Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Летуновский, Цикловые индексы автомата, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 4, 24–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1254>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:01:23

Цикловые индексы автомата

© 2013 г. А. А. Летуновский

Вводится понятие цикловых индексов автомата как пары положительных чисел (b, q) , эффективно вычисляемых по автомату. Показано, что множество периодов константных автоматов, выражимых суперпозициями данного автомата, булевых функций и задержки — суть делители членов геометрической прогрессии $b, bq, bq^2, \dots$. Отсюда следуют алгоритм проверки выразимости константных автоматов, а также теорема о проверке выразимости множества всех автоматов с ограниченным числом состояний.

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, функции вида $g : E_2^n \rightarrow E_2$ называются булевыми функциями, их множество обозначается через $\mathbf{P}_2$. Пусть E_2^∞ — множество всех сверхслов вида $a(1)a(2)\dots$, где $a(j) \in E_2$, $j = 1, 2, \dots$. Через $\mathbf{N}$ обозначим множество натуральных чисел. Для $k, l \in \mathbf{N}$ будем обозначать через $k|l$ то, что k делит l . Пусть

$$f : (E_2^\infty)^n \rightarrow (E_2^\infty)^m$$

— *автоматная функция (a-функция)*, т.е. она задается рекуррентно соотношениями (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1(1) = q_0, \\ \dots \\ q_s(1) = q_0, \\ q_1(t+1) = \phi_1(q_1(t), \dots, q_s(t), a_1, \dots, a_n), \\ \dots \\ q_s(t+1) = \phi_s(q_1(t), \dots, q_s(t), a_1, \dots, a_n), \\ b_1(t) = \psi_1(q_1(t), \dots, q_s(t), a_1, \dots, a_n), \\ \dots \\ b_m(t) = \psi_m(q_1(t), \dots, q_s(t), a_1, \dots, a_n). \end{array} \right. \quad (1)$$

Вектор $q = (q_1, \dots, q_s)$ задает состояние a -функции f , q_0 — её начальное состояние, буквы $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_m)$ называются входной и выходной буквами, а сверхслова $a(1)a(2)\dots$ и $b(1)b(2)\dots$ — входными и выходными сверхсловами, соответственно. Вектор-функции ϕ и ψ называются функциями переходов и выходной функцией, соответственно, а шестерка

$$(E_2^n, E_2^s, E_2^m, \phi, \psi, q_0)$$

— автоматом, порождающим функцию f . Далее в тексте мы иногда будем использовать для автомата обозначение $(A, Q, B, \phi, \psi, q_0)$, при этом предполагая что $A \subseteq E_2^n, Q \subseteq E_2^s, B \subseteq E_2^m$. Автомат называется *автоматом Медведева*, если $B = Q, \psi(a, q) \equiv q$.

Обычным образом доопределим функции ϕ и ψ на слова [1]:

$$\begin{aligned}\phi(q, a(1) \dots a(t)) &= \phi(\phi \dots \phi(q, a(1)), \dots, a(t-1)), a(t)), \\ \psi(q, a(1), \dots, a(t)) &= \psi(\phi(q, a(1)), \dots, a(t-1)), a(t))\end{aligned}$$

и определим рекурсивно функцию

$$\bar{\psi}(q, a(1), \dots, a(t)) = \bar{\psi}(q, a(1), \dots, a(t-1))\psi(\phi(q, a(1) \dots a(t-1)), a(t)).$$

Класс всех a -функций обозначим через $\mathbf{P}$. Класс всех a -функций с не более чем d состояниями обозначим $\mathbf{P}^d$.

В этом классе обычным образом введем операции суперпозиции. Для суперпозиции будем использовать модификации операций из [2]:

$$\begin{aligned}(\eta f)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1), \\ (\varepsilon f)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n), \\ (\varpi f)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1, x_3, \dots, x_n), \\ (\delta f)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \\ (f * g)(x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}) &= f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}).\end{aligned}$$

Пусть $R \subseteq \mathbf{P}$; обозначим через $[R]$ множество a -функций, получающихся из R с помощью операций суперпозиции. Рассматривая системы автоматов, будем считать без ограничения общности, что R состоит из одного автомата, так как задачу выразимости для нескольких автоматов можно свести к задаче для одного автомата, являющегося их параллельным соединением.

