Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, Определимость в языке функциональных уравнений счетнозначной логики, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 4, 13–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:04:15

Определимость в языке функциональных уравнений счетнозначной логики

© 2013 г. С. С. Марченков

Рассматривается определимость функций и отношений в языке FE функциональных уравнений счетнозначной логики. Доказано, что класс отношений, определяемых функциональными уравнениями над множеством функций $\{0, x + 1\}$, совпадает с классом Σ_1^1 аналитической иерархии Клини. Предложены два расширения языка FE, которые по выразительным возможностям эквивалентны языку FE с функциональными константами для всех однородных функций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-00958.

Один из распространенных способов задания функций в математике основан на языках функциональных уравнений. Функциональные уравнения определяются с помощью функциональных и предметных переменных, а также различных функциональных и предметных констант. Большое число примеров функциональных уравнений можно найти в дискретной математике, в частности, в теории алгоритмов, теории автоматов и теории функций многозначной логики. Так, любую вычислимую функцию можно определить посредством системы функциональных уравнений, содержащей только функциональные константы $0, x, x + 1$. Этот результат, принадлежащий Ж.Эрбрану и К.Геделю [2], доставляет одну из первых формализаций понятия вычислимой функции.

Систематические исследования выразительных возможностей языка функциональных уравнений проводились лишь для уравнений многозначной логики [5,6,8–11,13] (в этой связи упомянем работу [7], где рассматривались уравнения автоматного типа).

В настоящей статье мы хотим обратиться к функциональным уравнениям счетнозначной логики. Данные уравнения имеют дело с функциями счетнозначной логики, которые определяются на множестве натуральных чисел. Поэтому все, что относится к упомянутым уравнениям, оказывается тесно связанным с хорошо известными понятиями и результатами теории алгоритмов. Ниже, в теореме 1, мы устанавливаем, что всякую общерекурсивную функцию можно определить подходящей системой функциональных уравнений, содержащей только функциональные константы 0 и $x + 1$. Теорема 2, опирающаяся на теорему 1, полностью характеризует класс отношений (на декартовых произведениях множеств функций), которые определяются функциональными уравнениями указанного типа. Установлено, что этот класс совпадает с классом Σ_1^1 аналитической иерархии Клини [12]. В теоремах 3,4 доказывается эквивалентность по выразимости трех языков FEH, FEC и

QFEC, полученных из языка FE либо добавлением функциональной константы p (тернарный дискриминатор), либо расширением логических средств языка FE.

Приведем необходимые определения. Пусть $N = \{0, 1, \dots\}$, P_N — множество всех функций на N (множество функций счетнозначной логики). Если $Q \subseteq P_N$ и $n \geq 1$, то через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех функций из Q , зависящих от n переменных. Для любых $n \geq 1$ и $i, 1 \leq i \leq n$, рассматриваем селекторную функцию $I_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, значения которой совпадают со значениями переменной x_i . Множество всех селекторных функций обозначаем через I .

В определении языка функциональных уравнений придерживаемся терминологии работ [6, 8–11]. Предполагаем, что каждая функция из P_N имеет индивидуальное обозначение. Для обозначения n -местных функций из P_N используем символы $f_i^{(n)}$, которые называем функциональными константами. Наряду с функциональными константами рассматриваем функциональные переменные $\varphi_i^{(n)}$ со значениями в области $P_N^{(n)}$. Кроме функциональных переменных используем обычные предметные переменные $x_1, x_2, \dots$ с областью значений N . Иногда для обозначения функциональных констант будем использовать символы g, h (с индексами или без них), а также символы y_i, z_j для обозначения предметных переменных.

