Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степанов, Новый класс нелинейных пятеричных ко-
дов, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 4, 7–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 08:53:03

Новый класс нелинейных пятеричных кодов

© 2005 г. С. А. Степанов

В статье построены два новых класса нелинейных пятеричных кодов, получаемых из соответствующих классов модифицированных матриц Батсона–Адамара. Эти коды имеют минимальное расстояние, близкое к границе Плоткина, а также простые процедуры построения и декодирования.

Работа выполнена при поддержке Института экспертизы информационных технологий, Южная Корея.

1. Введение

Многие преобразователи дискретных сигналов основаны на использовании преобразований матриц с элементами, принимающими значения на единичной окружности в комплексной плоскости, например, семейство обобщенных дискретных преобразователей сигналов длины $n = 2^m$ (см. раздел 10.2 в [4]). Это семейство включает в себя преобразование Уолша–Адамара и 2^m -точечное дискретное преобразование Фурье. Интерпретация быстрого Куули–Турки преобразования Фурье в терминах характеров абелевой группы (см., например, [6]) показывает, что дискретное преобразование Фурье само является обобщенным преобразованием, включающим преобразование Уолша–Адамара.

Все матрицы упоминаемых выше преобразований содержатся в классе матриц Батсона–Адамара [3], являющемся в свою очередь подклассом коциклических обобщенных матриц Адамара. Обобщенные матрицы Адамара и коциклические обобщенные матрицы Адамара использовались различными авторами (см. [1, 2, 5, 6]) для построения соответствующих кодов Адамара и коциклических кодов Адамара.

В этой работе мы вводим два новых класса $\{H_m\}$, $\{\tilde{H}_m\}$ модифицированных матриц Батсона–Адамара H_m , $\tilde{H}_m$ с элементами из $C = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5\}$, где ω — примитивный комплексный корень пятой степени из единицы, и строим два класса $\{C_m^*\}$, $\{\tilde{C}_m^*\}$ нелинейных пятеричных кодов C_m^* , $\tilde{C}_m^*$, получаемых соответственно из H_m и $\tilde{H}_m$. Главная цель статьи состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Коды C_m^* и $\tilde{C}_m^*$ имеют параметры

$$(3^m, 5^m, 2 \cdot 3^{m-1}), \quad (3^m, 5^{m+1}, 2 \cdot 3^{m-1})$$

и исправляют любые конфигурации из $t \leq [(2 \cdot 3^{m-1} - 1)/2]$ ошибок.

Теорема 1 показывает, что минимальное расстояние кодов C_m^* и $\tilde{C}_m^*$ близко к границе Плоткина.

2. Модифицированные матрицы Батсона–Адамара

Пусть $\omega = e^{2\pi i/5}$ — примитивный корень пятой степени из единицы и $\mathbf{Q}(\omega)$ — поле деления круга, получаемое из поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ присоединением ω . Минимальный многочлен над полем $\mathbf{Q}$ имеет вид

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Элементы $1, \omega, \omega^2, \omega^3$ образуют базис поля $\mathbf{Q}(\omega)$ над $\mathbf{Q}$, поэтому любое $\alpha \in \mathbf{Q}(\omega)$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации

$$\alpha = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3$$

базисных элементов с коэффициентами $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{Q}$.

Пусть $\mathbf{Z}$ — поле рациональных целых чисел. Мы работаем в кольце $\mathbf{Z}[\omega]$ алгебраических целых чисел поля $\mathbf{Q}(\omega)$. Каждый элемент $\alpha \in \mathbf{Z}[\omega]$ единственным образом представляется в виде

$$\alpha = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3,$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{Z}$. Кольцо алгебраических целых чисел $\mathbf{Z}[\omega]$ содержит мультипликативную циклическую группу $C = \langle \omega \rangle = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5\}$ порядка 5 с элементами, удовлетворяющими соотношению

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим матрицу Батсона–Адамара

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

и составим из элементов этой матрицы матрицу

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & \omega^3 & \omega \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A \otimes B$ обозначает кронекерово произведение матриц A и B . Определим модифицированные матрицы Батсона–Адамара H_m и $\tilde{H}_m$ для $m = 2, 3, \dots$, рекурсивно с помощью соотношений

$$H_m = H_1 \otimes H_{m-1} = \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & \omega H_{m-1} & \omega^2 H_{m-1} \\ H_{m-1} & \omega^2 H_{m-1} & \omega^4 H_{m-1} \\ H_{m-1} & \omega^3 H_{m-1} & \omega H_{m-1} \\ H_{m-1} & \omega^4 H_{m-1} & \omega^3 H_{m-1} \end{pmatrix}$$

