k > 0$.

2. Пусть $a \leq 0$. Если $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_n) = k \ \& \ z_n = a$, то $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_{n-1}) = k$, откуда $z_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-k} - y_0 - y_1 - \dots - y_k$, так что $x_0 + x_1 + \dots + x_{n-k} - y_0 - y_1 - \dots - y_k = a$. Если хотя бы одно из чисел $z_0, z_1, \dots, z_n$ положительно (т. е.

$k > 0$), то $z_{h(k)} - z_{h(k)-1} = y_k$, причём $z_{h(k)-1} > 0$ и $z_{h(k)} \leq a$, поэтому $y_k > -a$. Если же все $z_0, z_1, \dots, z_n$ неположительны (т. е. $k = 0$), то $z_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n - y_0 = a$, откуда $y_k > -a$. Обратно, если $x_0 + x_1 + \dots + x_{n-k} - y_0 - y_1 - \dots - y_k = a$ и $y_k > -a$, то $x_0 + x_1 + \dots + x_{n-k} - y_0 - y_1 - \dots - y_{k-1} > 0$, так что $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_n) \leq k$ и $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_{n-1}) > k - 1$. Таким образом, $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_{n-1}) = k$ и $z_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-k} - y_0 - y_1 - \dots - y_k = a$.

Второе утверждение доказывается аналогично.

2. Конструкция орграфа с весами

Пусть m и M – натуральные числа. Рассмотрим ориентированный граф $G = (V, D)$ с множеством вершин

$$V = \{-m + 1, -m + 2, \dots, M - 1, M\}$$

и множеством дуг

$$D = \{(i, j) \in V^2 \mid i > 0, j \leq i \text{ или } i \leq 0, j \geq i\}.$$

Припишем дуге (i, j) орграфа G вес $d_{i-j}v^{i-j}$, если $i > 0$, и вес $b_{j-i}u^{j-i}$, если $i \leq 0$ (веса – элементы некоторого поля). Пронумеруем вершины графа G в возрастающем порядке первыми $M + m$ натуральными числами и рассмотрим матрицу весов $A = (a_{ij})$ орграфа G . Таким образом,

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{j-i}u^{j-i} & \text{при } 1 \leq i \leq m, 0 \leq j - i \leq M; \\ d_{i-j}v^{i-j} & \text{при } m + 1 \leq i \leq M + m, 0 \leq i - j \leq m; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим вес пути в орграфе G как произведение весов дуг этого пути. Для отыскания весов путей в орграфе G известен метод трансфер-матрицы ([1], с. 354). Его суть опишем в следующей лемме.

Лемма 2. 1. Сумма весов всех путей длины n в орграфе G , ведущих из вершины i в вершину j , равна элементу $a_{ij}^{(n)}$, стоящему на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы A^n .

2. Пусть $F_{ij}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{ij}^{(n)} x^n$ – производящая функция сумм весов путей ($a_{ij}^{(0)} = 1$ при $i = j$ и $a_{ij}^{(0)} = 0$ в противном случае). Тогда $F_{ij}(x) = \frac{(-1)^{i+j} \det(E - xA)_{ji}}{\det(E - xA)}$, где $\det(E - xA)_{ji}$ – определитель матрицы, полученной из $E - xA$ вычёркиванием j -й строки и i -го столбца, E – единичная матрица. Другими словами, матрица $(F_{ij}(x))$ равна $(E - xA)^{-1}$.

Последовательность $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ элементов V является последовательностью вершин некоторого бесконечного пути в орграфе G , если и только если она является осциллирующей последовательностью. Для такой последовательности выполнены условия: $z \in V$, $x_n \in \{0, 1, \dots, M\}$, $y_n \in \{0, 1, \dots, m\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, где $(z, (x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \Phi((z_n)_{n=0}^{\infty})$. Обратно, если $z \in V$, $x_n \in \{0, 1, \dots, M\}$, $y_n \in \{0, 1, \dots, m\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то все элементы последовательности $(z_n)_{n=0}^{\infty} = \Phi^{-1}((z, (x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}))$ удовлетворяют условию $z_n \in V$.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между бесконечными путями в орграфе G и тройками $(z, (x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty})$, в которых $z \in V$, $x_n \in \{0, 1, \dots, M\}$, $y_n \in \{0, 1, \dots, m\}$ при всех $n \in \mathbf{N}$. При этом вес $w(z_0, z_1, \dots, z_n)$ любого начального отрезка $z_0, z_1, \dots, z_n$, $n > 0$, пути $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ равен $b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_{n-k}} d_{y_1} d_{y_2} \dots d_{y_k} u^{x_1+x_2+\dots+x_{n-k}} v^{y_1+y_2+\dots+y_k}$, где $k = \text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_{n-1})$.

3. Формула для произведения Адамара рациональных функций

Будем рассматривать формальные степенные ряды с коэффициентами из некоторого поля $\mathbf{F}$. Произведением Адамара степенных рядов $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ называется степенной ряд $f(x) * g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k x^k$. Хорошо известно, что произведение Адамара рациональных функций является рациональной функцией. Здесь мы получим явную формулу для произведения Адамара рациональных функций в виде отношения определителей. Отметим, что рациональная функция в ряд по неотрицательным степеням x раскладывается только если свободный член в знаменателе представляющей её несократимой дроби отличен от нуля. Делением числителя и знаменателя на этот свободный член его всегда можно сделать равным единице. Поэтому далее мы будем рассматривать только такие дроби. Отметим ещё, что $(f(x) * g(x))|_{x=1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ есть сумма произведений соответствующих коэффициентов степенных рядов $f(x)$ и $g(x)$.

Сформулируем в виде леммы свойства произведения Адамара, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 3. *Произведение Адамара обладает следующими свойствами:*

1. коммутативность: $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$;
2. линейность: $f(x) * (\sum_{i=1}^n c_i g_i(x)) = \sum_{i=1}^n c_i (f(x) * g_i(x))$, для любых $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{F}$;
3. $(x^n f(x)) * (x^n g(x)) = x^n (f(x) * g(x))$, $n \geq 0$ – целое число;
4. $f(x) * \frac{1}{1 - ax} = f(ax)$, $a \in \mathbf{F}$;

Доказательство. Все свойства проверяются прямым вычислением с использованием определения произведения Адамара.

Далее мы будем использовать обозначения $f(x, \dots) *_x g(x, \dots)$ для произведения Адамара по переменной x рядов от нескольких переменных $f(x, \dots)$ и $g(x, \dots)$, а также

$$f(x, \dots) \otimes_x g(x, \dots) = (f(x, \dots) *_x g(x, \dots))|_{x=1}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} p_1(u) &= a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_M u^M, \quad p_2(v) = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + \dots + c_{m-1} v^{m-1}, \\ q_1(u) &= b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_M u^M, \quad q_2(v) = d_1 v + d_2 v^2 + \dots + d_m v^m, \\ f(u, t) &= \frac{p_1(u)}{1 - q_1(u)t}, \quad g(v, t) = \frac{p_2(v)}{1 - q_2(v)t}. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$f(\lambda u, t) \otimes_{\lambda} g(\lambda v, t) = \frac{\det B}{\det(E - tA)},$$

где A — матрица весов орграфа G с $b_0 = d_0 = 0$, B — матрица, полученная из $E - tA$ заменой m -й строки строкой $\left(\sum_{i-j=k-m} a_i u^i c_j v^j \right)_{k=1}^{m+M}$.