Пусть $Q \subseteq P_N$. Определим понятие *терма над Q* . Всякая предметная переменная есть терм над Q . Если $t_1, \dots, t_n$ — термы над Q , $f_i^{(n)}$ — функциональная константа, служащая обозначением функции из Q , $\varphi_j^{(n)}$ — функциональная переменная, то выражения

$$f_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n), \quad \varphi_j^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$$

суть термы над Q . *Равенством над Q* называем любое выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы над Q . Равенства над Q считаем также *функциональными уравнениями над Q* . Пусть $\varphi_{i_1}^{(n_1)}, \dots, \varphi_{i_m}^{(n_m)}$ — все функциональные переменные, входящие в уравнение $t_1 = t_2$. *Решением уравнения $t_1 = t_2$* называем систему $\{f_{j_1}^{(n_1)}, \dots, f_{j_m}^{(n_m)}\}$ функций из P_N , которая после замены каждой переменной $\varphi_{i_s}^{(n_s)}$ соответствующей функциональной константой $f_{j_s}^{(n_s)}$ превращает уравнение $t_1 = t_2$ в тождество (относительно всех входящих в уравнение предметных переменных). Если Ξ — конечная система уравнений, то *решением системы уравнений Ξ* называем систему функций из P_N , которая является решением каждого уравнения, входящего в систему Ξ .

Для того чтобы с помощью решений системы уравнений определять некоторые множества функций (от одного и того же числа переменных), выделим одну из функциональных переменных системы Ξ , которую назовем *главной функциональной переменной* системы Ξ . Пусть $\varphi_i^{(n)}$ — главная функциональная переменная системы уравнений Ξ и $Q \subseteq P_N^{(n)}$. Говорим, что множество функций Q *определяется системой уравнений Ξ* , если Q является множеством всех тех n -местных функций, которые входят в решения системы Ξ в качестве компоненты по переменной $\varphi_i^{(n)}$.

Напомним, что *примитивно рекурсивными функциями* называются функции, которые можно получить из исходных функций

$$0, \quad x + 1, \quad I \tag{1}$$

с помощью операций *суперпозиции*

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_0(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) \tag{2}$$

и примитивной рекурсии

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g_0(x_1, \dots, x_{n-1}), \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 1) = g_1(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)). \end{cases} \quad (3)$$

Частично рекурсивными функциями (в формализме Клини) называются функции, которые можно получить из функций (1) с помощью операций суперпозиции, примитивной рекурсии и операции минимизации вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\mu x_{n+1})(g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0). \quad (4)$$

Всюду определенные частично рекурсивные функции будем называть *общерекурсивными функциями*.

Теорема 1. *Всякую общерекурсивную функцию можно определить подходящей системой функциональных уравнений над множеством функций $\{0, x + 1\}$.*

Доказательство следует индуктивному определению класса частично рекурсивных функций. Для функций (1) утверждение теоремы очевидно. Пусть системы уравнений $\Xi_0, \Xi_1, \dots, \Xi_m$ с главными функциональными переменными $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ определяют соответственно функции $g_0, g_1, \dots, g_m$, а функция f задается равенством (2). Будем предполагать, что системы $\Xi_0, \Xi_1, \dots, \Xi_m$ не имеют общих функциональных переменных, а функциональная переменная φ не входит в упомянутые системы уравнений. Рассмотрим систему уравнений Ξ , которая получается объединением систем уравнений $\Xi_0, \Xi_1, \dots, \Xi_m$ и добавлением нового уравнения

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi_0(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Нетрудно понять, что полученная система уравнений Ξ будет определять функцию f .

Так же просто рассматривается случай примитивной рекурсии (3). Если системы уравнений Ξ_0, Ξ_1 с главными функциональными переменными φ_0, φ_1 определяют соответственно функции g_0, g_1 , то для получения системы уравнений Ξ , определяющей функцию f , необходимо объединить системы Ξ_0, Ξ_1 (в предположении, что они не имеют общих функциональных переменных) и добавить к ним уравнения

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) &= \varphi_0(x_1, \dots, x_{n-1}), \\ \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 1) &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

где функциональная переменная φ не входит в системы Ξ_0, Ξ_1 .

