Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Карацуба, Быстрое вычисление константы Каталана через приближения, полученные преобразованиями типа куммеровских, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 4, 74–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1259>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:55:52

Быстрое вычисление константы Каталана через приближения, полученные преобразованиями типа куммеровских

© 2013 г. Е. А. Карацуба

Построено новое быстрое приближение константы Каталана, позволяющее вычислить эту константу со сложностью, близкой к оптимальной
Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00657).

1. Введение

Постоянная Каталана определяется соотношением

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \quad (1)$$

Ряд (1) сходится медленно и не пригоден для эффективного вычисления константы G . Ранее (см. [1]) для быстрого вычисления G использовались формулы Рамануджана (см. [2], стр. 264, стр. 289, см. также [3]), позволяющие выразить эту константу через быстро сходящиеся ряды g_1 и g_2

$$g_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j!)^2}{(2j)!(2j+1)^2} = \frac{8}{3}G - \frac{\pi}{3} \log(2 + \sqrt{3}), \quad (2)$$

$$g_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{2^{3j}(j!)^2(2j+1)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \log 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}G. \quad (3)$$

Построенный автором метод Быстрого Вычисления Е-функций (БВЕ, см. [4]–[11], см. также [1]) даёт возможность просуммировать ряды g_1 и g_2 со сложностью, близкой к оптимальной (см. [1]). С учётом того, что с той же сложностью посредством БВЕ можно вычислить и классическую константу π (см. [4]), а элементарные алгебраические функции можно быстро вычислить методом Ньютона, отсюда следует, что константа Каталана вычисляется по формулам Рамануджана (4), (5) с суммарной сложностью, близкой к оптимальной. Других способов быстрого вычисления константы Каталана известно не было.

Однако оказалось, что для константы Каталана можно построить быстрые приближения, в которых не будут участвовать другие классические константы, а Каталанова константа будет приближаться последовательностью рациональных чисел.

В настоящей статье такие приближения будут построены с помощью преобразований типа куммеровских (см. [12], [13], см. также [14]) и потому будут называться *куммеровскими приближениями*.

Заметим, что само понятие *быстрое вычисление* (*быстрый алгоритм*) в ходе развития теории быстрых вычислений претерпевало изменения. Быстрое вычисление определяется функцией битовой сложности вычисления. Первые задачи об оценке этой функции были поставлены А.Н. Колмогоровым во второй половине 1950-х годов (см. [15]). С момента появления алгоритма умножения А. А. Карацубы в 1960 г. (см. [15], [16], [17]), под “быстрым вычислением” или вычислением с помощью “быстрого алгоритма” понимается вычисление функции, операции и т.д., битовая сложность которого по порядку ниже, чем битовая сложность вычисления этой же функции, операции и т.д. посредством алгоритмов, существовавших ранее. Ниже будет дано современное определение “быстрого алгоритма”. Любое “быстрое вычисление” состоит из нескольких этапов. Первым из них является построение быстрого приближения к вычисляемому значению. Затем на основе этого приближения строится быстрый алгоритм. Поскольку с помощью БВЕ можно быстро вычислять любые ряды вида

$$f_1 = f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a(j)}{b(j)} z^j, \quad (4)$$

$$f_2 = f_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a(j)}{b(j)} \frac{z^j}{j!}, \quad (5)$$

если $a(j)$, $b(j)$ являются такими целыми числами, что $|a(j)| + |b(j)| \leq (C \cdot j)^K$, $|z| < 1$, где K и C — константы, а z есть алгебраическое число, то, отыскав приближения G вида (4), (5), мы можем получить разные БВЕ-алгоритмы вычисления постоянной Каталана.

Попытки отыскать такие приближения были и осуществлялись, в том числе, с помощью так называемой экспериментальной математики, т.е. программным путём, без доказательства справедливости полученных представлений для G (о надеждах авторов, что найденная таким образом формула для постоянной Каталана верна, см. [15]).