Доказательство. В описанной выше модели взвешенного орграфа G положим $b_0 = 0$, $d_0 = 0$. Тогда, в силу п. 2 леммы 1, последовательность $z_0, z_1, \dots, z_n$ является путём из $z = i$ в 0 в орграфе G , удовлетворяющим условию $\text{sg}(z_0) + \dots + \text{sg}(z_{n-1}) = k$, тогда и только тогда, когда $z_0 = i$, $z_n = 0$ и $x_1 + \dots + x_{n-k} + i = y_1 + \dots + y_k$. Следовательно, при $i \leq 0$ производящая функция весов путей из i в 0 в орграфе G равна $(\delta_{i0} - \text{символ Кронекера})$

$$\begin{aligned}
 F_{i+m \ m}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \{i\} \times V^{n-1} \times \{0\}} w(z_0, z_1, \dots, z_n) t^n = \\
 &= \delta_{i0} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\text{sg}(z_1) + \dots + \text{sg}(z_{n-1}) = k} w(i, z_1, \dots, z_{n-1}, 0) t^n = \delta_{i0} + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{\substack{x_1 + \dots + x_{n-k} + i = \\ = y_1 + \dots + y_k}} b_{x_1} u^{x_1} b_{x_2} u^{x_2} \dots b_{x_{n-k}} u^{x_{n-k}} d_{y_1} v^{y_1} d_{y_2} v^{y_2} \dots d_{y_k} v^{y_k} \right) t^n = \delta_{i0} + \\
 &+ \sum_{l=-i}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{x_1 + \dots + x_{n-k} = l} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_{n-k}} u^l \right) \left(\sum_{\substack{y_1 + \dots + y_k = \\ = l+i}} d_{y_1} d_{y_2} \dots d_{y_k} v^{l+i} \right) t^n = \\
 &= \delta_{i0} + \sum_{l=-i}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\text{coef}_{\lambda^l} \left[(q_1(\lambda u))^{n-k} \right] \text{coef}_{\lambda^l} \left[\lambda^{-i} (q_2(\lambda v))^k \right] \right) t^n = \\
 &= \delta_{i0} + \sum_{l=-i}^{\infty} \text{coef}_{\lambda^l} \left[\frac{1}{1 - q_1(\lambda u)t} \right] \text{coef}_{\lambda^l} \left[\frac{\lambda^{-i}}{1 - q_2(\lambda v)t} \right] = \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \text{coef}_{\lambda^l} \left[\frac{1}{1 - q_1(\lambda u)t} \right] \text{coef}_{\lambda^l} \left[\frac{\lambda^{-i}}{1 - q_2(\lambda v)t} \right] = \frac{1}{1 - q_1(\lambda u)t} \otimes_{\lambda} \frac{\lambda^{-i}}{1 - q_2(\lambda v)t}.
 \end{aligned}$$

Аналогично, при $i > 0$

$$F_{i+m \ m}(t) = \frac{\lambda^i}{1 - q_1(\lambda u)t} \otimes_{\lambda} \frac{1}{1 - q_2(\lambda v)t}.$$

С другой стороны, $F_{i+m \ m}(t) = \frac{(-1)^i \det(E - tA)_{m \ i+m}}{\det(E - tA)}$.

Вычислим теперь $f(\lambda u, t) \otimes_{\lambda} g(\lambda v, t)$ в общем случае:

$$\begin{aligned}
 f(\lambda u, t) \otimes_{\lambda} g(\lambda v, t) &= \frac{p_1(\lambda u)}{1 - q_1(\lambda u)t} \otimes_{\lambda} \frac{p_2(\lambda v)}{1 - q_2(\lambda v)t} = \\
 &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_i u^i \lambda^i}{1 - q_1(\lambda u)t} \otimes_{\lambda} \frac{c_j v^j \lambda^j}{1 - q_2(\lambda v)t} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^M \sum_{j=i}^{m-1} \left(a_i u^i c_j v^j \lambda^i \left(\frac{1}{1 - q_1(\lambda u)t} *_{\lambda} \frac{\lambda^{j-i}}{1 - q_2(\lambda v)t} \right) \right) \Big|_{\lambda=1} + \\
&\quad + \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{i-1} \left(a_i u^i c_j v^j \lambda^j \left(\frac{\lambda^{i-j}}{1 - q_1(\lambda u)t} *_{\lambda} \frac{1}{1 - q_2(\lambda v)t} \right) \right) \Big|_{\lambda=1} \\
&= \sum_{i=0}^M \sum_{j=i}^{m-1} a_i u^i c_j v^j F_{i-j+m} \, m(t) + \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{i-1} a_i u^i c_j v^j F_{i-j+m} \, m(t) \\
&= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{m-1} a_i u^i c_j v^j F_{i-j+m} \, m(t) = \sum_{k=1}^{m+M} \left(\sum_{i-j=k-m} a_i u^i c_j v^j \right) F_{km}(t) \\
&= \sum_{k=1}^{m+M} \left(\sum_{i-j=k-m} a_i u^i c_j v^j \right) \frac{(-1)^{m+k} \det(E - tA)_{mk}}{\det(E - tA)} = \frac{\det B}{\det(E - tA)}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. В обозначениях теоремы

$$\begin{aligned}
f(x, 1) *_{\lambda} g(x, 1) &= (f(\lambda u, 1) *_{\lambda} g(\lambda v, 1)) \Big|_{\lambda=1, u=x, v=1} = \\
&= (f(\lambda u, 1) *_{\lambda} g(\lambda v, 1)) \Big|_{\lambda=1, u=1, v=x}.
\end{aligned}$$

В частности, при всех $1 \leq i \leq M$

$$\begin{aligned}
\frac{x^i}{1 - q_1(x)} *_{\lambda} \frac{1}{1 - q_2(x)} &= \frac{(-1)^i u^i \det(E - A)_{m \, i+m}}{\det(E - A)} \Big|_{u=x, v=1} = \\
&= \frac{(-1)^i u^i \det(E - A)_{m \, i+m}}{\det(E - A)} \Big|_{u=1, v=x},
\end{aligned}$$

при $0 \leq i \leq m-1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 - q_1(x)} *_{\lambda} \frac{x^i}{1 - q_2(x)} &= \frac{(-1)^i v^i \det(E - A)_{m \, m-i}}{\det(E - A)} \Big|_{u=x, v=1} = \\
&= \frac{(-1)^i v^i \det(E - A)_{m \, m-i}}{\det(E - A)} \Big|_{u=1, v=x} \quad (2)
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $f(u, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u^n$, $g(v, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n v^n$. Тогда

$$f(\lambda u, 1) *_{\lambda} g(\lambda v, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n u^n v^n \lambda^n, \quad f(\lambda u, 1) \otimes_{\lambda} g(\lambda v, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n u^n v^n,$$

$$\begin{aligned}
f(\lambda u, 1) *_{\lambda} g(\lambda v, 1) \Big|_{\lambda=1, u=x, v=1} &= f(\lambda u, 1) *_{\lambda} g(\lambda v, 1) \Big|_{\lambda=1, u=1, v=x} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n x^n = f(x, 1) * g(x, 1).
\end{aligned}$$

Отсюда и из утверждения теоремы получаем первое равенство. Два оставшихся следуют из первого равенства и равенств, полученных при доказательстве теоремы.