и

$$\tilde{H}_m = \begin{pmatrix} H_m \\ \omega H_m \\ \omega^2 H_m \\ \omega^3 H_m \\ \omega^4 H_m \end{pmatrix}.$$

Ясно, что H_m и $\tilde{H}_m$ представляют собой соответственно $5^m \times 3^m$ и $5^{m+1} \times 3^m$ матрицы, составленный из элементов циклической группы $C = \langle \omega \rangle$. Пусть

$$H_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

— матрица, эрмитово сопряженная с матрицей H_1 . Если H_{m-1}^* — эрмитово сопряженная матрица с матрицей H_{m-1} , то эрмитово сопряженная матрица с матрицей H_m равна

$$H_m^* = \begin{pmatrix} H_{m-1}^* & H_{m-1}^* & H_{m-1}^* & H_{m-1}^* & H_{m-1}^* \\ H_{m-1}^* & \omega^4 H_{m-1}^* & \omega^3 H_{m-1}^* & \omega^2 H_{m-1}^* & \omega H_{m-1}^* \\ H_{m-1}^* & \omega^3 H_{m-1}^* & \omega H_{m-1}^* & \omega^4 H_{m-1}^* & \omega^2 H_{m-1}^* \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь самосопряженную матрицу

$$J_1 = H_1 H_1^*,$$

которая имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 + \omega^3 + \omega^4 & 1 + \omega + \omega^3 & 1 + \omega^2 + \omega^4 & 1 + \omega + \omega^2 \\ 1 + \omega + \omega^2 & 3 & 1 + \omega^3 + \omega^4 & 1 + \omega + \omega^3 & 1 + \omega^2 + \omega^4 \\ 1 + \omega^2 + \omega^4 & 1 + \omega + \omega^2 & 3 & 1 + \omega^3 + \omega^4 & 1 + \omega + \omega^3 \\ 1 + \omega + \omega^3 & 1 + \omega^2 + \omega^4 & 1 + \omega + \omega^2 & 3 & 1 + \omega^3 + \omega^4 \\ 1 + \omega^3 + \omega^4 & 1 + \omega + \omega^3 & 1 + \omega^2 + \omega^4 & 1 + \omega + \omega^2 & 3 \end{pmatrix},$$

и заметим, что все действительные части чисел

$$1 + \omega + \omega^2, \quad 1 + \omega + \omega^3, \quad 1 + \omega^2 + \omega^4, \quad 1 + \omega^3 + \omega^4$$

равны $1/2$. Наконец, определим комплексно самосопряженные матрицы J_m для $m = 2, 3, \dots$, с помощью рекуррентного соотношения

$$J_m = J_1 \otimes J_{m-1}.$$

Так как

$$H_1 H_1^* = J_1,$$

то для любого $m \geq 1$

$$H_m H_m^* = J_m. \quad (2)$$

Два последних соотношения показывают, что матрицы H_m и $\tilde{H}_m$ не входят в класс обобщенных матриц Адамара. С другой стороны, используя индукцию по m , нетрудно показать, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Для любого $m \geq 1$ справедливо равенство $J_m^* = J_m$. Элементы γ_{kl} , $k, l = 1, \dots, 5^m$, матрицы J_m являются алгебраическими целыми числами из $\mathbb{Z}[\omega]$ вида

$$\gamma_{kl} = c_{kl}^{(0)} + c_{kl}^{(1)}\omega + c_{kl}^{(2)}\omega^2 + c_{kl}^{(3)}\omega^3,$$

где $c_{kl}^{(0)}, c_{kl}^{(1)}, c_{kl}^{(2)}, c_{kl}^{(3)} \in \mathbb{Z}$ и все диагональные элементы матрицы J_m равны 3^m . Действительные части недиагональных элементов γ_{kl} не превосходят $3^{m-1}/2$.

Этот результат и соотношения (2) показывают что матрицы H_m обладают рядом свойств, которые во многих аспектах аналогичны основным свойствам классических матриц Адамара.

3. Модифицированные коды Адамара

Пусть H_m и $\tilde{H}_m$ — модифицированные матрицы Батсона–Адамара, определенные в предыдущем разделе. Модифицированный пятеричный код Адамара C_m^* определяется как множество столбцов матрицы H_m^* , эрмитово сопряженной с матрицей H_m . Аналогично, модифицированный пятеричный код Адамара $\tilde{C}_m^*$ состоит из столбцов матрицы $\tilde{H}_m^*$, эрмитово сопряженной с матрицей $\tilde{H}_m$. Ясно, что C_m^* и $\tilde{C}_m^*$ — нелинейные $(3^m, 5^m, d)$ и $(3^m, 5^{m+1}, d)$ коды соответственно.