С другой стороны, недавно Вальтер Ван Аспхе сообщил автору, что в библиотеке университета Лёйвена в ноябре 2013 им найден манускрипт Каталана, ранее не переводившийся на другие языки (см. [16]), где выведена формула, быстро приближающая G последовательностью рациональных чисел. Отметим, что это приближение Каталана отличается от приближения, полученного в настоящей статье: Каталан находит представление G в виде арифметической суммы двух быстросходящихся знакопеременных рядов, тогда как в настоящей статье построено представление G в виде суммы двух быстросходящихся знакопостоянных рядов. Обе формулы: формула, доказанная Каталаном, и формула, доказанная в настоящей статье, применимы для быстрого вычисления G посредством БВЕ со сложностью, близкой к оптимальной. Доказательств для других быстрых приближений константы Каталана последовательностью рациональных чисел пока не найдено. Автор благодарит Вальтера Ван Аспхе за любезное сообщение о манускрипте Каталана и содержащейся в нём формуле Каталана.

2. Получение быстрого приближения константы Каталана посредством преобразований типа куммеровских

Здесь и далее считаем, что

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n, \quad (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1), \quad (2n-3)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3),$$

$$(4n-1)!!!! = 1 \cdot 3 \cdot 7 \dots (4n-1), \quad (4n-3)!!!! = 1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3),$$

$$n! = 1, \text{ если } n = 0; \quad (2n-3)!! = 1, \text{ если } n = 1.$$

Запишем (1) в виде

$$G = G_2 - G_1, \quad (6)$$

$$G_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^2}, \quad (7)$$

$$G_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^2}, \quad (8)$$

Теорема 1. *Имеет место следующее куммеровское приближение постоянной Каталана G*

$$G = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}((n-1)!)^3}{(2n-1)!!} \left(\frac{6n-3}{((4n-3)!!!!)^2} - \frac{6n-1}{((4n-1)!!!!)^2} \right). \quad (9)$$

Доказательство. Обозначим через $\tilde{S}(p)$ сумму ряда

$$\tilde{S}(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)^2(4k+3)^2(4k+7)^2 \dots (4k+4p-5)^2}. \quad (10)$$

Преобразуем (10), воспользовавшись схемой из [14]. Определим $\tilde{D}_k(p)$ как разность

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k(p) &= \frac{4k-1+x}{(4k-1)^2(4k+3)^2 \dots (4k+4p-5)^2} - \frac{4k+3+x}{(4k+3)^2(4k+7)^2 \dots (4k+4p-1)^2} \\ &= \frac{(4k-1+x)(4k+4p-1)^2 - (4k+3+x)(4k-1)^2}{(4k-1)^2(4k+3)^2(4k+7)^2 \dots (4k+4p-5)^2(4k+4p-1)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

при некотором, определяемом в дальнейшем, параметре x . Упростим числитель дроби (11)

$$\tilde{D}_k(p) = \frac{4(2p-1)(4k-1)^2 + (4k-1)((4p)^2 + 8px) + x(4p)^2}{(4k-1)^2(4k+3)^2(4k+7)^2 \dots (4k+4p-5)^2(4k+4p-1)^2} \quad (12)$$

и при $k \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{4(2p-1)} \tilde{D}_k(p) = \frac{1}{4(2p-1)} \left(\frac{4k-1+x}{(4k-1)^2(4k+3)^2 \dots (4k+4p-5)^2} - \right.$$

$$-\frac{4k+3+x}{(4k+3)^2(4k+7)^2 \dots (4k+4p-1)^2} \Big) \sim \frac{1}{(4k-1)^2(4k+3)^2 \dots (4k+4p-5)^2}. \quad (13)$$

Если заменить члены ряда (10) этими эквивалентными им разностями из (13), то получим новый ряд

$$\tilde{D}(p) = \frac{1}{4(2p-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{D}_k(p) \quad (14)$$

с частной суммой ряда

$$\begin{aligned} \tilde{D}_K(p) &= \frac{1}{4(2p-1)} \sum_{k=1}^K \tilde{D}_k(p) = \\ &= \frac{1}{4(2p-1)} \left(\frac{3+x}{3^2 \cdot 7^2 \cdot \dots \cdot (4p-1)^2} - \frac{7+x}{7^2 \cdot 11^2 \cdot \dots \cdot (4p+3)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{7+x}{7^2 \cdot 11^2 \cdot \dots \cdot (4p+3)^2} - \dots - \frac{4K+3+x}{(4K+3)^2 \dots (4K+4p-1)^2} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

