Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Тимофеевко, Конечные системы образующих бесконечных подгрупп группы Голода, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 4, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 18:31:29

Конечные системы образующих бесконечных подгрупп группы Голода

© 2013 г. А. В. Тимофеев

В 1980-е годы конструкция Е. С. Голода бесконечномерных нильалгебр была приспособлена автором для построения ненильпотентных подалгебр 2-порождённых нильалгебр. В соответствующих 2-порождённых подгруппах присоединённых p -групп были найдены бесконечные подгруппы, порождённые парой сопряжённых элементов порядка p , p – нечётное простое число. В настоящей работе эта конструкция обобщена. Найдено достаточное условие ненильпотентности конечно порождённой подалгебры нильалгебры. Построены порождённые инволюциями бесконечные подгруппы группы Голода.

Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки, тема № 1.34.11 и Красноярского госпедуниверситета им. В. П. Астафьева, грант НШ № 10.

1. Предисловие

В 1959 г. П. С. Новиков объявил о существовании для каждого $k \geq 72$ конечно порождённой бесконечной группы, порядок каждого элемента которой делит k . Наименьшее для данной группы такое число k называется её периодом. Доказательство бесконечности конечно порождённой группы с тождеством $x^k = 1$ оказалось очень трудоёмким делом, не завершённым для некоторых периодов k и сегодня.¹ Совместная индукция по большому числу параметров потребовала более сотни страниц журнального текста. Число таких параметров уменьшается до одного, если условие конечности периода группы ослабить до конечности порядка каждого её элемента, т. е. рассматривать вместо групп ограниченного периода *периодические группы*.

Группа называется *локально конечной*, если любая её подгруппа, порождённая конечным числом элементов, конечна. Впервые периодическая нелокально конечная группа появилась в работе Е. С. Голода 1964 г., [1]. Для каждого простого числа p и каждого $n \geq 2$ он нашёл бесконечную порождённую n элементами группу, порядок каждого элемента которой равен степени числа p , т. е. n -порождённую p -группу. Напомним, что в основе построения этой группы лежит достаточное условие бесконечномерности фактор-алгебры по однородному идеалу I свободной ассоциативной алгебры $F^{(1)}$ многочленов без свободного члена от n непостоянных переменных над произвольным полем, [2]. Это условие ограничивает число многочленов

¹Видеозапись доклада С. И. Адяна "Новые оценки нечетных периодов, при которых удается доказать бесконечность свободных бернсайдовских групп", 13 мая 2013 г., www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?optionlang=rus&presentid=6786

каждой степени в порождающем множестве идеала I . Каждый многочлен алгебры $F^{(1)}$ возводится в достаточно большую степень так, что однородные компоненты этой степени берутся в качестве порождающих идеала I и число этих порождающих каждой степени удовлетворяет названному условию бесконечности.

Таким образом, для фактор-алгебры $A = F^{(1)}/I$ не существует такого натурального числа k , что произведение любых её k элементов равно нулю. Однако, для каждого её элемента a найдётся такое натуральное число l , что $a^l = 0$, т. е. A — *ненильпотентная нильалгебра*. Алгебра A над полем характеристики p относительно операции $\circ$:

$$a \circ b = a + b + ab, \quad a, b \in A,$$

образует бесконечную p -группу, которую называют присоединённой группой алгебры A . Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_n$ свободные порождающие алгебры $F^{(1)}$, и пусть $a_i = x_j + I$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда порождённая этими смежными классами подгруппа $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ присоединённой группы алгебры A тоже будет бесконечной. Будем называть её группой Голода и обозначать G_I .

Через восемь лет после появления групп Голода С. В. Алёшин построил первый пример нелокально конечной периодической группы преобразований. Эта 2-группа порождена двумя конечными автоматами, которые перерабатывают слова двубуквенного алфавита. Конструкция Алёшина позволяет строить бесконечные p -группы, порождённые автоматами, которые перерабатывают конечные наборы букв алфавита, состоящего из p символов, и порядки этих автоматов как элементов группы равны p и p^2 . Ещё через восемь лет Р. И. Григорчук предложил метод построения нелокально конечных p -групп преобразований пространства с мерой. В частности, бесконечность группы Григорчука следует из гомоморфизма собственной подгруппы на саму группу, а периодичность доказывается индукцией по слоговой длине слова, которым записывается каждый элемент группы в виде произведения её порождающих.