Найдем минимальное расстояния Хемминга d кодов C_m^* и $\tilde{C}_m^*$. Рассмотрим матрицу

$$H_m = \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & \omega H_{m-1} & \omega^2 H_{m-1} \\ H_{m-1} & \omega^2 H_{m-1} & \omega^4 H_{m-1} \\ H_{m-1} & \omega^3 H_{m-1} & \omega H_{m-1} \\ H_{m-1} & \omega^4 H_{m-1} & \omega^3 H_{m-1} \end{pmatrix}$$

как упорядоченное множество строк. Следующий результат играет центральную роль в дальнейших рассуждениях.

Теорема 2. Пусть α_k и α_l — две строки матрицы H_m и ω^r, ω^s — два элемента группы $C = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$. Если $\omega^r \alpha_k \neq \omega^r \alpha_l$, то расстояние Хемминга между $\omega^r \alpha_k$ и $\omega^s \alpha_s$ не меньше $2 \cdot 3^{m-1}$.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по m . При $m = 1$ множество элементов $\omega^\sigma \alpha_k$, где $\alpha_k \in H_1$ и $\omega^\sigma \in C$, совпадает с множеством строк матриц

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & \omega^3 & \omega \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 \end{pmatrix}, \quad \omega H_1 = \begin{pmatrix} \omega & \omega & \omega \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^3 & 1 \\ \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ \omega & 1 & \omega^4 \end{pmatrix}, \quad \omega^2 H_1 = \begin{pmatrix} \omega^2 & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ \omega^2 & \omega^4 & \omega \\ \omega^2 & 1 & \omega^3 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{pmatrix},$$

$$\omega^3 H_1 = \begin{pmatrix} \omega^3 & \omega^3 & \omega^3 \\ \omega^3 & \omega^4 & 1 \\ \omega^3 & 1 & \omega^2 \\ \omega^3 & \omega & \omega^4 \\ \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}, \quad \omega^4 H_1 = \begin{pmatrix} \omega^4 & \omega^4 & \omega^4 \\ \omega^4 & 1 & \omega \\ \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ \omega^4 & \omega^2 & 1 \\ \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Это показывает, что расстояние Хемминга между любыми двумя различными строками $\omega^\sigma \alpha_k$ и $\omega^\tau \alpha_l$ не меньше 2. Поэтому при $m = 1$ теорема верна.

Пусть теперь $m \geq 2$. Рассмотрим подматрицы

$$\begin{aligned} H_{m-1}^{(0,0,0)} &= (H_{m-1} \quad H_{m-1} \quad H_{m-1}), \\ H_{m-1}^{(0,1,2)} &= (H_{m-1} \quad \omega H_{m-1} \quad \omega^2 H_{m-1}), \\ H_{m-1}^{(0,2,4)} &= (H_{m-1} \quad \omega^2 H_{m-1} \quad \omega^4 H_{m-1}), \\ H_{m-1}^{(0,3,1)} &= (H_{m-1} \quad \omega^3 H_{m-1} \quad \omega H_{m-1}), \\ H_{m-1}^{(0,4,3)} &= (H_{m-1} \quad \omega^4 H_{m-1} \quad \omega^3 H_{m-1}) \end{aligned}$$

матрицы H_m . Из предыдущего следует, что для матрицы H_m единственно возможными являются строки α_k вида

$$\begin{aligned} \alpha_k &= (a_k \quad a_k \quad a_k), \\ \alpha_k &= (a_k \quad \omega a_k \quad \omega^2 a_k), \\ \alpha_k &= (a_k \quad \omega^2 a_k \quad \omega^4 a_k), \\ \alpha_k &= (a_k \quad \omega^3 a_k \quad \omega a_k), \\ \alpha_k &= (a_k \quad \omega^4 a_k \quad \omega^3 a_k), \end{aligned} \tag{3}$$

где $a_k \in H_{m-1}$.