и суммой ряда

$$\tilde{D}(p) = \frac{1}{4(2p-1)} \frac{3+x}{3^2 \cdot 7^2 \cdot \dots \cdot (4p-1)^2}. \quad (16)$$

Обозначим через $\tilde{r}(p)$ разность

$$\tilde{r}(p) = \tilde{S}(p) - \tilde{D}(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\rho}_k(p),$$

где с учётом (12), (14)

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_k(p) &= \frac{(4k+4p-1)^2 - (4k-1)^2 - (4k-1) \frac{(4p)^2 + 8px}{4(2p-1)} - \frac{x(4p)^2}{4(2p-1)}}{(4k-1)^2(4k+3)^2 \dots (4k+4p-5)^2(4k+4p-1)^2} = \\ &= \frac{(4k-1) \left(8p - \frac{8px + (4p)^2}{4(2p-1)} \right) + (4p)^2 \left(1 - \frac{x}{4(2p-1)} \right)}{(4k-1)^2(4k+3)^2 \dots (4k+4p-5)^2(4k+4p-1)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Выберем теперь произвольный параметр x , положив

$$x = 6p - 4. \quad (18)$$

В этом случае в числителе дроби (17) выражение, стоящее в скобках при множителе $(4k-1)$, обращается в ноль, и в результате получаем

$$\tilde{\rho}_k(p) = \frac{8p^3}{2p-1} \frac{1}{(4k-1)^2(4k+3)^2 \dots (4k+4p-5)^2(4k+4p-1)^2}. \quad (19)$$

Из (14)–(19) находим

$$\tilde{S}(p) = \tilde{D}(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8p^3}{2p-1} \frac{1}{(4k-1)^2(4k+3)^2 \dots (4k+4p-5)^2(4k+4p-1)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4(2p-1)} \frac{3+6p-4}{3^2 \cdot 7^2 \cdot \dots \cdot (4p-1)^2} + \frac{8p^3}{2p-1} \tilde{S}(p+1) = \\
&= \frac{6p-1}{4(2p-1)((4p-1)!!!!)^2} + \frac{8p^3}{2p-1} \tilde{S}(p+1).
\end{aligned} \tag{20}$$

Из (10) и (20) вычисляем

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)^2} = \frac{5}{4 \cdot 3^2} + 8\tilde{S}(2) = \frac{5}{36} + 8\tilde{S}(2), \\
8\tilde{S}(2) &= 8 \frac{11}{4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} + 8 \cdot \frac{8^2}{3} \tilde{S}(3) = \frac{88}{5292} + \frac{8^3}{3} \tilde{S}(3).
\end{aligned}$$

И так далее. Отсюда находим следующую рекуррентную формулу

$$\frac{8^{p-1}((p-1)!)^3}{(2p-3)!!} \tilde{S}(p) = \frac{8^{p-1}(6p-1)((p-1)!)^3}{4(2p-1)!!((4p-1)!!!!)^2} + \frac{8^p(p!)^3}{(2p-1)!!} \tilde{S}(p+1). \tag{21}$$

Таким образом, из (19)–(21) имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)^2} &= \frac{5}{36} + \frac{88}{5292} + \frac{2176}{800415} + \dots + \frac{8^{m-1}(6m-1)((m-1)!)^3}{4(2m-1)!!((4m-1)!!!!)^2} + \dots + \\
&+ \frac{8^p(p!)^3}{(2p-1)!!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)^2(4k+3)^2 \dots (4k+4p-1)^2}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Последний член в (22)

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(p) &= \frac{8^p(p!)^3}{(2p-1)!!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)^2(4k+3)^2 \dots (4k+4p-1)^2} \leq \frac{2^{3p}(p!)^3}{(2p-1)!!} \frac{2}{((4p+3)!!!!)^2} \leq \\
&\leq \frac{2 \cdot 2^{3p}(\Gamma(p+1))^3 \Gamma(\frac{1}{2})(\Gamma(\frac{3}{4}))^2}{2^p \Gamma(p+\frac{1}{2}) (\Gamma(p+1+\frac{3}{4}) \cdot 4^{p+1})^2} \leq \frac{2^{3p+1} \Gamma(\frac{1}{2})(\Gamma(\frac{3}{4}))^2 p \Gamma(p)}{2^{5p+4} \Gamma(p+\frac{1}{2})} < \frac{p}{2^{2p}}
\end{aligned}$$

стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$. Здесь учтено, что $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = 1.77... < 2$, $\Gamma(\frac{3}{4}) = 1.22... < 2$, а также, что

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)^2(4k+3)^2 \dots (4k+4p-1)^2} &= \frac{1}{((4p+3)!!!!)^2} \left(1 + \frac{3^2}{(4p+7)^2} + \right. \\
&+ \frac{3^2 \cdot 7^2}{(4p+7)^2(4p+11)^2} + \dots \left. \right) \leq \frac{1}{((4p+3)!!!!)^2} \left(1 + \frac{3^2}{4^2(p+1+3/4)^2} + \right. \\
&+ \frac{3^2}{4^2(p+2+3/4)^2} + \dots \left. \right) \leq \frac{1}{((4p+3)!!!!)^2} \left(1 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 \zeta(2) \right) < \frac{2}{((4p+3)!!!!)^2}.
\end{aligned}$$

Отсюда окончательно получаем

$$G_1 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}(6n-1)((n-1)!)^3}{(2n-1)!!((4n-1)!!!!)^2}. \tag{23}$$

Куммеровское приближение для константы G_2 из (8) находится аналогично. При этом вместо суммы $\tilde{S}(p)$ рассматривается сумма ряда $\tilde{\tilde{S}}(p)$,

$$\tilde{\tilde{S}}(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-3)^2(4k+1)^2(4k+5)^2 \dots (4k+4p-7)^2}. \quad (24)$$

Рекуррентная формула для $\tilde{\tilde{S}}(p)$ будет иметь вид

$$\frac{8^{p-1}((p-1)!)^3}{(2p-3)!!} \tilde{\tilde{S}}(p) = \frac{8^{p-1}(6p-3)((p-1)!)^3}{4(2p-1)!!((4p-3)!!!!)^2} + \frac{8^p(p!)^3}{(2p-1)!!} \tilde{\tilde{S}}(p+1). \quad (25)$$

Проводя вычисления по формуле (25) последовательно получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-3)^2} &= \frac{3}{4} + \frac{6}{25} + \frac{128}{2025} + \dots + \frac{8^{m-1}(6m-3)((m-1)!)^3}{4(2m-1)!!((4m-3)!!!!)^2} + \dots + \\ &+ \frac{8^p(p!)^3}{(2p-1)!!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-3)^2(4k+1)^2 \dots (4k+4p-3)^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как последний член в (26) стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$, то окончательно для постоянной G_2 получаем

$$G_2 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}(6n-3)((n-1)!)^3}{(2n-1)!!((4n-3)!!!!)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}((n-1)!)^3}{(2n-3)!!((4n-3)!!!!)^2}. \quad (27)$$

Из (6)–(8) и (23), (25) получаем куммеровское приближение постоянной Каталана G (9).

Замечание 1. Поскольку (чем мы уже воспользовались при оценке остаточного члена в формуле (22))

$$(2n-1)!! = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})2^n}{\Gamma(\frac{1}{2})}, \quad (4n-1)!!!! = \frac{\Gamma(n+\frac{3}{4})4^n}{\Gamma(\frac{3}{4})}, \quad (4n-3)!!!! = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{4})4^n}{\Gamma(\frac{1}{4})},$$

куммеровское приближение константы Каталана (9) можно записать в виде

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Gamma(n))^3 \Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2n+5} \Gamma(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{\Gamma^2(n+\frac{1}{4})} (6n-3) - \frac{\Gamma^2(\frac{3}{4})}{\Gamma^2(n+\frac{3}{4})} (6n-1) \right), \quad (28)$$

или более компактно, через бэта-функции

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n, \frac{1}{2})}{2^{2n+5}} \left(B^2\left(n, \frac{1}{4}\right) (6n-3) - B^2\left(n, \frac{3}{4}\right) (6n-1) \right). \quad (29)$$