На рубеже 1970-1980 годов Ю. И. Мерзляков заметил, что известные тогда примеры нелокально конечных периодических групп преобразований можно получить из более общей конструкции групп (не обязательно периодических и конечно порождённых). Такая конструкция для каждой последовательности A множеств $A_0, A_1, A_2, \dots$, в каждом из которых больше одного элемента, имеет вид (см. [3]) подгруппы G группы $\text{Aut} T$ автоморфизмов частично упорядоченного множества T . Оно состоит из всех конечных наборов $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_l, \gamma_i \in A_i$, называемых кортежами длины $l + 1$, и частично упорядочено: $\gamma \leq \mu$ тогда и только тогда, когда кортеж γ является началом кортежа μ .

В качестве порождающих подгруппы G берутся корневые и продольные автоморфизмы, причём автоморфизм f множества T называется корневым, если он действует лишь на первые члены кортежей как некоторая подстановка $\pi_0 = \pi_0(f) \in \text{Sym}(A_0)$. Пусть γ — фиксированный бесконечный кортеж, называемый путём. Автоморфизм g называется продольным вдоль γ , если он действует не тождественно на бесконечном числе множеств последовательности A , оставляет путь γ неподвижным, а на любой другой путь η действует так: если n — первый номер, для которого различны $(n + 1)$ -е члены γ_n и η_n путей γ и η соответственно, то g действует на следующий член η_{n+1} как некоторая подстановка $\pi_{n+1} = \pi_{n+1}(g, \gamma, \eta_n) \in \text{Sym}(A_{n+1})$, зависящая только от g, γ, n, η_n , а остальные члены не меняет. Путь γ называется направляющим для автоморфизма g . Нетрудно доказать, что продольный автоморфизм имеет только один направляющий путь.

Группа G называется *АТ-группой*, если она порождена некоторым множеством H корневых и продольных автоморфизмов из $\text{Aut}T$, причём группа подстановок $\langle \pi_n(h) \mid h \in H \rangle$ транзитивна на A_n для любого $n = 0, 1, 2, \dots$

Название АТ-группа А. В. Рожков расшифровывает как алёшинского типа группа или группа автоморфизмов деревьев (automorphisms of trees). Некоторые авторы называют такую группу ветвящейся, интерпретируя множество T как дерево, объявив его вершинами кортежи и соединяя рёбрами только кортежи $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_l$ и $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_l, \gamma_{l+1}$.

Периодические АТ-группы, действующие на локально конечных деревьях, и группы Голода G_I финитно аппроксимируемы, порядки их элементов не ограничены в совокупности. Центр действующих на локально конечных деревьях АТ-групп единичен. Построены группы Голода как с бесконечным центром [4], так и с тривиальным центром [5, 6]. Как показано в работе [7], идеал I можно построить так, что каждая $(n - 1)$ -порождённая подгруппа группы Голода G_I будет конечной. С другой стороны, для каждого $n = 2, 3, \dots$ и каждого нечётного простого числа q построена n -порождённая q -группа Голода с бесконечной подгруппой, порождённой парой сопряжённых элементов простого порядка, [8, 9].

Понятно, что в периодической группе две инволюции порождают конечную подгруппу (диэдра). Если группа порождена тремя инволюциями, две из которых перестановочны, а порядки произведений непериодических инволюций в такой тройке равны четырём, то соответствующей группой может быть кристаллографическая группа, порождённая отражениями от прямых, содержащих стороны равнобедренного прямоугольного треугольника. Если группа $G = \langle c, g, h \mid c^2, g^2, h^2, (gh)^2, (ch)^4, (cg)^8 \rangle$, то среди её естественных гомоморфных образов существует континуум попарно не изоморфных финитно-аппроксимируемых ветвящихся 2-групп промежуточного роста, каждая из которых имеет собственную нормальную подгруппу только конечного индекса [10]. Группа G является одной из групп Коксетера. Напомним, группой Коксетера называется порождённая конечным числом инволюций группа, множество определяющих соотношений которой состоит только из степеней произведений каждых двух порождающих. Если в группе Коксетера показатели этих степеней являются степенями двойки и нет абелевых подгрупп конечного индекса, то и для неё справедлив сформулированный выше результат [10].