Предположим, что расстояние Хемминга между двумя различными векторами $\omega^r a_k$, $\omega^s a_l$, где $a_k, a_l \in H_{m-1}$, $\omega^r, \omega^s \in C$, не меньше $2 \cdot 3^{m-2}$, и докажем, что расстояние Хемминга между двумя различными векторами $\omega^\sigma \alpha_k$ и $\omega^\tau \alpha_l$, где $\alpha_k, \alpha_l \in H_m$, $\omega^\sigma, \omega^\tau \in C$, не меньше $2 \cdot 3^{m-1}$. Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned} \alpha_k &= (a_k \quad \omega^\delta a_k \quad \omega^\lambda a_k), & \alpha_l &= (a_l \quad \omega^\mu a_l \quad \omega^\nu a_l), \\ \omega^\sigma \alpha_k &= (\omega^\sigma a_k \quad \omega^{\sigma+\delta} a_k \quad \omega^{\sigma+\lambda} a_k), & \omega^\tau \alpha_l &= (\omega^\tau a_l \quad \omega^{\tau+\mu} a_l \quad \omega^{\tau+\nu} a_l) \end{aligned}$$

и заметим, что расстояние Хемминга между $\omega^\sigma \alpha_k$ и $\omega^\tau \alpha_l$ равно

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) = d(\omega^\sigma a_k, \omega^\tau a_l) + d(\omega^{\sigma+\delta} a_k, \omega^{\tau+\mu} a_l) + d(\omega^{\sigma+\lambda} a_k, \omega^{\tau+\nu} a_l).$$

Заметим также, что если $\omega^\sigma a_k = \omega^\tau a_l$, то $\sigma = \tau$ и $a_k = a_l$. Действительно, из того, что первые компоненты векторов a_k и a_l равны 1, следует, что $\sigma = \tau$, так что $a_k = a_l$. Для того, чтобы найти нетривиальную нижнюю границу для $d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l)$, рассмотрим следующие четыре случая.

1. Пусть $(\delta, \lambda) = (\mu, \nu) = (0, 0)$. Тогда

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) = 3d(\omega^\sigma a_k, \omega^\tau a_l),$$

поэтому из того, что $d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) \neq 0$, следует, что $d(\omega^\sigma a_k, \omega^\tau a_l) \neq 0$. Если $l = k$ и $\sigma \neq \tau$, то $d(\omega^\sigma a_k, \omega^\tau a_k) = 3^{m-1}$ и поэтому

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) = 3^m > 2 \cdot 3^{m-1}.$$

Если $l \neq k$, то по предположению индукции

$$d(\omega^\sigma a_k, \omega^\tau a_l) \geq 2 \cdot 3^{m-2},$$

и следовательно,

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) \geq 2 \cdot 3^{m-1}.$$

2. Пусть $(\delta, \lambda) = (0, 0)$ и $\mu \neq \nu$ — ненулевой элемент множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Рассмотрим следующие подслучаи.

2.1. Пусть $\omega^\sigma a_k \neq \omega^\tau a_l$, $\omega^\sigma a_k \neq \omega^{\tau+\mu} a_l$ и $\omega^\sigma a_k \neq \omega^{\tau+\nu} a_l$. По предположению индукции

$$\begin{aligned} d(\omega^\sigma a_k, \omega^\tau a_l) &\geq 2 \cdot 3^{m-2}, \\ d(\omega^\sigma a_k, \omega^{\tau+\mu} a_l) &\geq 2 \cdot 3^{m-2}, \\ d(\omega^\sigma a_k, \omega^{\tau+\nu} a_l) &\geq 2 \cdot 3^{m-2}, \end{aligned}$$

и следовательно,

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) \geq 6 \cdot 3^{m-2} = 2 \cdot 3^{m-1}.$$

2.2. Пусть $\omega^\sigma a_k = \omega^\tau a_l$, $\omega^\sigma a_k \neq \omega^{\tau+\mu} a_l$ и $\omega^\sigma a_k \neq \omega^{\tau+\nu} a_l$. Тогда $\sigma = \tau$, $a_k = a_l$, откуда следует, что

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) = d(\omega^\sigma a_k, \omega^{\sigma+\mu} a_k) + d(\omega^\sigma a_k, \omega^{\sigma+\nu} a_k) = 2 \cdot 3^{m-1}.$$

Аналогично, если $\omega^\sigma a_k = \omega^{\tau+\mu} a_l$, $\omega^\sigma a_k \neq \omega^\tau a_l$ и $\omega^\sigma a_k \neq \omega^{\tau+\nu} a_l$, то

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) = d(\omega^{\tau+\mu} a_l, \omega^\tau a_l) + d(\omega^{\tau+\mu} a_l, \omega^{\tau+\nu} a_l) = 2 \cdot 3^{m-1},$$

а если $\omega^\sigma a_k = \omega^{\tau+\nu} a_l$, $\omega^\sigma a_k \neq \omega^\tau a_l$ и $\omega^\sigma a_k \neq \omega^{\tau+\mu} a_l$, то