Замечание 2. На практике можно несколько улучшить эффективность вычисления постоянной G , подсчитав отдельно сумму k первых дробей из (1) и применяя преобразование типа куммеровского к остальному ряду. Таким образом получим

$$\begin{aligned}
G &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B\left(n, \frac{1}{2}\right)}{2^{2n+5}} \left(B^2\left(n, \frac{1}{4}\right) (6n-3) - B^2\left(n, \frac{3}{4}\right) (6n-1) \right) = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B\left(n, \frac{1}{2}\right)}{2^{2n+5}} \left(B^2\left(n, \frac{1}{4}\right) \frac{6n+1}{(4n+1)^2} - B^2\left(n, \frac{3}{4}\right) (6n-1) \right) = \\
&= \frac{8}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B\left(n, \frac{1}{2}\right)}{2^{2n+5}} \left(B^2\left(n, \frac{1}{4}\right) \frac{6n+1}{(4n+1)^2} - B^2\left(n, \frac{3}{4}\right) \frac{3^2(6n+3)}{(4n+3)^2} \right) = \\
&= \frac{10016}{11025} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B\left(n, \frac{1}{2}\right)}{2^{2n+5}} \left(B^2\left(n, \frac{1}{4}\right) \frac{5^2(6n+5)}{(4n+1)^2(4n+5)^2} - B^2\left(n, \frac{3}{4}\right) \frac{3^2 \cdot 7^2(6n+7)}{(4n+3)^2(4n+7)^2} \right).
\end{aligned}$$

И так далее. Однако, с точки зрения сложности вычисления, такие преобразования заметного эффекта не дают.

3. БВЕ-алгоритм вычисления константы Каталана

Будем считать, что числа записаны в двоичной системе счисления (для десятичной системы счисления алгоритмы те же, и все рассуждения такие же, с той разницей, что под словами "с точностью до n знаков" в случае двоичной системы подразумевается точность 2^{-n} , для десятичных же вычислений — 10^{-n} , и это нужно учитывать в соответствующих оценках). Здесь n — натуральное число, $n \rightarrow +\infty$.

Применим к вычислению постоянной Каталана метод БВЕ (см. [4]–[11], см. также [1]). Для этого просуммируем с помощью БВЕ-процесса оба ряда G_1 и G_2 по отдельности, используя их куммеровские приближения (23) и (27) соответственно. Перепишем (23) в виде

$$G_1 = \frac{1}{2^5} S, \quad (30)$$

где

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{3k}(6k-1)((k-1)!)^3}{(2k-1)!!((4k-1)!!!!)^2}. \quad (31)$$

Сначала оценим остаток ряда (31).

$$S = S_r + R_r, \quad (32)$$

где

$$S_r = \sum_{k=1}^r \frac{2^{3k}(6k-1)((k-1)!)^3}{(2k-1)!!((4k-1)!!!!)^2}, \quad (33)$$

$$R_r = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{2^{3k}(6k-1)((k-1)!)^3}{(2k-1)!!((4k-1)!!!!)^2} = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{(6k-1)(\Gamma(k))^3 \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma^2\left(k + \frac{3}{4}\right)}. \quad (34)$$

Учитывая, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1.77... < 2$, $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1.22... < 2$, а также что при $x \geq r+1 \geq 2$, гамма-функция $\Gamma(x)$ монотонно возрастает, из (34) имеем

$$R_r \leq \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{3(6k-1)}{2^{2k}} \leq \frac{6r+7}{2^{2r}}. \quad (35)$$

Из (35) следует, что при

$$r = n, \quad n \geq 4, \quad (36)$$

остаток ряда (31) $R_n \leq 2^{-n}$. Возьмём

$$r = 2^m, m \geq 1; \quad 2^{m-1} < n \leq 2^m \quad (37)$$

членов ряда (31). Из вышеприведённых оценок следует, что для того чтобы вычислить сумму ряда (31) с точностью до n знаков, достаточно вычислить сумму (33) при условии (36). Пусть $s_{r-\nu}(0)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, r-1$, определяются равенствами

$$s_{r-\nu}(0) = \frac{2^{3(r-\nu)}(6(r-\nu)-1)((r-\nu-1)!)^3}{(2(r-\nu)-1)!!((4(r-\nu)-1)!!!!)^2}, \quad (38)$$

По определению S_r имеем

$$S_r = s_1(0) + s_2(0) + \dots + s_r(0). \quad (39)$$

Вычисление суммы (39) проведём за m шагов БВЕ-процесса. Объединяя на каждом шаге слагаемые S_r последовательно попарно и вынося за скобки "очевидный" общий множитель, будем вычислять на каждом шаге (до последнего) только целые значения выражений в скобках. При наличии ограничений на длину чисел (в реальных компьютерах), этот алгоритм можно модифицировать, образуя в скобках дроби и вычисляя отдельно целые числители и целые знаменатели соответствующих дробей. Здесь однако, мы предполагаем, что ограничений на количество знаков, участвующих в вычислениях чисел, нет, и наша цель лишь получить хорошую оценку суммарной сложности вычисления, когда точность n растёт, $n \rightarrow +\infty$.