АТ-группы и группы Голода связаны вопросом автора: *“Существует ли группа Голода, изоморфная АТ-группе?”* В настоящей работе ответ на него не найден, но в 2-группе Голода построены гомоморфные образы групп Коксетера, что, с учетом результатов работы [10], приближает к ответу на этот вопрос 13.55 из “Коуровской тетради”.

Среди работ о конструкции Е. С. Голода отметим публикации Л. Хэммути [11, 12], который построил нефинитно аппроксимируемые образы групп Голода.

Особенностью настоящей работы является возможность строить бесконечные подгруппы, порождённые элементами простого порядка. В основе построения примеров групп Голода с такими подгруппами лежит теорема 1.

2. Бесконечномерные подалгебры алгебр Голода

Теорема 1. Пусть $n \geq 2$, $m \geq 2$ и свободный моноид

$S = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ содержит такой подмоноид $S_Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$, что из $z_l \in S \setminus S_Y$ и $z_r \in S \setminus S_Y$ следует, что в S_Y не попадают множества $z_l S_Y$, $S_Y z_r$ и $z_l S_Y z_r$.

Тогда в свободной ассоциативной алгебре $F^{(1)}$ многочленов без свободного члена от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ над произвольным полем можно построить такой однородный идеал I , что

- а) фактор-алгебра $A = F^{(1)}/I$ является нильалгеброй,
- б) её подалгебра $B = \langle y_1 + I, y_2 + I, \dots, y_m + I \rangle$ нильпотентна,
- в) нильпотентна каждая $(m-1)$ -порождённая подалгебра алгебры B .

Доказательство. Для построения идеала I будет применено достаточное условие бесконечности фактор-алгебры свободной ассоциативной алгебры многочленов от m непостоянных переменных по однородному идеалу. Это условие будем называть ε -условием Голода, [1]. Оно состоит в том, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ число однородных порождающих степени k этого идеала не должно превосходить числа

$$\varepsilon^2 (m - 2\varepsilon)^{k-2}, \text{ где } 0 < \varepsilon < \frac{m}{2}. \quad (1)$$

В качестве единицы моноида S выступает единица поля, над которым построена алгебра $F^{(1)}$. Ограничением более слабым, чем условие на подмоноид S_Y в посылке теоремы, является требование

$$\text{для } z \in S, f \in S_Y \text{ из } zf \in S_Y \text{ или } fz \in S_Y \text{ следует } z \in S_Y. \quad (2)$$

Из ограничения (2) следует условие а) теоремы 6.2 книги [13]. Поэтому справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Подмоноид S_Y свободный.*

Пусть V — порождённая одночленами $y_1, y_2, \dots, y_m$ подалгебра алгебры $F^{(1)}$, и для каждого $f \in F^{(1)}$ через $\text{ст} f$ обозначена степень многочлена f , а если $f \in V$, то $\text{ст}_V f$ — степень многочлена f от переменных $y_1, y_2, \dots, y_m$. В частности, если $f \in S$ или $f \in S_Y$, то моноидную длину этих слов будем обозначать тоже $\text{ст} f$ или $\text{ст}_V f$ соответственно. Пусть m_0 — минимальное, а m_1 — максимальное из чисел $\text{ст} y_1, \text{ст} y_2, \dots, \text{ст} y_m$. Наконец, через E обозначим порождающее множество идеала I , т. е. $I = \text{ид}(E)$, причём E состоит из однородных многочленов.