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) = d(\omega^{\tau+\nu} a_l, \omega^\tau a_l) + d(\omega^{\tau+\nu} a_l, \omega^{\tau+\mu} a_l) = 2 \cdot 3^{m-1}.$$

2.3. Если $\omega^\sigma a_k = \omega^\tau a_l$ и $\omega^\sigma a_k = \omega^{\tau+\mu} a_l$, то $a_l = \omega^\mu a_l$, что невозможно, так как $\mu \neq 0$. Аналогично, если $\omega^\sigma a_k = \omega^\tau a_l$, $\omega^\sigma a_k = \omega^{\tau+\nu} a_l$, или $\omega^\sigma a_k = \omega^{\tau+\mu} a_l$, $\omega^\sigma a_k = \omega^{\tau+\nu} a_l$, то опять получаем противоречие.

3. Пусть $(\mu, \nu) = (0, 0)$ и $\delta \neq \lambda$ — ненулевой элемент множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Этот случай аналогичен рассмотренному выше случаю 2, так что снова справедливо неравенство

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) \geq 2 \cdot 3^{m-1}.$$

4. Пусть $\delta \neq \lambda$ и $\mu \neq \nu$ — ненулевые элементы множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Рассмотрим следующие подслучаи.

4.1. Пусть $\omega^\sigma a_k \neq \omega^\tau a_l$, $\omega^{\sigma+\delta} a_k \neq \omega^{\tau+\mu} a_l$ и $\omega^{\sigma+\lambda} a_k \neq \omega^{\tau+\nu} a_l$. По предположению индукции

$$\begin{aligned} d(\omega^\sigma a_k, \omega^\tau a_l) &\geq 2 \cdot 3^{m-2}, \\ d(\omega^{\sigma+\delta} a_k, \omega^{\tau+\mu} a_l) &\geq 2 \cdot 3^{m-2}, \\ d(\omega^{\sigma+\lambda} a_k, \omega^{\tau+\nu} a_l) &\geq 2 \cdot 3^{m-2}, \end{aligned}$$

откуда

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) \geq 6 \cdot 3^{m-2} = 2 \cdot 3^{m-1}.$$

4.2. Пусть $\omega^\sigma a_k = \omega^\tau a_l$, $\omega^{\sigma+\delta} a_k = \omega^{\tau+\mu} a_l$ и $\omega^{\sigma+\lambda} a_k \neq \omega^{\tau+\nu} a_l$. Тогда $\sigma = \tau$, $a_k = a_l$, и следовательно,

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) = d(\omega^{\sigma+\delta} a_k, \omega^{\tau+\mu} a_l) + d(\omega^{\sigma+\lambda} a_k, \omega^{\tau+\nu} a_l) = 2 \cdot 3^{m-1}.$$

Пусть теперь $\omega^{\sigma+\delta} a_k = \omega^{\tau+\mu} a_l$, $\omega^\sigma a_k \neq \omega^\tau a_l$ и $\omega^{\sigma+\lambda} a_k \neq \omega^{\tau+\nu} a_l$. Тогда $\omega^\sigma a_k = \omega^{\tau+\mu-\delta} a_l$, $\omega^{\sigma+\lambda} a_k = \omega^{\tau+\mu-\delta+\lambda} a_l$, и следовательно,

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) = d(\omega^{\tau+\mu-\delta} a_l, \omega^\mu a_l) + d(\omega^{\tau+\mu-\delta+\lambda} a_l, \omega^{\tau+\nu} a_l) = 2 \cdot 3^{m-1}.$$

Наконец, пусть $\omega^{\sigma+\lambda} a_k = \omega^{\tau+\nu} a_l$, $\omega^\sigma a_k \neq \omega^\tau a_l$ и $\omega^{\sigma+\delta} \neq \omega^{\tau+\mu} a_l$. Используя те же аргументы, опять получаем равенство

$$d(\omega^\sigma \alpha_k, \omega^\tau \alpha_l) = 2 \cdot 3^{m-1}.$$

4.3. Предположим, что $\omega^\sigma a_k = \omega^\tau a_l$ и $\omega^{\sigma+\delta} a_k = \omega^{\tau+\mu} a_l$. Тогда $\sigma = \tau$, $a_k = a_l$, и мы получаем, что

$$\alpha_k = (a_k \quad \omega^\delta a_k \quad \omega^\lambda a_k), \quad \alpha_l = (a_k \quad \omega^\delta a_k \quad \omega^\nu a_k),$$

что невозможно в силу (3). Аналогично, если $\omega^\sigma a_k = \omega^\tau a_l$ и $\omega^{\sigma+\lambda} a_k = \omega^{\tau+\nu} a_l$, то $\sigma = \tau$, $a_k = a_l$, откуда следует, что $\lambda = \nu$. Таким образом,

$$\alpha_k = (a_k \quad \omega^\delta a_k \quad \omega^\lambda a_k), \quad \alpha_l = (a_k \quad \omega^\mu a_k \quad \omega^\lambda a_k),$$

что также невозможно в силу (3).