Доказанная теорема и её следствие дают явные формулы для произведения Адамара рациональных функций. Эти формулы удобно использовать в случае правильных рациональных дробей, т. е. дробей, у которых степень числителя меньше степени знаменателя (отметим, что формулы применимы и для неправильных дробей, поскольку нигде не предполагалось, что старшие коэффициенты числителя и знаменателя отличны от нуля). В общем случае можно выделить целую часть дроби и, в дополнение к теореме, воспользоваться линейностью произведения Адамара и формулой $x^n * \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_n x^n$. Таким образом, в качестве ещё одного следствия теоремы 1 получаем следующий известный результат.

Следствие 2. *Произведение Адамара рациональных функций является рациональной функцией.*

4. Пример вычисления произведения Адамара

Здесь мы приведём пример вычисления произведения Адамара рациональных функций, использующий формулу из теоремы 1. Полученный результат обобщает результат работы [6], в которой произведения из теоремы 2 вычислены при $n = 2$, $b = 1$, $d = 1$. Содержание препринта [7] совпадает с содержанием интересующей нас главы 1 диссертации [6]. Отметим, что результаты работ [6] и [7] являются, в свою очередь, обобщением формулы из [8]. В работах [6,7,8] используются аналитические и комбинаторные методы, отличные от рассматриваемых здесь.

Теорема 2. *Для любых целых m, n, k , $m \geq 2$, $n \geq 2$, $k < m$ справедлива формула*

$$\frac{1}{1 - ax - bx^n} *_x \frac{x^k}{1 - cx - dx^m} = \frac{\det R_n}{\det S_n},$$

где S_n — матрица порядка n вида

$$\begin{pmatrix} 1 - acx + D_1 & L_{12} & \dots & L_{1,n-2} & L_{1,n-1} & -bcx^n + L_{1,n} \\ -c + D_2 & 1 + L_{22} & \dots & L_{2,n-2} & L_{2,n-1} & L_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n-2} & L_{n-2,2} & \dots & 1 + L_{n-2,n-2} & L_{n-2,n-1} & L_{n-2,n} \\ D_{n-1} & L_{n-1,2} & \dots & -c + L_{n-1,n-2} & 1 + L_{n-1,n-1} & L_{n-1,n} \\ D_n & L_{n,2} & \dots & L_{n,n-2} & -c + L_{n,n-1} & 1 + L_{n,n} \end{pmatrix},$$

$D_i = -df_{m-i+1}x^{m-i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $L_{ij} = -bdf_{m-n-i+j}x^{m+j-i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 2, 3, \dots, n$, R_n получается из S_n заменой первой строки строкой

$$\left(f_k x^k \quad b f_{k-n+1} x^{k+1} \quad \dots \quad b f_{k-3} x^{k+n-3} \quad b f_{k-2} x^{k+n-2} \quad b f_{k-1} x^{k+n-1} \right),$$

$$f_m = f_m(a, b) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} \binom{m-(n-1)i}{i} a^{m-ni} b^i & \text{при } m \geq 0, \\ 0 & \text{при } m < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Для доказательства теоремы требуется следующая лемма.

Лемма 4. *Многочлены f_m , определяемые формулой (3), удовлетворяют рекуррентному соотношению $f_i = a f_{i-1} + b f_{i-n}$ с начальными условиями $f_0 = 1$ и $f_i = 0$ при $i < 0$.*

Доказательство. Пусть $F(x) = \frac{1}{1 - ax - bx^n}$. Тогда

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{1 - (a + bx^{n-1})x} = \sum_{j=0}^{\infty} (a + bx^{n-1})^j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} a^{j-i} b^i x^{(n-1)i} x^j = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} \binom{m - (n-1)i}{i} a^{m-ni} b^i x^m = \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m, \end{aligned}$$

т. е. многочлены f_m есть коэффициенты разложения $F(x)$ в ряд по степеням x . С другой стороны, $F(x) - axF(x) - bx^n F(x) = 1$, откуда, приравнявая коэффициенты левой и правой частей, получаем требуемое утверждение.

Доказательство теоремы. Воспользуемся следствием из теоремы 1 (формула (2) с подстановкой $u = x$, $v = 1$). Получаем: $\frac{1}{1 - ax - bx^n} * \frac{x^k}{1 - cx - dx^m} = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x) = \det Q$, $Q = (q_{ij})_{m+n}$ — такая матрица порядка $m+n$, что

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ -ax, & \text{если } 1 \leq i \leq m, j = i + 1, \\ -bx^n, & \text{если } 1 \leq i \leq m, j = i + n, \\ -d, & \text{если } m+1 \leq i \leq m+n, j = i - m, \\ -c, & \text{если } m+1 \leq i \leq m+n, j = i - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$P(x) = \det P$, $P = (p_{ij})_{m+n}$, причем P получается из Q заменой m -й строки строкой, в которой $(m-k)$ -й элемент равен единице, а все остальные элементы равны нулю.

Умножим матрицу Q слева на матрицу $Q' = (q'_{ij})_{m+n}$, где

$$q'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leq n \text{ и } j - i = m, \text{ либо } i \geq n+1 \text{ и } i - j = n, \\ df_{j-i} x^{j-i}, & \text{если } i \leq n, i \leq j \leq m, j - i \leq m-2, \\ df_{j-i} x^{j-i} + c, & \text{если } i = 1, j = m, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Воспользовавшись леммой 4, получаем:

$$Q'Q = \begin{pmatrix} O & S_n \\ T_m & H \end{pmatrix},$$

где H — матрица размера $m \times n$, T_m — верхняя треугольная матрица порядка m , элементы главной диагонали которой равны 1, O — нулевая матрица размера $n \times m$, S_n — матрица, указанная в формулировке теоремы. Вычисляя определитель по теореме Лапласа, получаем: $\det(Q'Q) = (-1)^{mn} \det S_n$. Меняя местами первые n и последние m строк матрицы Q' , получим нижнюю треугольную матрицу, элементы главной диагонали которой равны 1, так что $\det Q' = (-1)^{mn}$. Следовательно, $\det Q = \det S_n$.