Таким образом, после первого шага имеем:

$$S_r = s_1(1) + s_2(1) + \dots + s_{r_1}(1), \quad r_1 = \frac{r}{2}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} s_{r_1-\nu}(1) &= s_{r-2\nu}(0) + s_{r-2\nu-1}(0) = \frac{2^{3(r-2\nu)}(6(r-2\nu)-1)((r-2\nu-1)!)^3}{(2(r-2\nu)-1)!!((4(r-2\nu)-1)!!!!)^2} + \\ &+ \frac{2^{3(r-2\nu-1)}(6(r-2\nu-1)-1)((r-2\nu-2)!)^3}{(2(r-2\nu-1)-1)!!((4(r-2\nu-1)-1)!!!!)^2} = \\ &= \frac{2^{3(r-2\nu-1)}((r-2\nu-2)!)^3}{(2(r-2\nu)-1)!!((4(r-2\nu)-1)!!!!)^2} \alpha_{r_1-\nu}(1). \end{aligned} \quad (41)$$

На первом шаге вычисляются числа $\alpha_{r_1-\nu}(1)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, r_1-1$, $r_1 = \frac{r}{2} = 2^{m-1}$:

$$\alpha_{r_1-\nu}(1) = 2^3(r-2\nu-1)^3(6r-12\nu-1) + (2r-4\nu-1)(4r-8\nu-1)^2(6r-12\nu-7). \quad (42)$$

После второго шага имеем:

$$S_r = s_1(2) + s_2(2) + \dots + s_{r_2}(2), \quad r_2 = \frac{r_1}{2} = \frac{r}{2^2},$$

$$s_{r_2-\nu}(2) = s_{r_1-2\nu}(1) + s_{r_1-2\nu-1}(1) = \frac{2^{3(r-4\nu-1)}((r-4\nu-2)!)^3}{(2(r-4\nu)-1)!!((4(r-4\nu)-1)!!!!)^2} \alpha_{r_2-\nu}(2).$$

На втором шаге вычисляются числа $\alpha_{r_2-\nu}(2)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, r_2 - 1$, $r_2 = \frac{r_1}{2} = 2^{m-2}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{r_2-\nu}(2) &= 2^6(r-2^2\nu-3)^3(r-2^2\nu-2)^3\alpha_{r_1-2\nu}(1)+ \\ &+ (2r-2^3\nu-3)(2r-2^3\nu-1)(4r-2^4\nu-5)^2(4r-2^4\nu-1)^2\alpha_{r_1-2\nu-1}(1). \end{aligned}$$

И так далее. После j -го, $1 < j \leq m$, шага получаем:

$$\begin{aligned} S_r &= s_1(j) + s_2(j) + \dots + s_{r_j-1}(j) + s_{r_j}(j), \quad r_j = \frac{r}{2^j}, \\ s_{r_j-\nu}(j) &= \frac{2^{3(r-2^j\nu-2^{j-1})}((r-2^j\nu-2^{j-1})!)^3}{(2(r-2^j\nu)-1)!!((4(r-2^j\nu)-1)!!!!)^2} \alpha_{r_j-\nu}(j). \end{aligned}$$

На j -м шаге вычисляются числа $\alpha_{r_j-\nu}(j)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, r_j - 1$, $r_j = \frac{r_{j-1}}{2} = \frac{r}{2^j} = 2^{m-j}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{r_j-\nu}(j) &= 2^{3 \cdot 2^{j-1}} \left(\frac{(r-2^j\nu-2^{j-1})!}{(r-2^j\nu-2^j)!} \right)^3 \alpha_{r_{j-1}-2\nu}(j-1) + \\ &+ \frac{(2(r-2^j\nu)-1)!!}{(2(r-2^j\nu-2^{j-1})-1)!!} \left(\frac{(4(r-2^j\nu)-1)!!!!}{(4(r-2^j\nu-2^{j-1})-1)!!!!} \right)^2 \alpha_{r_{j-1}-2\nu-1}(j-1). \end{aligned} \quad (43)$$