Наконец, если $\omega^{\sigma+\delta} a_k = \omega^{\tau+\mu} a_l$ и $\omega^{\sigma+\lambda} a_k = \omega^{\tau+\nu} a_l$, то справедливо равенство $\lambda - \delta = \nu - \mu$, из которого следует, что

$$\alpha_k = (a_k \quad \omega^\delta a_k \quad \omega^{\delta+\kappa} a_k), \quad \alpha_l = (a_l \quad \omega^\mu a_l \quad \omega^{\mu+\kappa} a_l),$$

где $\kappa = \lambda - \delta = \nu - \mu$. В силу (3) описанный выше вид векторов α_k и α_l невозможен, что завершает доказательство.

Следствие 1. *Нелинейные пятеричные коды C_m^* и $\tilde{C}_m^*$ имеют, соответственно, параметры*

$$(3^m, 5^m, 2 \cdot 3^{m-1}), \quad (3^m, 5^{m+1}, 2 \cdot 3^{m-1}).$$

Доказательство. Достаточно определить минимум расстояния d кодов C_m^* и $\tilde{C}_m^*$. Ясно, что минимум расстояния Хемминга кода C_m^* равен минимуму расстояния Хемминга кода $\tilde{C}^*$ и равен минимуму расстояния Хемминга между различными строками матрицы H_m . Теперь результат следует из теоремы 3.

Наряду с C_m^* и $\tilde{C}_m^*$ можно рассматривать нелинейные коды C_m и $\tilde{C}_m$, состоящие соответственно из строк модифицированных матриц Батсона-Адамара H_m и $\tilde{H}_m$. Коды C_n , $\tilde{C}_m$ имеют те же параметры, что и коды C_m^* , $\tilde{C}_m^*$, и процедуры их декодирования также аналогичны.

Теорема 3. *Коды C_m и $\tilde{C}_m$ имеют параметры*

$$(3^m, 5^m, 2 \cdot 3^{m-1}), \quad (3^m, 5^{m+1}, 2 \cdot 3^{m-1})$$

и исправляют любые конфигурации из $t \leq [(2 \cdot 3^{m-1} - 1)/2]$ ошибок.

Ясно, что если $a_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,3^m})$ и $\bar{a}_l^\tau = (\bar{a}_{l,1}, \dots, \bar{a}_{l,3^m})^\tau$ — код-векторы соответственно кода C_m и кода C_m^* , то

$$a_k \bar{a}_l^\tau = \sum_{j=1}^{3^m} a_{kj} \bar{a}_{lj} = \gamma_{kl},$$

где γ_{kl} — соответствующий элемент матрицы J_m . Здесь и далее верхний индекс τ означает транспонирование.

4. Алгоритм декодирования

Для кодов C_m^* , $\tilde{C}_m^*$ и C_m , $\tilde{C}_m$ имеются эффективные процедуры декодирования. Алгоритмы декодирования для C_m^* , $\tilde{C}_m^*$ и C_m , $\tilde{C}_m$ совершенно аналогичны, поэтому мы ограничимся описанием алгоритма декодирования только для C_m^* .

Пусть

$$H_m = (a_{kl}), \quad 1 \leq k \leq 5^m, \quad 1 \leq l \leq 3^m,$$

— модифицированная $5^m \times 3^m$ матрица Батсона–Адамара с элементами из $C = \langle \omega \rangle$. Пусть

$$\bar{a}_{k_0}^\tau = (\bar{a}_{k_0,1}, \dots, \bar{a}_{k_0,3^m})^\tau \in C_m^*$$

— передаваемый вектор и

$$\bar{c}_k^\tau = (\bar{c}_{k,1}, \dots, \bar{c}_{k,3^m})^\tau$$

— полученный вектор, отличающийся от $\bar{a}_k^\tau$ в t позициях. Предположим, что канал с шумом преобразует каждый символ $\bar{a}_{kl}$ из алфавита $C = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ в некоторый другой символ из C с одной и той же малой вероятностью p^* и не изменяет $\bar{a}_{kl}$ с вероятностью $1 - p^*$.