Ввиду изоморфизма алгебр $B \simeq V/I \cap V$ и леммы 1 для доказательства теоремы достаточно построить такое множество

$$E = \{f_1, f_2, \dots\} \cup \{g_1, g_2, \dots\} \cup \{h_1, h_2, \dots\},$$

что а) для всякого $h \in F^{(1)}$ существует такое натуральное число q , что $h^q \in I$;

б) в алгебре V её идеал $V \cap I = \text{ид}(f_1, g_1, f_2, g_2, \dots)$, причём эта система порождающих удовлетворяет ε -условию Голода (1);

в) для любых многочленов $v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \in V$ существует такое число n_V , что произведение

$$v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_{n_V}},$$

где $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_{n_V} \leq m-1$, принадлежит идеалу $I \cap V$ алгебры V .

Однородные многочлены множества E построим индукцией по числу k . Предположим, что уже построено множество однородных многочленов

$$E_{k-1} = \{f_1, f_2, \dots, f_{\mu_{k-1}}, g_1, g_2, \dots, g_{\nu_{k-1}}, h_1, h_2, \dots, h_{\xi_{k-1}}\},$$

которое порождает идеал I_{k-1} , и свойством б) обладает идеал $I_{k-1} \cap V$, а свойствами а), в) — идеалы I_{k-1} , $I_{k-1} \cap V$ и многочлены степеней меньше k . Покажем, как расширить E_{k-1} до порождающего идеал I_k множества

$$E_k = \{f_1, f_2, \dots, f_{\mu_k}, g_1, g_2, \dots, g_{\nu_k}, h_1, h_2, \dots, h_{\xi_k}\},$$

чтобы условие б) выполнялось для идеала $I_k \cap V$ алгебры V , а условия а), в) — для идеалов I_k , $I_k \cap V$ и многочленов степеней не выше k алгебр $F^{(1)}$ и V .

Рассмотрим в алгебре V многочлены

$$v_i = \Sigma_{\alpha} c_{i\alpha} M_{\alpha}(y_1, y_2, \dots, y_m),$$

где $1 \leq i < m$, M_{α} — всевозможные одночлены степеней не выше k с коэффициентами $c_{i\alpha}$ из поля, над которым построена алгебра $F^{(1)}$. Очевидно, $\text{ст}_V v_i = k$. Пусть N — натуральное число и произведение

$$v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_N}, \text{ где } j_1, j_2, \dots, j_N \in \{1, 2, \dots, m-1\},$$

рассматриваем как многочлен от $c_{i\alpha}$. Существует $(m-1)^N$ различных таких произведений по N элементов. Коэффициентом при каждом одночлене от $c_{i\alpha}$ служит однородный многочлен от $y_1, y_2, \dots, y_m$ степени, равной одному из чисел: $N, N+1, \dots, kN$. Именно этими однородными многочленами и пополняем множество $\{g_1, g_2, \dots, g_{\nu_{k-1}}\}$ для получения системы $g_1, g_2, \dots, g_{\nu_k}$.

Число добавленных к E_{k-1} однородных многочленов равно числу коммутативных одночленов степени N от

$$q = (m-1)(m + m^2 + \dots + m^k)$$

неизвестных, умноженному на $(m-1)^N$, т. е. это число равно

$$(m-1)^N \binom{N+q-1}{q-1} \leq (m-1)^N (N+q-1)^{q-1}. \quad (3)$$

Пусть $\beta = \frac{m-2\varepsilon}{m-1}$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Тогда $\beta > 1$ и для достаточно больших значений N будем иметь

$$(N+q-1)^{q-1} \leq \frac{\varepsilon^2}{(m-2\varepsilon)^2} \beta^N.$$

Отсюда, продолжая цепочку неравенств (3), приходим к неравенству

$$(m-1)^N (N+q-1)^{q-1} \leq \varepsilon^2 (m-2\varepsilon)^{N-2}. \quad (4)$$

Кроме того, берём N большим, чем степень любого многочлена из E_{k-1} . Тогда выполняется ε -условие Голода для многочленов степеней не менее N в системе $g_1, g_2, \dots, g_{\nu_k}$, и это условие справедливо для остальных многочленов этой системы по индуктивному предположению, т. е. верна следующая лемма.