Аналогично, умножим матрицу P слева на матрицу $P' = (p'_{ij})_{m+n}$, которая отличается от Q' только $(m+n)$ -й строкой и m -м столбцом: $p'_{m+n, j} = f_{j+k-m} x^{j+k-m}$ при $m-k \leq j \leq m-1$, $p'_{m+n, m} = -1$, $p'_{m+n, j} = 0$ при остальных значениях j ; $p'_{im} = 0$

при $i \neq m + n$. Применяя лемму 4, переставляя $(m + n)$ -ю строку и $(m + n)$ -й столбец на первые места и заменяя элементы первой строки на противоположные, из матрицы $P'P$ получаем матрицу вида

$$\begin{pmatrix} O & R_n \\ T'_m & H' \end{pmatrix},$$

где H' — матрица размера $m \times n$, T'_m — верхняя треугольная матрица порядка m , элементы главной диагонали которой равны 1, O — нулевая матрица размера $n \times m$, R_n — матрица, указанная в формулировке теоремы. Следовательно, $\det P = (-1)^{mn-1} \det P'P = \det R_n$.

Теорема доказана.

Выпишем полученный результат в явном виде для случая $n = 3$. Получим: для любого целого $m \geq 2$ и любого целого $k < m$ справедлива формула:

$$\frac{1}{1 - ax - bx^3} * \frac{x^k}{1 - cx - dx^m} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где

$$\begin{aligned} P(x) &= b^2 d^2 (f_{m-1} f_{m-3} f_{k-2} - f_{m-1} f_{m-4} f_{k-1} - f_{m-2}^2 f_{k-2} + f_{m-2} f_{m-3} f_{k-1} + f_{m-2} f_{m-4} f_k \\ &\quad - f_{m-3}^2 f_k) x^{2m+k} - bcd (f_{m-1} f_{k-1} - f_{m-2} f_k - b f_{m-3} f_{k-2} + b f_{m-4} f_{k-1}) x^{m+k+1} \\ &\quad - bd (f_{m-1} f_{k-2} + f_{m-2} f_{k-1} - 2 f_{m-3} f_k) x^{m+k} - bc^2 f_{k-1} x^{k+2} - bcf_{k-2} x^{k+1} - f_k x^k, \\ Q(x) &= b^m d^3 x^{3m} - bcd^2 (f_m f_{m-2} - f_{m-1}^2 - 2b f_{m-1} f_{m-4} + 2b f_{m-2} f_{m-3} + ab f_{m-2} f_{m-4} \\ &\quad - ab f_{m-3}^2) x^{2m+1} - bd^2 (2f_m f_{m-3} - 2f_{m-1} f_{m-2} - b f_{m-2} f_{m-4} + b f_{m-3}^2) x^{2m} \\ &\quad + bc^2 d (2f_{m-1} - a f_{m-2} + b f_{m-4}) x^{m+2} + bcd (3f_{m-2} - 2a f_{m-3}) x^{m+1} \\ &\quad + d (f_m + 2b f_{m-3}) x^m + bc^3 x^3 + acx - 1. \end{aligned}$$

Для произведений вида $f_m f_{m-r}$, $0 \leq r \leq 3$, можно получить формулы, аналогичные (3). Именно, $f_m f_{m-r}$ есть коэффициент при x^m в произведении Адамара $\frac{1}{1 - ax - bx^3} * \frac{x^r}{1 - ax - bx^3}$. Это произведение вычисляем с помощью теоремы 1. Например,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - ax - bx^3} * \frac{1}{1 - ax - bx^3} &= \frac{1 - abx^2 - b^2 x^3}{(1 + abx^2 - b^2 x^3)(1 - a^2 x - 2abx^2 - b^2 x^3)} = \\ &= \frac{9b + 4a^3 + 10a^2 bx + 6ab^2 x^2}{(4a^3 + 27b)(1 - x(a + bx)^2)} + \frac{18b + 8a^2 bx - 6ab^2 x^2}{(4a^3 + 27b)(1 + abx^2 - b^2 x^3)}. \end{aligned}$$

Раскладывая две последние дроби в ряд по степеням x как в лемме 3, получаем выражение для f_m^2 . Окончательный результат для $r = 0, 1, 2, 3$ выглядит так:

$$\begin{aligned} f_m f_{m-r} &= \frac{1}{(4a^3 + 27b)} \sum_{s=0}^3 \left(\sum_{i=0}^m \alpha_{rs} \binom{2(m-i-s)}{i} a^i b^{2m-3i-2s} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=0}^m \beta_{rs} \binom{j}{m-2j-s} (-a)^{m-2j-s} b^{4j-m+s} \right), \end{aligned}$$

где биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ считаем равным нулю во всех случаях, кроме $0 \leq k \leq n$, а значения α_{rs} , β_{rs} приведены ниже:

$$(\alpha_{rs}) = \begin{pmatrix} 9b + 4a^3 & 10a^2b & 6ab^2 & 0 \\ 4a^2 & 15ab & 9b^2 & 0 \\ 6a & -2a^3 + 9b & -2a^2b & 0 \\ -9 & 5a^2 & 3ab & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\beta_{rs}) = \begin{pmatrix} 18b & 8a^2b & -6ab^2 & 0 \\ -4a^2 & 12ab & -9b^2 & 0 \\ -6a & -4a^3 - 9b & 2a^2b & 0 \\ 9 & 4a^2 & 24ab + 4a^4 & -4a^3b - 27b^2 \end{pmatrix}.$$

5. Матричная формула для произведения Адамара

Понятие произведения Адамара естественным образом обобщается на случай матричных степенных рядов. Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ – формальный степенной ряд с коэффициентами из некоторого поля $\mathbf{F}$ и $G(x) = (g_{ij}(x))_{i,j=1}^m$ – квадратная матрица порядка m , элементы которой $g_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(ij)} x^k$ – формальные степенные ряды над $\mathbf{F}$.

Определение 1. Произведением Адамара ряда $f(x)$ на матрицу $G(x)$ называется матрица $f(x) * G(x) = (f(x) * g_{ij}(x))_{i,j=1}^m$.

Наряду с матрицами, элементы которых – степенные ряды над $\mathbf{F}$, будем рассматривать формальные степенные ряды с матричными коэффициентами. Такой ряд имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k$, где $(B_k)_{k=0}^{\infty}$ – последовательность квадратных матриц над $\mathbf{F}$ одного и того же порядка m . Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k$ мы будем отождествлять с матрицей $G(x) = (g_{ij}(x))_{i,j=1}^m$, где $g_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(ij)} x^k$ и $B_k = (b_k^{(ij)})_{i,j=1}^m$, $k = 0, 1, \dots$

Ясно, что при этом $f(x) * G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k B_k x^k$.

Хорошо известно следующее тождество:

$$(E - xB)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k x^k, \quad (4)$$

где E – единичная матрица порядка m .