Для восстановления передаваемого вектора $\bar{a}_{k_0}^\tau$ из полученного вектора $\bar{c}^\tau$ вычтем $\bar{c}^\tau$ из каждого столбца $\bar{a}_k^\tau$ матрицы H_m^* и затем рассмотрим полученную в результате этой операции матрицу

$$S_m^* = (\bar{a}_{kl} - \bar{c}_l)^\tau, \quad 1 \leq k \leq 5^m, \quad 1 \leq l \leq 3^m.$$

Элементы матрицы H_m^* и компоненты вектора $\bar{c}^\tau$ являются элементами циклической группы $C = \langle \omega \rangle$, поэтому полученная матрица $S_m^* = (\bar{s}_{kl})^\tau$ — это $3^m \times 5^m$ матрица с элементами

$$\bar{s}_{kl} = s_{kl}^{(0)} + s_{kl}^{(1)}\omega + s_{kl}^{(2)}\omega^2 + s_{kl}^{(3)}\omega^3$$

из кольца $\mathbb{Z}[\omega]$.

Рассмотрим множество столбцов

$$\bar{s}_k^\tau = (\bar{s}_{k,1}, \dots, \bar{s}_{k,3^m})^\tau = (\bar{a}_{k,1} - \bar{c}_1, \dots, \bar{a}_{k,3^m} - \bar{c}_{3^m})^\tau$$

матрицы S_m^* . Если число t искаженных компонент полученного вектора $\bar{c}^\tau$ удовлетворяет неравенству

$$t \leq [(d-1)/2] = [(2 \cdot 3^{m-1} - 1)/2],$$

то расстояние Хемминга $d(\bar{a}_{k_0}, \bar{c})$ между $\bar{a}_{k_0} = (\bar{a}_{k_0,1}, \dots, \bar{a}_{k_0,3^m})$ и $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{3^m})$ равно t . Отсюда следует, что столбец

$$\bar{s}_{k_0}^\tau = \bar{a}_{k_0}^\tau - \bar{c}^\tau = (\bar{s}_{k_0,1}, \dots, \bar{s}_{k_0,3^m})^\tau$$

матрицы S_m^* содержит ровно t ненулевых элементов. С другой стороны, если $k \neq k_0$, то

$$2 \cdot 3^{m-1} \leq d(\bar{a}_k, \bar{a}_{k_0}) \leq d(\bar{a}_k, \bar{c} + d(\bar{c}, \bar{a}_{k_0})) = d(\bar{a}_k, \bar{c}) + t,$$

откуда

$$d(\bar{a}_k, \bar{c}) \geq 2 \cdot 3^{m-1} - t > t.$$

Таким образом, любой столбец $\bar{s}_k^T$ матрицы S_m^* с $k \neq k_0$ содержит по меньшей мере $t + 1$ ненулевой элемент. Это свойство матрицы S_m^* приводит к следующему простому алгоритму декодирования.

Чтобы восстановить переданный вектор $\bar{a}_{k_0}^T$, проверяем множество столбцов матрицы S_m^* и выбираем единственный столбец

$$\bar{s}_{k_0} = (\bar{s}_{k_0,1}, \dots, \bar{s}_{k_0,3^m})^T$$

с минимальным числом t ненулевых элементов.

Затем декодируем полученный вектор $\bar{c}^T$ соответствующим столбцом

$$\bar{a}_{k_0}^T = (\bar{a}_{k_0,1}, \dots, \bar{a}_{k_0,3^m})^T$$

матрицы H_m^* . Ясно, что код C_m^* исправляет любые конфигурации из

$$t \leq [(d-1)/2] = [(2 \cdot 3^{m-1} - 1)/2]$$

ошибок.

Аналогично, код $\tilde{C}_m^*$ с параметрами $(3^m, 5^{m+1}, 2 \cdot 3^{m-1})$ также исправляет любые конфигурации из

$$t \leq [(2 \cdot 3^{m-1} - 1)/2]$$

ошибок. В этом случае матрица

$$S_m^* = (\bar{s}_{kl})^T = (\bar{a}_{kl} - \bar{c}_l)^T, \quad 1 \leq k \leq 5^m, \quad 1 \leq l \leq 3^m,$$

— комплексная $3^m \times 5^{m+1}$ матрица с элементами из кольца $\mathbb{Z}[\omega]$.

Так как в предложенном алгоритме декодирования фактически используется только операция вычитания алгебраических целых чисел кольца $\mathbb{Z}[\omega]$ и не требуется выполнения умножения или деления, этот алгоритм является достаточно быстрым.