Лемма 2. Идеал $\text{id}(f_1, f_2, \dots, f_{\mu_{k-1}}, g_1, \dots, g_{\nu_k})$ алгебры V удовлетворяет ε -условию Голода.

Пусть $h \in F^{(1)}$ и $\text{ст} h = k$. Если $h \in V$, то ввиду построения многочленов $g_1, g_2, \dots, g_{\nu_k}$ многочлен h^N попадает в идеал из леммы 2. Поэтому предполагаем, что $h \in F^{(1)} \setminus V$. Будем достраивать множество E_k так, чтобы сохранялось ε -условие

Голода для идеала $I_k \cap V$ алгебры V и для достаточно большого числа L многочлен $h^L \in I_k \cap V$. Как и выше, следуя Е. С. Голоду, см. пример 1 из [1], обозначим

$$h = \sum_{\alpha=1}^{q_n} c_{\alpha} M_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $q_n = n + n^2 + \dots + n^k$. Рассматривая коэффициенты c_{α} как неизвестные в качестве коэффициентов многочлена h^L при одночленах от $c_1, c_2, \dots, c_{q_n}$, получим однородные многочлены от $x_1, x_2, \dots, x_n$ степеней $L, L+1, \dots, kL$. Их общее число равно числу

$$\binom{L + q_n - 1}{q_n - 1} \quad (5)$$

коммутативных одночленов степени L от q_n неизвестных.

Каждый из этих многочленов запишем в виде суммы

$$M_1 + M_2 + \dots + M_{\gamma} + (M_{\gamma+1} + M_{\gamma+2} + \dots + M_{\delta}) \quad (6)$$

одночленов, причём в скобках собраны все из них, удовлетворяющие условию: для любого $M \in \{M_{\gamma+1}, M_{\gamma+2}, \dots, M_{\delta}\}$ и любых $z_l, z_r \in S$ одночлен $z_l M z_r \in S \setminus S_Y$. Таким образом, каждому многочлену вида (6) соответствует расположенный в скобках однородный многочлен. Собрав все такие попарно различные многочлены и получим пополнение

$$h_{\xi_{k-1}+1}, h_{\xi_{k-1}+2}, \dots, h_{\xi_k}$$

системы $h_1, h_2, \dots, h_{\xi_{k-1}}$, причём ввиду (5) справедливо

$$\xi_k - \xi_{k-1} \leq (L + q_n - 1)^{q_n - 1}. \quad (7)$$

Построение множества E_k завершим описанием системы $f_1, f_2, \dots, f_{\mu_k}$. Очевидно, в записи (6) для каждого слагаемого M_i суммы

$$M_1 + M_2 + \dots + M_{\gamma} \quad (8)$$

либо $M_i \in V$, либо найдутся такие непустые слова $a'_i, b'_i \in S$, что $a'_i M_i b'_i \in V$ или $a'_i M_i \in V$ или $M_i b'_i \in V$. Во втором случае существует такое слово $M'_i \in V$, что

$$M_i = a_i M'_i \text{ или } M_i = a_i M'_i b_i \text{ или } M_i = M'_i b_i$$

для некоторых $a_i, b_i \in S$ с условием

$$a'_i a_i, b_i b'_i \in \{y_1, y_2, \dots, y_m\}. \quad (9)$$

Таким образом, каждый одночлен M_i определяет упорядоченную пару (a_i, b_i) не обязательно непустых подслов слова из $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ в алфавите $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Пусть $\Gamma = \{1, 2, \dots, \gamma\}$. Возможно, для некоторых различных $i, j \in \Gamma$ пары (a_i, b_i) и (a_j, b_j) совпадут. Соберём все номера одинаковых пар в подмножества $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{\chi}$ множества Γ , осуществив тем самым его разбиение. Если существует Γ_j , состоящее из номеров пар пустых подслов, то с целью единообразия обозначим все одночлены M_i , где $i \in \Gamma_j$, через M'_i . Пользуясь дистрибутивностью в $F^{(1)}$, введём в (8) новые обозначения:

$$\sum_{j=1}^{\chi} a_j \left(\sum_{i \in \Gamma_j} M'_i \right) b_j. \quad (10)$$