Пусть теперь всюду определенная функция f получается из функции g применением операции минимизации (4). Положим

$$g_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \prod_{i < x_{n+1}} \text{sg}(g(x_1, \dots, x_n, i)),$$

где $\text{sg}(0) = 0$, $\text{sg}(x + 1) = 1$ и $\prod_{i < 0}(\dots) = 1$. Функция sg примитивно рекурсивна, а функция g_1 примитивно рекурсивна относительно функции g . Кроме того, $f(x_1, \dots, x_n)$ равно такому (единственному) числу x_{n+1} , что $g_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 1$ и $g_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} + 1) = 0$. Поэтому если система уравнений Ξ с главной функциональной переменной φ_1 определяет функцию g_1 , то функцию f будет определять система уравнений, полученная из системы Ξ присоединением уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) &= 1, \\ \varphi_1(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n) + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что теорема 1 легко обобщается на случай общерекурсивных операторов [12]. Чтобы задать общерекурсивный оператор $\Phi(f_1^{(n_1)}, \dots, f_m^{(n_m)})$ на множестве

$$P_N^{(n_1)} \times \dots \times P_N^{(n_m)}, \quad (5)$$

следует рассмотреть систему уравнений Ξ , которая помимо функциональных констант $0, x+1$ содержит также функциональные константы $f_1^{(n_1)}, \dots, f_m^{(n_m)}$ (которые в данном случае играют роль функциональных переменных) и некоторые функциональные переменные $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. В случае выполнения равенства

$$\Phi(f_1^{(n_1)}, \dots, f_m^{(n_m)}) = f$$

система уравнений Ξ должна корректно определять (по главной функциональной переменной) функцию f через функции $f_1^{(n_1)}, \dots, f_m^{(n_m)}$.

В связи с доказательством теоремы 1 может возникнуть предположение, что класс функций, определяемых функциональными уравнениями над множеством $\{0, x+1\}$, достаточно близок к классу общерекурсивных функций. Однако теорема 2 показывает, что это не так. Чтобы добиться наибольшей общности в теореме 2, мы будем рассматривать определяемость не только функций, но и конечных наборов функций, т.е. фактически отношений на множествах вида (5).

Итак, рассмотрим систему функциональных уравнений Ξ с функциональными переменными

$$\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_m^{(n_m)}, \varphi_{m+1}^{(n_{m+1})}, \dots, \varphi_{m+l}^{(n_{m+l})},$$

из которых переменные $\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_m^{(n_m)}$ будем считать «главными» переменными. Будем далее считать, что система Ξ определяет отношение R на множестве (5), если для любого набора функций $(f_1^{(n_1)}, \dots, f_m^{(n_m)})$ из множества (5) найдется такой набор функций $(f_{m+1}^{(n_{m+1})}, \dots, f_{m+l}^{(n_{m+l})})$ из множества

$$P_N^{(n_{m+1})} \times \dots \times P_N^{(n_{m+l})},$$

что при замене функциональных переменных $\varphi_1^{(n_1)}, \dots, \varphi_{m+l}^{(n_{m+l})}$ системы уравнений Ξ соответствующими функциональными константами $f_1^{(n_1)}, \dots, f_{m+l}^{(n_{m+l})}$ полученная система равенств будет тождественно истинной (относительно всех входящих в систему предметных переменных) в том и только том случае, когда отношение R истинно на наборе $(f_1^{(n_1)}, \dots, f_m^{(n_m)})$.