5. Пример

В этом разделе мы проиллюстрируем описанный в предыдущем разделе алгоритм декодирования простейшим примером. Пусть

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & \omega^3 & \omega \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 \end{pmatrix}, \quad H_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$H_2 = \begin{pmatrix} H_1 & H_1 & H_1 \\ H_1 & \omega H_1 & \omega^2 H_1 \\ H_1 & \omega^2 H_1 & \omega^4 H_1 \\ H_1 & \omega^3 H_1 & \omega H_1 \\ H_1 & \omega^4 H_1 & \omega^3 H_1 \end{pmatrix}$$

и перепишем ее в вида

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & \omega^3 & \omega & 1 & \omega^3 & \omega & 1 & \omega^3 & \omega \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & 1 & \omega^4 & \omega^3 & 1 & \omega^4 & \omega^3 \\ 1 & 1 & 1 & \omega & \omega & \omega & \omega^2 & \omega^2 & \omega^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \omega^4 & \omega^4 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^3 & \omega^3 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega & \omega^3 & \omega^4 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^4 & \omega & \omega^3 & \omega^3 & \omega & \omega^4 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^3 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^2 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}.$$

Код C_2^* состоит из столбцов $3^2 \times 5^2$ матрицы H_2^* и имеет параметры $(3^2, 5^2, 2 \cdot 3)$. Покажем, что код C_2^* исправляет одну и две ошибки. Пусть код-вектор $\bar{a}^\tau \in C_2^*$ имеет вид

$$\bar{a}^\tau = (1, \omega^3, \omega, 1, \omega^3, \omega, 1, \omega^3, \omega)^\tau$$

и предположим, что этот вектор передается по каналу с шумом. Пусть

$$\bar{c}^\tau = (1, \omega^3, \omega, 1, \omega^3, \omega, 1, 1, \omega^2)^\tau$$

— полученный вектор, отличающийся от $\bar{a}^\tau$ в последних двух позициях. Чтобы исправить ошибки, мы вычтем $\bar{c}^\tau$ из каждого столбца матрицы H_2^* . В результате получим матрицу

$$S_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 - \omega^3 & \omega^4 - \omega^3 & 0 & \omega^2 - \omega^3 & \dots & \omega^2 - \omega^3 & \omega - \omega^3 \\ 1 - \omega & \omega^3 - \omega & 0 & \omega^4 - \omega & \dots & \omega^4 - \omega & \omega^2 - \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \omega - 1 & \omega - 1 \\ 1 - \omega^3 & \omega^4 - \omega^3 & 0 & \omega - \omega^3 & \dots & 1 - \omega & \omega^3 - \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \omega^2 - 1 & \omega^2 - 1 \\ 0 & \omega^4 - 1 & \omega - 1 & \omega - 1 & \dots & \omega^4 - 1 & \omega^3 - 1 \\ 1 - \omega^2 & \omega^3 - \omega^2 & \omega - \omega^2 & 0 & \dots & \omega - \omega^2 & \omega^4 - \omega^2 \end{pmatrix}$$

с элементами из $Z(\omega)$. Третий столбец этой матрицы содержит только два ненулевых элемента и каждый другой столбец матрицы S_2^* содержит по меньшей мере три ненулевых элемента. Согласно описанному в предыдущем разделе алгоритму декодирования в качестве декодированного вектора $\bar{c}^\tau$ выбираем третий столбец

$$\bar{a}_3^\tau = (1, \omega^3, \omega, 1, \omega^3, \omega, 1, \omega^3, \omega)^\tau$$

матрицы H_2^* .

Список литературы

1. Baliga A., New self-dual codes from cocyclic Hadamard matrices. *J. Comb. Math. Comb. Comput.* (1982) **28**, 7–14.
2. Baliga A., Horadam K. J., Cocyclic Hadamard matrices over $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$. *Australian J. Comb.* (1995) **11**, 123–134.
3. Butson K. T., Generalized Hadamard matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1962) **13**, 894–898.
4. Elliot D. F., Rao K. R., *Fast transforms. Algorithms, analyses, applications*. Academic Press, New York, 1982.
5. Horadam K. J., Udaya P., Cocyclic Hadamard codes. *IEEE Trans. Inform. Theory* (2000) **46**, 1545–1550.
6. Maslen D. K., Rockmore D. N., Generalized FFTs—a survey of some recent results. *DIMACS Ser. Discr. Math. Theoret. Comp. Sci.* (1997) **28**, 183–237.
7. Pinnawala N., Rao A., Cocyclic simplex codes of type α over $\mathbb{Z}_4$ and $\mathbb{Z}_2$. *IEEE Trans. Inform. Theory* (2004) **50**, №9, 2165–2169.

Статья поступила 29.05.2005.