В скобках стоят однородные многочлены, которые и берём в качестве

$$f_{\mu_{k-1}+1}, f_{\mu_{k-1}+2}, \dots, f_{\mu_{k-1}+\chi}. \quad (11)$$

Лемма 3. Система $f_1, f_2, \dots, f_{\mu_{k-1}}$ дополняется до $f_1, f_2, \dots, f_{\mu_k}$ на k -м шаге индукции $\mu_k - \mu_{k-1}$ однородными многочленами и

$$\mu_k - \mu_{k-1} \leq \chi(L + q_n - 1)^{q_n - 1}, \quad (12)$$

где $\chi \leq (1 + n + n^2 + \dots + n^{m_1 - 1})^2$.

Доказательство. Во-первых, верхняя оценка χ получена поиском количества всех попарно различных пар (a, b) , где a, b — указанные в (9) вхождения в слово из $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, либо a , либо b , или a и b — пустые символы, т. е. χ не превосходит квадрата суммы числа всевозможных слов длины меньше m_1 в алфавите из m символов и 1. Во-вторых, χ многочленов получено рассмотрением каждого из $\xi_k - \xi_{k-1}$ многочленов. Отсюда, ввиду (7), получаем (12). Лемма 3 доказана.

Каждый многочлен f_j , где $\mu_{k-1} < j \leq \mu_k$, построен указанным выше способом из многочлена (8), степень которого равна одному из чисел $L, L+1, \dots, kL$. Поэтому

$$L - m_1 \leq \text{ct} f_j \leq kL$$

и

$$\frac{L - m_1}{m_1} \leq \text{ct}_V f_j \leq \frac{kL}{m_0}. \quad (13)$$

С другой стороны, из построения многочленов $g_{\nu_{k-1}+1}, g_{\nu_{k-1}+2}, \dots, g_{\nu_k}$ следует справедливость неравенств

$$N < \text{ct}_V g_{\nu_{k-1}+1}, \text{ct}_V g_{\nu_{k-1}+2}, \dots, \text{ct}_V g_{\nu_k} \leq kN. \quad (14)$$

Учитывая левое неравенство из (13) и правое из (14), берём L так, чтобы

$$kN < \frac{L - m_1}{m_1}. \quad (15)$$

Кроме того, возьмём L настолько большим, чтобы

$$(L + q_n - 1)^{q_n - 1} \chi \leq \varepsilon^2 (m - 2\varepsilon)^{\frac{L - m_1}{m_1} - 2}.$$

Отсюда, согласно лемме 3,

$$\mu_k - \mu_{k-1} \leq \varepsilon^2 (m - 2\varepsilon)^{\frac{L - m_1}{m_1} - 2}. \quad (16)$$

Из леммы 2, неравенств (13)-(16) следует лемма 4.

Лемма 4. Идеал $\text{id}(f_1, f_2, \dots, f_{\mu_k}, g_1, g_2, \dots, g_{\nu_k})$ алгебры V удовлетворяет ε -условию Голода.

Лемма 5. Многочлены $f_1, f_2, \dots, f_{\mu_k}, g_1, g_2, \dots, g_{\nu_k}$ порождают идеал $I_k \cap V$.

Доказательство. Пусть $z \in I_k \cap V$. Следовательно, $z \in I_k$ и

$$z = \sum_{i=1}^{t_l} a_i e_i b_i + \sum_{i=t_l+1}^{t_l} a_i e_i + \sum_{i=t_l+1}^{t_r} e_i b_i + \sum_{i=t_r+1}^{t_2} e_i, \quad (17)$$