Теорема 3. Справедливо равенство $f(x) * (E - xB)^{-1} = f(xB)$.

Доказательство. Используя принятые выше обозначения, получаем:

$$f(x) * (E - xB)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) * \left(\sum_{k=0}^{\infty} B^k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k x^k = f(xB).$$

Теорема доказана.

Утверждение теоремы 3 является обобщением на матричный случай свойства 4 из леммы 3. Теорему 3 можно применять для вычисления произведений Адамара степенных рядов с коэффициентами из $\mathbf{F}$ в случае, когда один из рядов соответствует рациональной функции.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ и $g(x) = \frac{c_0 + c_1x + \dots + c_{m-1}x^{m-1}}{1 - d_1x - d_2x^2 - \dots - d_mx^m}$ – степенные ряды с коэффициентами из $\mathbf{F}$ и

$$C = (c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{m-1}), \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_{m-1} & d_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x) * g(x)$ равно первому элементу матрицы-строки $Cf(xD)$.

Доказательство. Первый столбец матрицы $(E - xD)^{-1}$ равен

$$\frac{1}{1 - d_1x - d_2x^2 - \dots - d_mx^m} (1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^{m-1})^T,$$

где T обозначает транспонирование. Следовательно, первый столбец матрицы $f(x) * (E - xD)^{-1} = f(xD)$ состоит из элементов вида $f(x) * \frac{x^k}{1 - d_1x - d_2x^2 - \dots - d_mx^m}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, а первый элемент матрицы $Cf(xD)$, в силу линейности произведения Адамара, равен $f(x) * g(x)$.

Теорема доказана.

Пример 1. Вычислим произведения Адамара $\frac{1}{1 - ax - bx^2} * \frac{x^k}{1 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3}$, при $k \in 1, 2, 3$, $a, b, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{F}$. По теореме 4 требуемые произведения есть элементы первого столбца матрицы $(1 - axB - bx^2B^2)^{-1}$, где

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Производя вычисления, получаем:

$$\frac{1}{1 - ax - bx^2} * \frac{x^k}{1 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3} = \frac{P_k(x)}{Q(x)},$$

где

$$Q(x) = 1 - a\alpha x - (\beta a^2 + b\alpha^2 + 2b\beta) x^2 - (a^3\gamma + 3ab\gamma + ab\alpha\beta) x^3 \\ + (b^2\beta^2 - \alpha\gamma a^2b - 2\alpha\gamma b^2) x^4 + ab^2\beta\gamma x^5 - b^3\gamma^2 x^6$$

$$P_0(x) = 1 - b\beta x^2 - ab\gamma x^3, \quad P_1(x) = ax + \alpha bx^2 + \gamma b^2 x^4, \quad P_2(x) = (a^2 + b) x^2 + ab\alpha x^3 - b^2\beta x^4.$$

Определение 2. Степенной ряд $f(x)$ называется *рациональным*, если он представляет рациональную функцию. Степенной ряд $f(x)$ называется *алгебраическим*, если существуют такие полиномы $P_i(u, u_1, \dots, u_m)$, $i = 1, 2, \dots, r$, с коэффициентами из основного поля $\mathbf{F}$, хотя бы один из которых имеет ненулевую степень по u , и степенные ряды $f_1(x), \dots, f_m(x)$, что $f(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$ удовлетворяют системе уравнений $P_i(f(x), f_1(x), \dots, f_m(x)) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.

В качестве следствия теоремы 4 получим известное утверждение о том, что произведение Адамара рационального и алгебраического степенных рядов есть алгебраический степенной ряд (см. [2], с. 55).

Следствие 3. Произведение Адамара алгебраического степенного ряда $f(x)$ и рационального степенного ряда $g(x)$ есть алгебраический степенной ряд.

Доказательство. Так как произведение степенного ряда и одночлена есть одночлен или нуль, то достаточно рассмотреть случай, когда $g(x)$ представим правильной дробью. Сохраняя принятые в теореме 4 и определении 2 обозначения, получаем, что $f(xB)$ удовлетворяет системе уравнений $P_i(f(xB), f_1(xB), \dots, f_m(xB)) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$. Переходя от матричной формы записи к скалярной, получаем систему полиномиальных уравнений, которой удовлетворяют элементы матрицы $f(xB)$. Поскольку линейная комбинация алгебраических степенных рядов есть алгебраический степенной ряд, получаем, что ряд $f(x) * g(x)$ алгебраический.

Следующий пример иллюстрирует описанный в доказательстве следствия метод вычисления произведения Адамара.

Пример 2. Пусть $f(x)$ удовлетворяет уравнению $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$ (т. е. $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$) и $g(x) = \frac{1}{1-ax-bx^2}$. Тогда $f(x) * g(x)$ – элемент на пересечении первой строки и первого столбца матрицы $f(xB)$, где $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Пусть $f(xB) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{pmatrix}$, тогда матричное уравнение $xBf^2(xB) - f(xB) + E = 0$ равносильно системе скалярных уравнений (аргумент x для краткости опускаем)

$$\begin{aligned} ax(f_{11}^2 + f_{12}f_{21}) + bx(f_{11}f_{21} + f_{21}f_{22}) - f_{11} + 1 &= 0, \\ bx(f_{22}^2 + f_{12}f_{21}) + ax(f_{11}f_{12} + f_{12}f_{22}) - f_{12} &= 0, \\ x(f_{11}^2 + f_{12}f_{21}) - f_{21} &= 0, \\ x(f_{11}f_{12} + f_{12}f_{22}) - f_{22} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Исключая f_{12} и f_{21} , приходим к системе

$$f_{11}^2 (bx^2 (f_{11} + f_{22})^2 + ax (f_{11} + f_{22}) - 1) + 1 = 0,$$

$$(f_{11} + 1)(f_{22} - 1)(bx^2 (f_{11} + f_{22})^2 + ax (f_{11} + f_{22}) - 1) + bx^2 (f_{11} + f_{22})^2 = 0.$$

Отсюда $-(f_{11} + 1)(f_{22} - 1) + f_{11}^2(1 - ax(f_{11} + f_{22})) - 1 = 0$, и, выражая f_{22} и подставляя в первое уравнение, получаем, что f_{11} удовлетворяет уравнению $(a^2 + 4b)x^2 f_{11}^4 + (2ax - 1)f_{11}^2 + 1 = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} * \frac{1}{1 - ax - bx^2} &= \sqrt{\frac{1 - 2ax - \sqrt{1 - 4ax - 16bx^2}}{2(a^2 + 4b)x^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - 2(a - \sqrt{a^2 + 4b})x} - \sqrt{1 - 2(a + \sqrt{a^2 + 4b})x}}{2x\sqrt{a^2 + 4b}}. \end{aligned}$$

В частности, при $a = b = 1$ получаем производящую функцию для произведений чисел Каталана C_k и чисел Фибоначчи F_k :