Автоматную функцию G_0 , задаваемую уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = a(t), \\ b(t) = q(t), \end{cases}$$

назовём автоматной функцией "задержки".

Пусть $< R > = [R \cup \{\mathbf{P}_2, G_0\}]$.

Назовем автомат групповым, если все $\phi_a(q) = \phi(a, q)$, $a \in A$, являются биекциями на Q .

Назовем автоматную функцию, не зависящую от входа, константной автоматной функцией. Множество всех константных автоматных функций обозначим $\mathbf{K}$. Без ограничения общности константную автоматную функцию можно отождествить со сверхсловом, которое является его выходом.

Пусть сверхслово β можно представить в виде $\beta = \gamma\alpha^\infty$. Выберем из всех таких представлений то, в котором γ и α имеют наименьшую длину. Для выбранного представления назовем γ наименьшим *предпериодом* сверхслова β , а α — наименьшим *периодом* сверхслова β , а слова вида $\underbrace{\alpha\alpha\dots\alpha}_n$ будем также называть периодами

сверхслова β . Обозначим $|\alpha|$ длину слова α .

Для множества константных автоматных функций $K' \subseteq K$ обозначим через $\Theta(K')$ множество длин минимальных периодов сверхслов $\{\beta_{K_i} : K_i \in K'\}$. Для случая одного слова $\beta = \gamma\alpha^\infty$ будем считать, что $\Theta(\beta) = |\alpha|$.

Нашей задачей будет описание множества $\Theta(< R > \cap K)$ для произвольного множества R .

Лемма 1. Пусть $K_1, K_2 \in K$, причем $\Theta(K_2) \mid \Theta(K_1)$. Тогда $K_2 \in < K_1 >$.

Лемма 1 показывает, что, имея в замыкании хотя бы одну константу периода l , мы можем выразить любую константу периода, делящего l .

Замечание 1. Если $|\Theta(< R > \cap K)| < \infty$, то

$$\Theta(< R > \cap K) = \{l \in N : l | \max(\Theta(< R > \cap K))\}.$$

Замечание 2. Если $K_1, K_2 \in K$, то

$$\max(\Theta(< \{K_1\} \cup \{K_2\} >)) = \text{НОК}(\max(\Theta(K_1)), \max(\Theta(K_2))).$$

Фактически конечное $K' \subset K$ имеет множеством периодов делители одного числа $l = \max(\Theta(K'))$. Тем самым всякое конечное множество константных функций таково, что $< K' > = \{\beta_l\}$, где β_l — константа периода l .

Из известной леммы об удлинении периода констант автоматом [3] следует, что множество длин периодов констант, выражимых автоматом, имеет вид $2^{l_1} 3^{l_2} \dots p_i^{l_i-1}$, где p_i — простые числа, $p_i \leq |Q|$, а l_i — натуральные числа.

Для некоторого автомата M и произвольного слова $\alpha \in A^*$ обозначим через $s_\alpha = \phi(q, \alpha)$ — подстановку на множестве состояний, задаваемую этим словом, через π_α — разбиение множества состояний Q на классы отличимости $Q_1, \dots, Q_s$ этим словом. Состояния q_i и q_j принадлежат одному классу отличимости, если $\bar{\psi}(q_i, \alpha) = \bar{\psi}(q_j, \alpha)$.

Обозначим $d_\alpha = (s_\alpha, \pi_\alpha)$. Пусть $D_l = \{d_\alpha, |\alpha| = l\}$.

Рассмотрим последовательность $n_1, n_2, \dots$ натуральных чисел, связанную с автоматом M , где n_{i+1} получается из n_i следующим рекурсивным способом.