Обозначим через RFE класс всех отношений (на декартовых произведениях множеств вида $P_N^{(n)}$), которые определяются в указанном смысле системами функциональных уравнений над множеством функциональных констант $\{0, x+1\}$. Мы хотим сравнить класс RFE с начальным классом Σ_1^1 аналитической иерархии Клини (см. [12, глава 16]), который будем рассматривать только для отношений на множествах вида (5). Этот класс можно определить как класс всех отношений, представимых в форме

$$(\exists f_{m+1}) \dots (\exists f_{m+l}) (\forall x_1) \dots (\forall x_k) R(f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_{m+l}, x_1, \dots, x_k), \quad (6)$$

где

$$f_1 \in P_N^{(n_1)}, \dots, f_m \in P_N^{(n_m)}, f_{m+1} \in P_N^{(n_{m+1})}, \dots, f_{m+l} \in P_N^{(n_{m+l})}$$

и R — рекурсивное отношение на множестве

$$P_N^{(n_1)} \times \dots \times P_N^{(n_m)} \times P_N^{(n_{m+1})} \times \dots \times P_N^{(n_{m+l})} \times N^k.$$

Определения классов RFE и Σ_1^1 имеют довольно много общего. Это подтверждает следующая теорема.

Теорема 2. *Классы отношений RFE и Σ_1^1 совпадают.*

Доказательство. Включение $\text{RFE} \subseteq \Sigma_1^1$ почти очевидно: система уравнений языка FE, определяющая отношение на множестве $P_N^{(n_1)} \times \dots \times P_N^{(n_m)}$, представляет собой, безусловно, простейший тип рекурсивного отношения на множестве $P_N^{(n_1)} \times \dots \times P_N^{(n_{m+l})} \times N^k$.

Обратно, чтобы установить включение $\Sigma_1^1 \subseteq \text{RFE}$, так же, как в теореме 1, с помощью системы уравнений Ξ над множеством функций $\{0, x + 1\}$ определяем рекурсивное отношение R , входящее в формулу (6), которое содержит «главные» функциональные переменные $\varphi_1^{(n_1)}, \dots, \varphi_m^{(n_m)}$, «вспомогательные» функциональные переменные $\varphi_{m+1}^{(n_{m+1})}, \dots, \varphi_{m+l}^{(n_{m+l})}$ и предметные переменные $x_1, \dots, x_k$. Теорема доказана.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_N$ и π — перестановка на множестве N . Функция

$$f^\pi(x_1, \dots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)))$$

называется *сопряженной с функцией f относительно перестановки π* . Если $f = f^\pi$, то функция f носит название *самосопряженной относительно перестановки π* . Множество всех функций из P_N , самосопряженных относительно перестановки π , обозначим через S_π . Легко убедиться в том, что множество S_π замкнуто относительно суперпозиции и содержит все селекторные функции. Положим

$$H = \bigcap_{\pi} S_\pi,$$

где пересечение рассматривается по всем перестановкам π на множестве N . Функции из множества H носят название *однородных функций* (см. [4]).

Определим две однородные функции (их однородность можно установить как непосредственно с использованием исходных определений, так и с учетом того, что значениями данных функций являются значения переменных, которые выбираются в соответствии с отношением равенства/неравенства между переменными):

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ z & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как показано в работе [4], базис по суперпозиции в классе H образует функция p .

Однородные функции играют важную роль в универсальной алгебре и теории функций многозначной логики. В связи с этим представляет интерес исследование определимости функций функциональными уравнениями над множеством $\{p\}$. Нетрудно видеть, что если некоторый набор функций $(f_1, \dots, f_s)$ удовлетворяет системе уравнений Ξ над множеством $\{p\}$, а π — перестановка на множестве N , то набор функций $(f_1^\pi, \dots, f_s^\pi)$ также удовлетворяет системе уравнений Ξ . Это означает, что всякое множество функций, определяемое системой уравнений данного типа, замкнуто относительно преобразования $f \rightarrow f^\pi$. В частности, любое одноэлементное определяемое множество необходимо состоит из однородной функции.

Далее мы хотим рассматривать определимость только таких множеств, в которых любые две функции являются сопряженными относительно подходящей перестановки на N . В связи с этим обозначим через FEN класс всех множеств подобного типа, которые можно определить с помощью функциональных уравнений над множеством $\{p\}$.