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k F_k x^k = \sqrt{\frac{1 - 2x - \sqrt{1 - 4x - 16x^2}}{10x^2}} = \frac{\sqrt{1 - 2(1 - \sqrt{5})x} - \sqrt{1 - 2(1 + \sqrt{5})x}}{2x\sqrt{5}}.$$

Теорема 5. Пусть

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}}{1 - b_1x - b_2x^2 - \dots - b_nx^n}, \quad g(x) = \frac{c_0 + c_1x + \dots + c_{m-1}x^{m-1}}{1 - d_1x - d_2x^2 - \dots - d_mx^m}$$

и

$$\frac{1}{1 - d_1x - d_2x^2 - \dots - d_mx^m} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k. \quad (5)$$

Тогда $f(x) * g(x) = \frac{\det R}{\det(E - S)}$, где $S = \left(\sum_{k=1}^n b_k d_{ij}^{(k)} x^k \right)_{i,j=1}^m$, E – единичная матрица порядка m ,

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} -\sum_{0 \leq l \leq j-1} d_l f_{k-l-i+j}, & \text{если } i \geq j; \\ \sum_{j \leq l \leq m-j} d_l f_{k-l-i}, & \text{если } i < j; \end{cases} \quad (6)$$

(полагаем $d_0 = -1$ и считаем $f_n = 0$ при $n < 0$), и матрица R получается из $E - S$ заменой первой строки строкой $\left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} c_{i-1} a_k d_{ij}^{(k)} x^k \right)_{j=1}^m$.

Доказательство. Для вычисления $f(x) * g(x)$ воспользуемся теоремой 4. Пусть D – матрица из формулировки теоремы 4. Непосредственным перемножением матриц убеждаемся, что $(E - xD)^{-1} = \frac{1}{1 - d_1x - d_2x^2 - \dots - d_mx^m} H(x)$, где $H(x) = (h_{ij}(x))_{i,j=1}^m$,

$$h_{ij}(x) = \begin{cases} (1 - d_1x - \dots - d_{j-1}x^{j-1}) x^{i-j}, & \text{если } i \geq j; \\ (d_j + d_{j+1}x + \dots + d_mx^{m-j}) x^i, & \text{если } i < j. \end{cases}$$

Учитывая разложение (5), можем записать:

$$\frac{h_{ij}(x)}{1 - d_1x - d_2x^2 - \dots - d_mx^m} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\sum_{0 \leq l \leq j-1} d_l f_{k-l-i+j} \right) x^k, & \text{если } i \geq j; \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j \leq l \leq m-j} d_l f_{k-l-i} \right) x^k, & \text{если } i < j. \end{cases}$$

Учитывая (4), получаем: $D^k = \left(d_{ij}^{(k)} \right)_{i,j=1}^m$, где $d_{ij}^{(k)}$ задаются формулой (6). Таким образом, $f(xD) = (a_0 + a_1xD + \dots + a_{n-1}x^{n-1}D^{n-1})(E - S)^{-1}$, так что первый элемент матрицы $Cf(xD)$ (C – из формулировки теоремы 4) есть сумма произведений алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы $E - S$ на элементы строки

$$C(a_0 + a_1xD + \dots + a_{n-1}x^{n-1}D^{n-1}),$$

т. е. равна $\det R$.

Теорема доказана.

Как следствие теоремы 5 получаем утверждение теоремы 2. Отметим, что теорему 5 можно доказать тем же методом, что и теорему 2, выбрав в доказательстве теоремы 2 матрицы Q' и P' подходящим образом.

6. Произведение Адамара и произведение Кронекера

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ и $B = (b_{kl})_{k,l=1}^n$ – две квадратные матрицы порядков m и n соответственно.

Определение 3. Произведением Кронекера матриц A и B называется матрица $A \otimes B = (c_{pq})_{p,q=1}^{mn}$ порядка mn такая, что $c_{n(i-1)+k, n(j-1)+l} = a_{ij}b_{kl}$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, $k, l = 1, 2, \dots, n$.

Пусть теперь $F(x) = (f_{ij}(x))_{i,j=1}^m$ и $G(x) = (g_{kl}(x))_{k,l=1}^n$ – две матрицы, элементы которых – формальные степенные ряды по степеням x .

Определение 4. Произведением Кронекера-Адамара матриц $F(x)$ и $G(x)$ называем матрицу $F(x) \boxtimes G(x) = (h_{pq}(x))_{p,q=1}^{mn}$, элементы которой есть произведения Адамара элементов матриц $F(x)$ и $G(x)$: $h_{n(i-1)+k, n(j-1)+l}(x) = f_{ij}(x) * g_{kl}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, $k, l = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 6. Справедливо равенство

$$(E_m - xA)^{-1} \boxtimes (E_n - xB)^{-1} = (E_{mn} - xA \otimes B)^{-1},$$

где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ и $B = (b_{kl})_{k,l=1}^n$ – две квадратные матрицы порядков m и n , E_m , E_n , и E_{mn} – единичные матрицы порядков m , n и mn соответственно.

Доказательство. Для доказательства используем метод трансфер-матрицы. Пусть K_m и K_n – полные орграфы с весами на m и n вершинах, матрицы весов дуг которых есть A и B соответственно. Рассмотрим прямое произведение орграфов K_m и K_n – полный орграф $K_m \times K_n$, вершинами которого являются всевозможные упорядоченные пары (i, k) , в которых i – вершина орграфа K_m , k – вершина орграфа K_n , а матрица весов дуг $K_m \times K_n$ есть $A \otimes B$. Пусть $(E_m - xA)^{-1} = (f_{ij}(x))_{i,j=1}^m$, $(E_n - xB)^{-1} = (g_{kl}(x))_{k,l=1}^n$, $(E_{mn} - xA \otimes B)^{-1} = (h_{pq}(x))_{p,q=1}^{mn}$. Используя лемму 2 и определение произведения Адамара степенных рядов, получаем: $f_{ij}(x) * g_{kl}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{ij}^{(r)} b_{kl}^{(r)} x^r$, где $a_{ij}^{(r)}$ и $b_{kl}^{(r)}$ есть суммы весов путей длины r из i в j в орграфе K_m и из k в l в орграфе K_n . С другой стороны, коэффициент при x^r в $h_{n(i-1)+k, n(j-1)+l}(x)$ есть сумма весов путей длины r из вершины (i, j) в вершину (k, l) в орграфе $K_m \times K_n$. Но между такими путями и упорядоченными парами путей длины r из i в j в K_m и из k в l в K_n существует взаимно однозначное соответствие: пути $((u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_r, v_r))$, где $u_1 = i$, $v_1 = j$, $u_r = k$, $v_r = l$, в $K_m \times K_n$ соответствует пара $((u_1, u_2, \dots, u_r), (v_1, v_2, \dots, v_r))$, причём вес этого пути равен произведению весов $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ и $(v_1, v_2, \dots, v_r)$. Отсюда следует, что сумма весов путей длины r из вершины (i, j) в вершину (k, l) в орграфе $K_m \times K_n$ равна $a_{ij}^{(r)} b_{kl}^{(r)}$, так что $f_{ij}(x) * g_{kl}(x) = h_{n(i-1)+k, n(j-1)+l}(x)$.