И так далее. После m шагов БВЕ-процесса имеем:

$$S_r = s_{r_m}(m) = s_1(m) = \frac{2^3 \alpha_{r_m}(m)}{(2r-1)!!((4r-1)!!!!)^2}, \quad r_m = \frac{r}{2^m} = 1. \quad (44)$$

На последнем m -м шаге вычисляем одно целое число $\alpha_{r_m}(m) = \alpha_1(m)$, целые числа $(2r-1)!!$, $(4r-1)!!!!$, возводим последнее число в квадрат и вычисляем произведение $(2r-1)!!((4r-1)!!!!)^2$, а затем производим одно деление с точностью до n знаков целого числа $8\alpha_{r_m}(m)$ на целое число $(2r-1)!!((4r-1)!!!!)^2$. Результатом будет число, равное (см. (30)–(32)) значению суммы S с точностью до n знаков. Поделив его на 2^5 получим значение G_1 с точностью до $n+5$ знаков.

Аналогичным образом строится БВЕ-алгоритм для вычисления G_2 на основе куммеровского приближения (27). Вычисляя разность найденных значений G_1 и G_2 (см. (6)), в результате получим константу Каталана G с точностью до n знаков.

4. Сложность вычисления константы Каталана

Чтобы доказать, что вышеприведённый БВЕ-алгоритм является быстрым алгоритмом, нужно оценить сложность проводимых на каждом шаге вычислений и оценить суммарную сложность вычисления константы G в битовых операциях (см. [17], [18]).

Напомним, что сложностью вычисления заданной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (с точностью до n знаков) называется количество битовых операций $s_f(n)$, достаточное для вычисления функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ с точностью до n знаков посредством данного алгоритма. При этом функция сложности умножения (двух n -значных чисел) имеет специальное обозначение $M(n)$.

Первым быстрым алгоритмом (не известно ни одной более ранней публикации с каким-либо быстрым методом или алгоритмом) явился алгоритм быстрого умножения, найденный А. А. Карацубой (см. [17], [18], [19]) в 1960 г., сложность которого

$$M(n) = O(n^\alpha), \quad \alpha = \log_2 3 = 1,5849 \dots$$

Впоследствии идея А. А. Карацубы была обобщена, использована напрямую или в модифицированном виде под многими названиями (такими, например, как "divide and conquer" и "binary splitting") и во многих алгоритмах, самыми известными из которых, по-видимому, являются Быстрое Преобразование Фурье и алгоритмы умножения чисел и матриц.

Первым обобщением умножения А. А. Карацубы, был алгоритм умножения А. Л. Тоома (см. [20]). Следующим и, вероятно, вторым обобщением явился алгоритм самого А. А. Карацубы со сложностью

$$M(n) = O(n \log n \log \log n \log \log \log n \dots). \quad (45)$$

Однако статья с этим алгоритмом не была опубликована (см. [21]). Затем А. Шёнхаге и Ф. Штрассен разработали алгоритм (см. [22]) со сложностью вычисления

$$M(n) = O(n \log n \log \log n), \quad (46)$$

который долгое время оставался наибо́льшим (о новом 2007 года алгоритме умножения М. Фюрера см. [23]). Далее при учёте сложности умножения будем использовать оценку Шёнхаге-Штрассена (46) (можно пользоваться также оценкой (45) или оценкой Фюрера из [23], однако обе они гораздо более громоздки, и потому предпочтение отдано (46)).