Нетрудно понять, что определимость в языке FE не изменится, если в язык FE добавить логическую связку конъюнкцию $\&$, а вместо системы уравнений рассматривать формулы, образованные конъюнкцией уравнений, составляющих заданную систему. В дальнейшем нам будет удобно рассматривать язык FE именно в такой форме.

Расширим логические возможности языка FE : внесем в язык FE логические связки дизъюнкцию $\vee$ и отрицание $\neg$. Полученный в результате язык обозначим через FEC . Формулы языка FEC образуем из элементарных формул (равенств термов) с помощью всех трех логических операций. Так же, как для языков FE и FEN , можно убедиться, что всякое множество, определяемое формулой языка FEC , замкнуто относительно преобразования $f \rightarrow f^\pi$. По аналогии с классом FEN обозначим через FEC класс всех множеств, которые определяются формулами языка FEC и в которых любые две функции сопряжены относительно подходящей перестановки на N .

Теорема 3. *Классы FEN и FEC совпадают.*

Доказательство. Сначала покажем, что в языке FEC определима любая однородная функция. Для этого достаточно установить, что в языке FEC определима однородная функция p . Однако функцию p можно определить через функцию d формулой

$$(\varphi(x, x, y) = y) \& (\varphi(x, y, x) = x) \& (\varphi(x, y, y) = x) \& (\varphi(x, y, d(x, y, z)) = x).$$

В свою очередь, функция d определяется следующей формулой языка FEC :

$$(\varphi(x, x, z) = x) \& ((x = y) \vee (\varphi(x, y, z) = z)).$$

Таким образом, имеем включение $FEN \subseteq FEC$.

Докажем обратное включение. Пусть Φ — формула языка FEC , которая определяет (по главной функциональной переменной) множество G . Будем предполагать, что формула Φ представлена в дизъюнктивной нормальной форме, так что отрицания в формуле Φ действуют только на атомарные подформулы, т.е. на равенства термов. Как обычно, формулу $\neg(t_1 = t_2)$ записываем в виде $(t_1 \neq t_2)$. Следовательно, можно считать, что формула Φ построена из элементарных формул вида $(t_1 = t_2)$ и $(t_1 \neq t_2)$ с помощью связок $\&$ и $\vee$.

Пусть все элементарные подформулы формулы Φ суть

$$(t_1 =^{a_1} t_2), \dots, (t_{2s-1} =^{a_s} t_{2s}), \quad (7)$$

где $a_1, \dots, a_s \in \{0, 1\}$ и знаки $=^1, =^0$ обозначают соответственно $=$ и $\neq$ (среди термов $t_1, t_2, \dots, t_{2s-1}, t_{2s}$ возможны повторения). В соответствии с понятием определмости в языке ФЕС, если заменить в формуле Φ главную функциональную переменную произвольной функцией g из множества G , а все остальные функциональные переменные — подходящими функциями из P_N , то полученная в результате этой замены формула Φ_1 будет истинной при всех значениях входящих в нее предметных переменных.

Заметим теперь, что для вычисления истинностного значения формулы Φ_1 (на данном наборе значений предметных переменных) необходимы только истинностные значения формул (7). Пользуясь этим замечанием, определим однородную функцию $h(y_1, \dots, y_{2s}, z, w)$ следующими условиями. Пусть при некотором выборе значений предметных переменных формулы Φ_1 последовательность (7), в которой все функциональные переменные заменены надлежащими функциями из P_N , дает истинностные значения $b_1, \dots, b_s$ (т.е. $b_1, \dots, b_s \in \{И, Л\}$). Тогда полагаем значение $h(y_1, \dots, y_{2s}, z, w)$ равным z для любых значений $y_1, \dots, y_{2s}$, удовлетворяющих условиям

$$(y_{2i-1} =^{a_i} y_{2i}) \equiv b_i \quad (1 \leq i \leq s).$$

Во всех остальных случаях полагаем $h(y_1, \dots, y_{2s}, z, w) = w$. Поскольку в определении функции h используется только отношение равенства/неравенства между переменными, а значения функции h совпадают с z или w , функция h действительно будет однородной.