Теорема доказана.

7. Некоторые вероятностные свойства произведения Адамара

Здесь мы рассмотрим, как вероятности некоторых событий, а также условные распределения на множестве решений линейного неравенства между целочисленными случайными величинами, могут быть выражены через произведения Адамара.

Лемма 5. Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = k) x^k$ и $g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y = k) y^k$ — производящие функции независимых неотрицательных целочисленных случайных величин X и Y . Тогда

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \mathbf{P}(X = n, Y = k) x^n y^k = \frac{f(xy)}{1-y} *_y g(y);$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \mathbf{P}(X = n, Y = k) x^n y^k = \frac{yf(xy)}{1-y} *_y g(y);$
3. $\mathbf{P}(X \leq Y) = \frac{f(y)}{1-y} \circledast_y g(y);$
4. $\mathbf{P}(X < Y) = \frac{yf(y)}{1-y} \circledast_y g(y);$
5. $\mathbf{P}(X = Y) = (f(y) \circledast_y g(y));$
6. $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y - X = k) x^k = \frac{f(y)}{1-xy} \circledast_y g(y);$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(Y - X = k) x^k = \frac{xyf(y)}{1-xy} \circledast_y g(y);$
8. $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y = k, X \leq Y) y^k = \frac{f(y)}{1-y} *_y g(y);$
9. $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y = k, X < Y) y^k = \frac{yf(y)}{1-y} *_y g(y);$
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = n, X \leq Y) x^n = \frac{f(xy)}{1-y} \circledast_y g(y);$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = n, X < Y) x^n = \frac{yf(xy)}{1-y} \circledast_y g(y).$

Доказательство. 1. Утверждение следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \frac{f(xy)}{1-y} *_y g(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = k) x^k y^k \sum_{l=0}^{\infty} y^l \right) *_y \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y = n) y^n \right) = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \mathbf{P}(X = n) x^n y^k \right) *_y \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y = k) y^k \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \mathbf{P}(X = n) \mathbf{P}(Y = k) x^n y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \mathbf{P}(X = n, Y = k) x^n y^k. \end{aligned}$$

2. Доказывается аналогично 1.

3. Утверждение следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \mathbf{P}(X = n) \mathbf{P}(Y = k) = \\ &= \left(\frac{f(xy)}{1-y} *_y g(y) \right) \Big|_{x=1, y=1} = \frac{f(y)}{1-y} \circledast_y g(y). \end{aligned}$$

4. Доказывается аналогично 3.

5. Следует из определения произведения Адамара.

6. Утверждение следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y - X = k) x^k &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^l \mathbf{P}(X = n) \mathbf{P}(Y = l) x^{l-n} = \\
 &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^l \mathbf{P}(X = n) \mathbf{P}(Y = l) x^n y^l \right) \Big|_{x=1/x, y=x} = \\
 &= \left(\frac{f(xy)}{1-y} *_y g(y) \right) \Big|_{x=1/x, y=x} = \\
 &= \left(\frac{f(y/x)}{1-y} *_y g(y) \right) \Big|_{y=x} = \left(\frac{f(y)}{1-xy} *_y g(y) \right) \Big|_{y=1} = \frac{f(y)}{1-xy} \circledast_y g(y),
 \end{aligned}$$

где на предпоследнем шаге мы воспользовались очевидным свойством произведения Адамара: $\varphi(y) *_y \psi(y)|_{y=a} = \varphi(ay) *_y \psi(y)|_{y=1}$, если a не зависит от y .

7. Доказывается аналогично 6.

8. Утверждение следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y = k, X \leq Y) y^k &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \mathbf{P}(X = n) \mathbf{P}(Y = k) x^n y^k \right) \Big|_{x=1} = \\
 &= \left(\frac{f(xy)}{1-y} *_y g(y) \right) \Big|_{x=1} = \frac{f(y)}{1-y} *_y g(y).
 \end{aligned}$$

9, 10, 11. Доказываются аналогично 8.

8. Осциллирующее случайное блуждание

Пусть на одном вероятностном пространстве определены случайная величина Z и две последовательности неотрицательных случайных величин $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Определение 5. Осциллирующим случайным блужданием, построенным по тройке $(Z, (X_n)_{n=1}^{\infty}, (Y_n)_{n=1}^{\infty})$, называется последовательность случайных величин $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$, определённая равенствами: $Z_0 = Z$,

$$Z_n = Z_{n-1} - \text{sg}(Z_{n-1})Y_{\text{sg}(Z_0)+\dots+\text{sg}(Z_{n-1})} + \overline{\text{sg}}(Z_{n-1})X_{\overline{\text{sg}}(Z_0)+\dots+\overline{\text{sg}}(Z_{n-1})} \text{ для } n > 0.$$

В силу определения любая траектория осциллирующего случайного блуждания является осциллирующей последовательностью действительных чисел. Поэтому для $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ справедливы утверждения леммы 1, если вместо последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ взять $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$.

Будем далее считать, что все случайные величины Z , X_n , Y_n целочисленны и случайные величины каждой из последовательностей $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ независимы и одинаково распределены, а $Z = 0$ с вероятностью 1. В общем случае можно записать формулы, аналогичные приведённым ниже, но более громоздкие.

Пусть $\nu_n = \text{sg}(Z_0) + \dots + \text{sg}(Z_n)$ – время, проведённое осциллирующим случайным блужданием $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ на положительной полуоси с момента времени 0 до момента n . Рассмотрим производящие функции

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 = k) t^k, \quad g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y_1 = k) t^k,$$

$$\zeta_{n,k}^+(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu_n = k, Z_n = i) t^i, \quad \zeta_{n,k}^-(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(\nu_n = k, Z_n = -i) t^i,$$

$$H^+(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu_n = k, Z_n = i) x^{n-k+1} y^k t^i,$$

$$H^-(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(\nu_n = k, Z_n = -i) x^{n-k+1} y^k t^i,$$

$$N_{\leq}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\nu_n \leq k) x^{n-k+1} y^k, \quad N_=(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\nu_n = k) x^{n-k+1} y^k.$$