Пусть $c_i = \{\alpha_i\}$ — множество сверхслов с длиной периода $l | n_i$. Рассмотрим множество $M(c_i)$ выходных сверхслов автомата A после подачи на него слов из c_i . Очевидно, что $M(c_i)$ конечно. Тогда положим $n_{i+1} = \text{НОК}(\Theta(M(c_i)))$. Из замечаний 1, 2 следует, что n_i — максимальная длина периода констант, выражимых схемой глубины i .

По построению $n_i | n_{i+1}$. Далее мы докажем, что $m_i = \frac{n_{i+1}}{n_i}$ — периодическая последовательность.

Лемма 2. Если $D_l = D_m$ для некоторых l, m , то $D_{lk} = D_{mk}$ для любого $k \in N$.

Доказательство. Для доказательства включения $D_{lk} \subseteq D_{mk}$ покажем, что для каждого $\alpha, |\alpha| = lk$ существует такое $\alpha_1, |\alpha_1| = mk$, что $d_\alpha = p_{\alpha_1}$. Пусть $\alpha = \beta_1 \dots \beta_k$, где $|\beta_i| = l$. Тогда $s_\alpha = s_{\beta_1} * \dots * s_{\beta_k}$, а π_α будет получаться сначала как разбиение, задаваемое β_1 , затем как измельчение этого разбиения разбиением, задаваемым словом $\beta_1 \beta_2$, и т.д. Для каждого $p_{\beta_i} \in D_l$ существует такое $p_{\gamma_i} \in D_m$, что $p_{\beta_i} = p_{\gamma_i}$. Рассмотрим слово $\alpha_1 = \gamma_1 \dots \gamma_k$. Для него выполнено $p_\alpha = p_{\alpha_1}$. Действительно $s_{\alpha_1} = s_{\gamma_1} * \dots * s_{\gamma_k}$, а π_{α_1} будет получаться сначала как разбиение, задаваемое γ_1 , затем как измельчение этого разбиения разбиением $\gamma_1 \gamma_2$ и т.д.

Таким образом, $D_{lk} \subseteq D_{mk}$; обратное включение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 3. Последовательность m_i периодична.

Доказательство. Пусть нашлись такие n_i, n_j , что $D_{n_i} = D_{n_j}$. Из построения m_i следует, что m_i — это фактически длина максимального удлинения, получаемого при подаче слов длины n_i на автомат A и затем взятия НОК этих удлинений. Очевидно, что множество удлинений однозначно задается множеством D_{n_i} . Таким образом, $m_i = m_j$, и из леммы 2 следует, что $D_{n_{i+1}} = D_{n_{j+1}}$, а тогда $m_{i+1} = m_{j+1}$, и лемма доказана.

Теперь определим *цикловые индексы* автомата через алгоритм их вычисления.

1. Вычисляем последовательность (n_i, D_i) до тех пор, пока не найдутся такие $j < i$, что $D_{n_i} = D_{n_j}$.
2. Назовем $b = n_j$ безусловным цикловым индексом автомата, $q = \frac{n_i}{n_j}$ — главным цикловым индексом автомата.

Теорема 1. *Если R — конечное множество автоматных функций, то*

$$\Theta(< R > \cap K) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{t|bq^i\},$$

где b, q — цикловые индексы системы автоматов R .

Доказательство. Пусть константа β содержится в замыкании нашего множества; рассмотрим схему, выражающую данную константу. Пусть глубина этой схемы равна L . Тогда по построению последовательности n_i и из леммы об удлинении периодов констант следует что $\Theta(\beta)|n_L$.

Рассмотрим произвольную константу периода bq^i . По лемме 2, а также по построению чисел b и q , данная константа выражима схемой подходящей глубины. Теорема доказана.

Приведем несколько утверждений, непосредственно следующих из теоремы 1.