где $e_i \in E_k, a_i, b_i$ — одночлены из $F^{(1)}$. Если $e_i \in \{h_1, h_2, \dots, h_{\xi_k}\}$, то ввиду построения $h_1, h_2, \dots, h_{\xi_k}$ все одночлены i -го слагаемого из правой части равенства (17) не принадлежит V и в силу $z \in V$ должны взаимно уничтожаться с какими-нибудь одночленами многочлена z . Если же $e_i \in E_k \setminus \{h_1, h_2, \dots, h_{\xi_k}\}$ и $a_i \notin V$ или $b_i \notin V$, то по условию теоремы все одночлены i -го слагаемого не принадлежат V и тоже взаимно уничтожаются. Таким образом, $a_i, b_i \in V$ и $e_i \in \{g_1, g_2, \dots, g_{\nu_k}, f_1, f_2, \dots, f_{\mu_k}\}$. Лемма 5 доказана.

Множество E со свойствами а) - в) построено. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Алгебра A останется ниль-алгеброй и сохранятся все свойства её подалгебры B , если вместо множества E порождающим множеством идеала I алгебры $F^{(1)}$ взять множество однородных многочленов $E \cup E_1$, где для любого многочлена $f \in E_1$ и любых одночленов z_1 и z_2 из $F^{(1)}$ все одночлены многочлена $z_1 f z_2$ не принадлежат алгебре V .

3. Бесконечные подгруппы групп Голода

В качестве приложения теоремы 1 построим примеры бесконечных подгрупп группы Голода. Для этого найдены конкретные порождающие подмоноида S_Y , удовлетворяющие условию теоремы 1.

Теорема 2. Для любых $n, m \geq 2$ и каждого простого числа p можно построить такой идеал I алгебры $F^{(1)}$ над полем характеристики p , что p -группа $G_I = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ содержит бесконечную подгруппу H , порождённую элементами

$$\begin{array}{ccccccc} a_n^2 & a_{n-1}^m & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1, \\ a_n^2 & a_{n-1}^{m-1} & a_n & a_{n-1}^2 & a_{n-2} & \cdots & a_1, \\ & & \vdots & & & & \\ a_n^2 & a_{n-1} & a_n & a_{n-1}^m & a_{n-2} & \cdots & a_1, \end{array}$$

причём любая $(m-1)$ -порождённая подгруппа группы H конечна.

Доказательство. Построение идеала I начнём со свободного моноида $S = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ и его подмоноида $S_Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ с порождающими

$$y_j = x_n^2 x_{n-1}^{m-j+1} x_n x_{n-1}^j x_{n-2} \dots x_1, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Очевидно, $w \in S_Y$ тогда и только тогда, когда

$$w = \prod_{k=1}^t x_n^2 x_{n-1}^{m-j_k+1} x_n x_{n-1}^{j_k} x_{n-2} \dots x_1, \quad (18)$$

$j_r \in \{1, 2, \dots, m\}$. Докажем, что из включений $z_l \in S \setminus S_Y$ и $z_r \in S \setminus S_Y$ следует, что $z_l S_Y \not\subseteq S_Y$, $S_Y z_r \not\subseteq S_Y$ и $z_l S_Y z_r \not\subseteq S_Y$. В самом деле, предположив противное, получим

$$z_l S_Y \subseteq S_Y \text{ или } S_Y z_r \subseteq S_Y \text{ или } z_l S_Y z_r \subseteq S_Y.$$

В алфавите $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ каждое полугрупповое слово, представляющее элемент подмоноида S_Y , имеет длину, кратную $n+m+2$. Пусть $d = n+m+2$ и $z_l S_Y z_r \subseteq S_Y$. Тогда существуют такие полугрупповые слова $a \in S_Y$ и $b \in S_Y$, что

$$z_l a z_r = b,$$

причем длины слов a и b тоже кратны d . Ввиду равенства (18) в слове w слог x_n^2 занимает места $1 \bmod d$ и $2 \bmod d$ при нумерации слева направо. Это значит, что $b = b' a z_r$ и $b' \in S_Y$, т. е.

$$z_l a z_r = b' a z_r.$$

Поскольку моноид S свободный, то и $z_l \in S_Y$. Противоречие с выбором элемента z_l . Такие же рассуждения в случаях $z_l S_Y \subseteq S_Y$ и $S_Y z_r \subseteq S_Y$ дают возможность расположить одночлены $y_1, y_2, \dots, y_m$ в посылке теоремы 1. Следовательно, существует такой идеал I , что справедливы утверждения а), б) и в) теоремы 1.