Теорема 7. Пусть $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ – независимые последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин и $Z = 0$ с вероятностью 1. Тогда

$$1. \zeta_{n,k}^+(t) = \left(\frac{f^{n-k}(u)}{1-uv} \otimes_u \frac{tvg^{k-1}(u)}{1-tv} \right) \otimes_v f(v), \quad (n > 0, 1 \leq k \leq n);$$

$$\zeta_{n,n+1}^+(t) = 0, \quad \zeta_{n,0}^+(t) = 0, \quad (n \geq 0);$$

$$\zeta_{n,k}^-(t) = \left(\frac{f^{n-k}(u)}{1-tv} \otimes_u \frac{uv g^{k-1}(u)}{1-uv} \right) \otimes_v g(v), \quad (n > 0, 1 \leq k \leq n);$$

$$\zeta_{n,0}^-(t) = f^n(0), \quad \zeta_{n,n+1}^-(t) = 0, \quad (n \geq 0);$$

$$2. H^+(x, y, t) = \left(\frac{x}{(1-uv)(1-xf(u))} \otimes_u \frac{tvy}{(1-tv)(1-yg(u))} \right) \otimes_v f(v),$$

$$H^-(x, y, t) = \left(\frac{x}{(1-tv)(1-xf(u))} \otimes_u \frac{uvy}{(1-uv)(1-yg(u))} \right) \otimes_v g(v) + \frac{x}{1-xf(0)};$$

$$3. N_{\leq}(x, y) = \frac{x}{(1-t)(1-xf(t))} \otimes_t \frac{1}{1-yg(t)};$$

$$4. N_=(x, y) = \frac{x(1-yf(t))}{(1-t)(1-xf(t))} \otimes_t \frac{1}{1-yg(t)}.$$

Доказательство. Введём обозначение $W_{i,j} = X_0 + \dots + X_i - Y_0 - \dots - Y_j$, где полагаем $X_0 = 0, Y_0 = 0$ с вероятностью 1.

1. Используя п. 2 леммы 1 и пп. 6 и 7 леммы 5, получаем $(n > 0, 1 \leq k \leq n)$:

$$\begin{aligned} \zeta_{n,k}^+(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(W_{n-k,k-1} \leq 0, W_{n-k,k-1} + X_{n-k+1} = i) t^i = \\ &= \left(\frac{tv}{1-tv} \left(\frac{f^{n-k}(u)}{1-uv} \otimes_u g^{k-1}(u) \right) \right) \otimes_v f(v). \end{aligned}$$

Два других равенства для $\zeta_{n,k}^+(t)$ очевидны. Утверждение для $\zeta_{n,k}^-(t)$ доказывается аналогично.

2. Утверждение следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} H^+(x, y, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \zeta_{n,k}^+(t) x^{n-k+1} y^k = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{tv}{1-tv} \left(\frac{f^{n-k}(u)}{1-uv} \otimes_u g^{k-1}(u) \right) \right) \otimes_v f(v) x^{n-k+1} y^k = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{tv}{1-tv} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^i(u)}{1-uv} x^{i+1} \otimes_u \sum_{j=0}^{\infty} g^j(u) y^{j+1} \right) \right) \otimes_v f(v) = \\
&= \left(\frac{x}{(1-uv)(1-xf(u))} \otimes_u \frac{tvy}{(1-tv)(1-yg(u))} \right) \otimes_v f(v).
\end{aligned}$$

Вычисления для $H^-(x, y, t)$ аналогичны.

3. Согласно п. 1 леммы 1 получаем:

$$\begin{aligned}
N_{\leq}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(W_{n-k,k} \leq 0) x^{n-k+1} y^k = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{n-k}(t)}{1-t} \otimes_t g^k(t) x^{n-k+1} y^k = \frac{x}{(1-t)(1-xf(t))} \otimes_t \frac{1}{1-yg(t)}.
\end{aligned}$$

4. Утверждение следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned}
N_{=}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\nu_n = k) x^{n-k+1} y^k = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\nu_n \leq 0) x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n (\mathbf{P}(\nu_n \leq k) - \mathbf{P}(\nu_n \leq k-1)) x^{n-k+1} y^k = \\
&= N_{\leq}(x, 0) + (N_{\leq}(x, y) - N_{\leq}(x, 0)) - \frac{y}{x} \left(N_{\leq}(x, y) - x \left(\frac{N_{\leq}(x, y)}{x} \Big|_{x=0} \right) \right) = \\
&= \frac{x(1-yf(t))}{(1-t)(1-xf(t))} \otimes_t \frac{1}{1-yg(t)}.
\end{aligned}$$

Пример 3. Пусть $f(t) = \frac{p_1}{1-q_1 t}$, $g(t) = \frac{p_2}{1-q_2 t}$, где $p_1 > 0$, $q_1 > 0$, $p_1 + q_1 = 1$, $p_2 > 0$, $q_2 > 0$, $p_2 + q_2 = 1$, т. е. случайные величины X_1 , Y_1 имеют геометрическое распределение, каждая со своим параметром. Тогда для осциллирующего случайного блуждания с $Z = 0$ получаем:

$$\begin{aligned}
H^+(x, y, t) &= \frac{q_1 x y (1 - q_1 q_2 - p_1 x)}{(1 - p_1 x) ((1 - p_1 x)(1 - p_2 y) - q_1 q_2)} \cdot \frac{p_1 t}{1 - q_1 t}, \\
H^-(x, y, t) &= \frac{x}{1 - p_1 x} + \frac{q_1 q_2 p_1 x^2 y}{(1 - p_1 x) ((1 - p_1 x)(1 - p_2 y) - q_1 q_2)} \cdot \frac{p_2}{1 - q_2 t}, \\
N_{=}(x, y) &= \frac{x}{1 - p_1 x} + \frac{q_1 x y (1 - q_1 q_2 - p_1 x) + q_1 q_2 p_1 x^2 y}{(1 - p_1 x) ((1 - p_1 x)(1 - p_2 y) - q_1 q_2)}, \\
N_{=}(x, y) &= \frac{q_1 x^2 (1 - q_1 q_2 - p_1 x)}{(1 - x) (1 - p_1 x) ((1 - p_1 x)(1 - p_2 y) - q_1 q_2)} + \frac{x}{(1 - x) (1 - y)}.
\end{aligned}$$

Список литературы

1. Стэнли Р., *Перечислительная комбинаторика: Пер. с англ.* Мир, Москва, 1990.
2. Ландо С. К., *Лекции о производящих функциях*. МЦНМО, Москва, 2007.
3. Stanley R. P., Differentiably finite power series. *Europ. J. Comb.* (1980) **1**, 175–178.
4. Han Guo-Niu, A General Algorithm for the MacMahon Omega Operator. *Ann. Comb.* (2003) **7**, №4, 467–480.
5. Толовиков М. И., Случайные блуждания и произведение Адамара степенных рядов. *Обозр. прикл. и промышл. матем.* (2011) **18**, №3, 505–506.
6. Kim J. H., *Hadamard products, lattice paths, and skew tableaux*, PhD thesis, Brandeis Univ. Dep. Math.. ProQuest, UMI Diss. Publ., 2012.
7. Kim J. H., Hadamard Products and Tilings. *J. Integer Sequences* (2009) **12**, Article 09.7.4.
8. Shapiro L., A combinatorial proof of a Chebyshev polynomial identity. *Discrete Math.* (1981) **34**, 203–206.

Статья поступила 29.11.2012.