Теорема 2. *Если R — конечное множество автоматных функций и β — константная автоматная функция, то существует алгоритм, позволяющий проверить свойство $\beta \in < R >$.*

Следствие 1. *Если R — конечное множество автоматных функций, то существует алгоритм, позволяющий проверить свойство $|\Theta(< R > \cap K)| < \infty$.*

Теорема 3 (Необходимое условие выразимости). *Пусть R_1, R_2 — конечные множества автоматов и $R_2 \in [R_1]$; пусть b_1, q_1, b_2, q_2 — цикловые индексы R_1 и R_2 соответственно. Тогда*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \{t|b_2q_2^i\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \{t|b_1q_1^i\}$$

и

$$\Theta(< R_2 > \cap K) \subseteq \Theta(< R_1 > \cap K).$$

В работе [4] Д.Н. Бабин ввел определение "копирования" одного автомата другим и доказал "Лемму о копировании".

Определение 1 ([4]). Пусть f и g — автоматы с одинаковым числом входов и одинаковым числом выходов. Скажем, что автоматная функция g копирует автоматную функцию f , если найдутся такие натуральные n, j, s ($n \leq j$), что для любого $l = 0, 1, 2, \dots$ и любой входной последовательности достаточной длины значение автоматной функции g в момент $j + sl$ совпадает со значением автоматной функции f в момент $n + sl$, т.е. $f(n + sl) = g(j + sl)$.

Пусть K_s - константный автомат $\underbrace{(1\dots 0)}_s^\infty$.

Заметим что свойство копирования автоматной функции f автоматной функцией g алгоритмически проверяемо.

Лемма о копировании [4]. *Если f — автоматная функция Медведева и g копирует f с параметрами n, j, s , то $f \in \langle g \cup K_s \rangle$.*

Техника цикловых индексов позволяет усилить данную лемму.

Лемма 4. *Если f — автоматная функция Медведева, g копирует f и выполнено условие $|\Theta(\langle g \rangle \cap K)| = \infty$, то $f \in \langle g \rangle$.*

Автоматную функцию Медведева F_2 , с функциями переходов и выходов

$$\phi(q_1, 00) = q_1, \quad \phi(q_2, 00) = q_2,$$

$$\phi(q_1, 01) = q_1, \quad \phi(q_2, 01) = q_1,$$

$$\phi(q_1, 10) = q_2, \quad \phi(q_2, 10) = q_2,$$

$$\phi(q_1, 11) = q_2, \quad \phi(q_2, 11) = q_1$$

назовём универсальным автоматом с 2 состояниями.

Теорема 4. *Если R — конечное множество автоматов, то свойство $\langle R \cup F_2 \rangle \supseteq R^d$ алгоритмически проверяемо при всех натуральных d .*

Доказательство теоремы 4 приведено в работе [9] и основано на утверждениях, полученных в данной работе, а также в работах [6,7,8].

Работа выполнена на кафедре МАТИС механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова под руководством профессора Д.Н. Бабина.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
2. Мальцев А. И., *Итеративные алгебры Поста*. Изд-во ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1976.
3. Loomis Jr H. H., Completeness of sets of delayed logic devices. *IEEE Trans. Electronic Computers* (1965) **EC-14**, 157-172.
4. Бабин Д. Н., О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции. *Дискрет. матем.* (1989) **1**, №4, 423-431.
5. Летуновский А. А., О выразимости константных автоматов суперпозициями. *Интеллектуальные системы* (2009) **13**, №1-4, 397-406.
6. Алешин С. В., Об одном следствии теоремы Крона-Роудза. *Дискрет. матем.* (1999) **11**, №4, 101-109.
7. Бабин Д. Н., О суперпозициях ограниченно детерминированных функций ограниченного веса. *Логико-алгебраические конструкции* (1992) 21-27.

-
8. Летуновский А. А., О выразимости суперпозициями автоматов с разрешимыми группами. *Интеллектуальные системы* (2010) **14**, №1-4, 379-392.
 9. Летуновский А. А., О задаче выразимости автоматов относительно суперпозиции для систем с фиксированной добавкой. *Интеллектуальные системы* (в печати).

Статья поступила 09.11.2012.