Согласно утверждению а) теоремы 1 группа G_I как подгруппа присоединённой группы алгебры A над полем характеристики p является p -группой. Рассматривая порождающие подгруппу H элементы как произведения одночленов $a_i = x_j + I$, $j = 1, 2, \dots, n$, заметим, что старшие их члены являются порождающими элементами подалгебры B из утверждения б) теоремы 1. Поэтому подгруппа H бесконечна и согласно утверждению в) любая её $(m-1)$ -порождённая подгруппа конечна. Теорема 2 доказана.

Согласно замечанию в конце предыдущего параграфа порождающее идеал I множество E можно пополнить одночленами x_1^3, x_2^3 .

Следствие 1. Если идеал I содержит одночлены x_1^3, x_2^3 , то при $n = m = 2$ справедливо утверждение

$$G_I = \langle a_1, a_2 \rangle > \langle a_1, a_1^{a_2} \rangle > H = \langle (a_1^2)^{a_2} a_1, a_1^{a_2} a_1^2 \rangle,$$

причем $|H| = \infty$, $|a_1| = p$ при $p > 2$ и $|a_1| = 4$ при $p = 2$.

Заменяя порождающее множество подгруппы H теоремы 2 на множество $\{a_1^2 a_2, a_2^3 a_2\}$ и поместив в идеал I одночлены x_1^3, x_2^2, x_3^4 , увидим, что доказательство теоремы 2 при указанных изменениях приводит к справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. Для некоторого идеала I алгебры $F^{(1)}$ подгруппа $H = \langle a_1^2 a_2, a_2^3 a_2 \rangle$ 2-группы $G_I = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, $n \geq 3$, бесконечна и $|a_1^2| = |a_2^2| = |a_2| = 2$.

Следствие 2. Подгруппа $\langle a_2, a_2^{a_1}, a_2^{a_3} \rangle$ группы G_I бесконечна.

Список литературы

1. Голод Е. С., О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p -группах. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* (1964) **28**, №2, 273–276.
2. Голод Е. С., Шафаревич И. Р., О башне полей классов. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* (1964) **28**, №2, 261–272.
3. Рожков А. В., К теории групп алёшинского типа. *Матем. заметки* (1986) **40**, №5, 572–589.
4. Тимофеев А. В., О существовании групп Голода с бесконечным центром. *Матем. заметки* (1986) **39**, №5, 647–650.
5. Середа В. А., Созутов А. И., Об одном вопросе из Коуровской тетради. *Матем. заметки* (2006) **80**, №1, 154–155.
6. Середа В. А., Созутов А. И., Об ассоциативных нильалгебрах и группах Голода. *Алгебра и логика* (2006) **45**, №2, 231–238.
7. Голод Е. С., О некоторых проблемах бернсайдовского типа. *Труды международного конгресса математиков.* (1968) 284–289.
8. Тимофеев А. В., О 2-порождённых p -группах Голода. *Алгебра и логика* (1985) **24**, №2, 211–225.

9. Тимофеев А. В., *Подгруппы периодических не локально конечных групп голодовского и алёшинского типов*, Дисс. канд. физ.-мат. наук, Красноярск, 1991.
10. Grigorchuk R., On a question of Wiegold and torsion images of Coxeter groups. *Algebra Discrete Math.* (2009), № 4 78–96.
11. Hammoudi L., Quotients of nilalgebras and their associated groups. *Pacific Journal of Mathematics* (2003) **212**, №1, 93–101.
12. Хэммуди Л., Нильалгебры и бесконечные группы. *Фундаментальная и прикладная математика* (2005) **11**, №3, 189–200.
13. Кон П., *Свободные кольца и их связи: пер. с англ.* Мир, Москва, 1975.

Статья поступила 26.07.2013.