Пусть $t'_1, \dots, t'_{2s}$ — термы, которые получаются из термов $t_1, \dots, t_{2s}$ при определении формулы Φ_1 . Из способа задания функции h сразу следует, что справедливо тождество

$$h(t'_1, t'_2, \dots, t'_{2s-1}, t'_{2s}, z, w) = z \quad (8)$$

(переменные z, w предполагаются различными и отличными от переменных формулы Φ). Покажем, что равенство (8) обращается в тождество только в том случае, когда термы $t'_1, \dots, t'_{2s}$ получены из термов $t_1, \dots, t_{2s}$ заменой главной функциональной переменной функцией g (либо любой другой функцией множества G) и подходящей заменой всех остальных функциональных переменных функциями из P_N .

В самом деле, формула Φ определяет множество G с элементом g . Отсюда вытекает, что для любой функции g' (от тех же переменных, что и функция g), не принадлежащей множеству G , при замене в формуле Φ главной функциональной переменной функцией g' и произвольной замене всех остальных функциональных переменных функциями из P_N образуется формула, которая не является тождественно истинной. Пусть указанная замена переменных в формуле Φ порождает термы $t''_1, \dots, t''_{2s}$. Тогда, следовательно, при некотором выборе значений предметных переменных формулы

$$t''_1 =^{a_1} t''_2, \dots, t''_{2s-1} =^{a_s} t''_{2s}$$

дадут последовательность $c_1, \dots, c_s$ истинностных значений, отличную от любой последовательности $b_1, \dots, b_s$, построенной выше для функции g (а также для любой другой функции из G). Из этого, в свою очередь, следует, что равенство

$$h(t''_1, t''_2, \dots, t''_{2s-1}, t''_{2s}, z, w) = z$$

тождеством не будет.

Подводя итог проведенным рассуждениям, заключаем, что уравнение

$$h(t_1, t_2, \dots, t_{2s-1}, t_{2s}, z, w) = z$$

при замене всех функциональных переменных функциями из P_N обращается в тождество в том и только том случае, когда главная функциональная переменная заменяется функцией g (или функцией g^π), а все остальные функциональные переменные — подходящими функциями, существование которых для функций из множества G следует из определения формулы Φ .

Теперь уже нетрудно построить искомую формулу Ψ языка ГЕН. Строим формулу Ψ' языка ГЕН, которая определяет однородную функцию h . Считая, что у формул Ψ' и Φ нет общих переменных, добавляем конъюнктивно к формуле Ψ' равенство

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_{2s-1}, t_{2s}, z, w) = z,$$

где φ — главная функциональная переменная формулы Ψ' . В результате получим формулу Ψ языка ГЕН, которая, как нетрудно видеть, будет определять (по главной функциональной переменной формулы Φ) множество G . Теорема доказана.

Приведем еще одно обобщение языка FE — будем использовать в формулах языка FEC кванторы по предметным переменным. Получившийся в результате этого обобщения язык обозначим через QFEC. Чтобы не рассматривать в формулах одновременно свободные и связанные переменные, будем в дальнейшем предполагать, что во всех формулах языка QFEC, определяющих множества функций из P_N , все предметные переменные связаны, т.е. формулы являются замкнутыми. Как и выше, будем обозначать через QFEC класс всех множеств, определяемых с помощью формул языка QFEC и состоящих из попарно сопряженных функций.

Теорема 4. *Классы FEC и QFEC совпадают.*

Доказательство. Поскольку язык QFEC является расширением языка FEC, далее рассматриваем лишь редукцию формул языка QFEC к формулам языка FEC. Пусть Φ — произвольная замкнутая формула языка QFEC, которая определяет множество G . Будем предполагать, что формула Φ приведена к пренексному виду

$$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \Phi_1,$$

где $Q_1, \dots, Q_n$ — кванторы $\exists$ или $\forall$, $x_1, \dots, x_n$ — все предметные переменные формулы Φ , а формула Φ_1 (языка FEC) не содержит кванторов. Покажем, как из формулы Φ получить формулу Φ' языка FEC, которая определяет множество G . Проведем элиминирование кванторов в формуле Φ .

Предположим сначала, что кванторная приставка в формуле Φ начинается с квантора существования, $Q_1 = \dots = Q_s = \exists$ и либо $Q_{s+1} = \forall$, либо $s = n$. Для устранения кванторов $\exists x_1, \dots, \exists x_s$ введем s новых одноместных функциональных переменных $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ и образуем формулу

$$(\forall y_1)(\forall y_2)((\varphi_1(y_1) = \varphi_1(y_2)) \& \dots \& (\varphi_s(y_1) = \varphi_s(y_2))), \quad (9)$$

где y_1, y_2 — различные переменные, не входящие в множество $\{x_1, \dots, x_n\}$. Понятно, что формуле (9) удовлетворяют только наборы из s функций-констант (не обязательно различных). Поэтому если к формуле (9) конъюнктивно добавить формулу

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_s)(Q_{s+1} x_{s+1}) \dots (Q_n x_n) \Phi_2,$$

где формула Φ_2 образована из формулы Φ_1 заменой каждого вхождения переменной x_i ($1 \leq i \leq s$) термом $\varphi_i(x_i)$, то получится формула, которая будет определять исходное множество G .

Итак, далее можно предполагать, что кванторная приставка формулы Φ начинается с квантора общности. Если в приставке отсутствуют кванторы существования, то при отбрасывании кванторов общности образуется формула Φ' языка FEC, которая, очевидно, также определяет множество G .

Пусть теперь в кванторной приставке имеются кванторы существования. В этом случае применяем известный в математической логике прием, основанный на разрешающих функциях Сколема [1,3]. Именно, рассмотрим в формуле Φ произвольную переменную x_i , которая связана квантором существования. Пусть $x_{j_1}, \dots, x_{j_t}$ — все переменные формулы Φ , которые в кванторной приставке предшествуют переменной x_i и связаны кванторами общности. Вводим новую t -местную функциональную переменную φ_i , заменяем в бескванторной части формулы Φ каждое вхождение переменной x_i термом $\varphi_i(x_{j_1}, \dots, x_{j_t})$ и удаляем квантор $\exists x_i$ из кванторной приставки.

После проведения описанной процедуры для всех переменных x_i , связанных кванторами существования, образуется формула Φ' языка QFEC, которая не содержит кванторов существования и которая, как нетрудно видеть, определяет исходное множество G . Действительно, по правилам логики утверждение о существовании значений переменной x_i (стоящей после переменных $x_{j_1}, \dots, x_{j_t}$, которые связаны кванторами общности) эквивалентно утверждению о существовании t -местной функции, дающей по произвольным значениям переменных $x_{j_1}, \dots, x_{j_t}$ какое-либо значение переменной x_i . Вместе с тем при определении истинности формулы Φ' как раз и используется пункт о существовании t -местной функции, соответствующей функциональной переменной φ_i . Остается заметить, что формула Φ' , не содержащая в кванторной приставке кванторов существования, с содержательной точки зрения может рассматриваться как искомая формула языка FEC. Формально же в формуле Φ' необходимо опустить кванторную приставку.

Для любого множества $G \subseteq P_N$ будем обозначать через $\hat{G}$ множество всех функций, сопряженных с функциями из G . Как отмечалось выше, всякое множество функций, определяемое в языке FE над множеством однородных функций (а также в языках FEC и QFEC), имеет вид $\hat{G}$. Полностью охарактеризовать данный класс множеств пока не удастся. Однако некоторые примеры показывают, что этот класс достаточно богат и содержит множества, обладающие рядом интересных алгебраических свойств. В качестве примера приведем формулу языка QFEC, которая с содержательной точки зрения определяет множество функций, задающих на N линейный порядок с наименьшим элементом.

Искомая формула Φ языка QFEC будет иметь кванторную приставку, которая начинается кванторами $\exists v_1, \exists v_2$, с последующими кванторами общности по переменным x, y, z . Бескванторная часть формулы Φ представима в виде конъюнкции ряда формул. Переменные v_1, v_2 формулы Φ содержательно играют роль истинностных значений «истина» и «ложь», причем переменная v_2 одновременно будет выступать в роли наименьшего элемента линейного порядка.

Начнем с того, что первым конъюнктивным сомножителем бескванторной части формулы Φ поставим формулу $v_1 \neq v_2$ (как обычно, эта формула заменяет

формулу $\neg(v_1 = v_2)$). Далее с использованием функциональной переменной φ мы хотим «изобразить» произвольный линейный порядок на множестве N , имеющий наименьшим элементом «число» v_2 . Эта цель достигается с помощью формулы

$$\begin{aligned} &(\varphi(x, y) = v_1 \vee \varphi(x, y) = v_2) \& (\varphi(x, x) = v_1) \& \\ &((\varphi(x, y) = v_1) \& (\varphi(y, z) = v_1) \Rightarrow (\varphi(x, z) = v_1)) \& \\ &((\varphi(x, y) = v_1) \& (\varphi(y, x) = v_1) \Rightarrow (x = y)) \& \\ &(\varphi(x, y) = v_1 \vee \varphi(y, x) = v_1) \& (\varphi(v_2, x) = v_1). \end{aligned} \tag{10}$$

В ней второй-четвертый конъюнктивные сомножители задают частичный порядок, пятый завершает определение линейного порядка, а шестой постулирует, что v_2 — наименьший элемент этого порядка. Нетрудно видеть, что формуле (10) (с учетом неравенства $v_1 \neq v_2$ и распределения кванторов по переменным) удовлетворяет любая двуместная функция, которая принимает лишь значения v_1, v_2 и которая с помощью выделенного значения v_1 определяет линейный порядок на множестве N .

Автор признателен рецензенту, указавшему на пробел в доказательстве.

Список литературы

1. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., *Математическая логика*. Наука, Москва, 1979.
2. Клини С. К., *Введение в метаматематику*. ИЛ, Москва, 1957.
3. Клини С. К., *Математическая логика*. Мир, Москва, 1973.
4. Марченков С. С., *Проблемы кибернетики* (1982), №39 85–106.
5. Марченков С. С., О классификациях функций многозначной логики с помощью групп автоморфизмов. *Дискретный анализ и исследование операций* (2011) **18**, №4, 66–76.
6. Марченков С. С., Оператор замыкания в многозначной логике, базирующийся на функциональных уравнениях. *Дискретный анализ и исследование операций* (2010) **17**, №4, 18–31.
7. Марченков С. С., О решениях систем функциональных уравнений автоматного типа. *Дискретный анализ и исследование операций* (2012) **19**, №4, 86–98.
8. Марченков С. С., FE-классификация функций многозначной логики. *Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика* (2011), №2 32–39.
9. Марченков С. С., Фёдорова В. С., О решениях систем функциональных булевых уравнений. *Дискретный анализ и исследование операций* (2008) **15**, №6, 48–57.
10. Марченков С. С., Фёдорова В. С., О решениях систем функциональных уравнений многозначной логики. *Доклады РАН* (2009) **426**, №4, 448–449.
11. Марченков С. С., Фёдорова В. С., Решения систем функциональных уравнений многозначной логики. *Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика* (2009), №4 29–33.

12. Роджерс Х., *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*. Мир, Москва, 1972.
13. Фёдорова В. С., SFE-замкнутые классы трехзначной логики. *Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ* (2010), № 7 23–33.

Статья поступила 17.12.2012.