Таким образом, будем называть "быстрым" такой алгоритм вычисления функции $f = f(x)$, что для этого алгоритма

$$s_f(n) = O(M(n) \log^c n),$$

где c есть константа, и для $M(n)$ справедлива оценка Шёнхаге-Штрассена. Ясно, что для любого алгоритма и любой функции f , выполняется неравенство:

$$s_f(n) > n.$$

(Заметим, что только запись числа с точностью до n знаков требует не меньше, чем $n + 1$ операций.) Следовательно, для быстрого алгоритма

$$n < s_f(n) < c_1 n \log^{c+1} n \log \log n < n^{1+\varepsilon},$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n_1(\varepsilon)$. Тем самым, быстрым алгоритмам (быстрым вычислениям) соответствует правильный порядок оценки сверху $s_f(n)$ по n при $n \rightarrow \infty$. Так, построенный автором БВЕ-процесс суммирования рядов (4), (5) имеет соответственно сложность (см., например, [1], [4])

$$s_{f_1}(n) = O(M(n) \log^2 n) = O(n \log^3 n \log \log n) = O(n^{1+\varepsilon}),$$

$$s_{f_2}(n) = O(M(n) \log n) = O(n \log^2 n \log \log n) = O(n^{1+\varepsilon}),$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n_1(\varepsilon)$, и является быстрым процессом.

Воспользовавшись БВЕ-алгоритмом §3, можно доказать следующее утверждение

Теорема 2. Для сложности $s_G(n)$ вычисления постоянной Каталана G справедлива оценка

$$s_G(n) = (O(M(n) \log^2 n) = O(n \log^3 n \log \log n)). \quad (47)$$

Доказательство. Оценим сложность вычисления константы G_1 .

Подсчитаем количество битовых операций, достаточное для вычисления суммы S с точностью 2^{-n} . Для этого мы производим вычисление суммы S_r , $r = 2^m$; $2^{m-1} < n \leq 2^m$, за m шагов БВЕ-процесса, описанного в параграфе 3.

Сначала, пользуясь формулой (43), подсчитаем количество операций, достаточное для вычисления на $j+1$ -ом шаге, $j+1 \leq m$, чисел $\alpha_{r_{j+1}-\nu}(j+1)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, r_{j+1} - 1$, $r_{j+1} = \frac{r}{2^{j+1}}$, предполагая при этом, что числа $\alpha_\mu(j)$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, уже вычислены. Для этого, прежде всего, оценим сверху разрядность чисел, с которыми проводятся вычисления на $(j+1)$ -м шаге.

Пусть

$$\alpha(j) = \max_{\mu} \alpha_{\mu}(j).$$

Так как

$$\begin{aligned} \left(\frac{(r - 2^{j+1}\nu - 2^j)!}{(r - 2^{j+1}\nu - 2^{j+1})!} \right)^3 &\leq (r^{2^j})^3, \\ \frac{(2r - 2^{j+2}\nu - 1)!!}{(2r - 2^{j+2}\nu - 2^{j+1} - 1)!!} &\leq (2r)^{2^j}, \\ \left(\frac{(4r - 2^{j+3}\nu - 1)!!!!}{(4r - 2^{j+3}\nu - 2^{j+2} - 1)!!!!} \right)^2 &\leq ((4r)^{2^j})^2, \end{aligned}$$

то из (43) имеем

$$\alpha(j+1) \leq \alpha(j) \left((2r)^{3 \cdot 2^j} + (2r)^{2^j} (4r)^{2^{j+1}} \right) \leq (4r)^{2^{j+2}}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\alpha(j+1)}{\alpha(j)} \leq (4r)^{2^{j+2}}, \quad \frac{\alpha(j+1)}{\alpha(1)} \leq (4r)^{2^{j+3}-2^3}. \quad (48)$$

Поскольку $\alpha(1) \leq 240r^4$ в силу (42), из (48) получаем, что

$$\alpha(j+1) \leq (4r)^{2^{j+3}}. \quad (49)$$

Для вычисления произведений

$$\begin{aligned} &\frac{(r - 2^{j+1}\nu - 2^j)!}{(r - 2^{j+1}\nu - 2^{j+1})!}, \\ &\frac{(2r - 2^{j+2}\nu - 1)!!}{(2r - 2^{j+2}\nu - 2^{j+1} - 1)!!}, \end{aligned}$$

$$\frac{(4r - 2^{j+3}\nu - 1)!!!!}{(4r - 2^{j+3}\nu - 2^{j+2} - 1)!!!!}$$

в [4] построен БВЕ-процесс, позволяющий вычислить первое из произведений со сложностью

$$O\left(\sum_{i=1}^j M(2^i \log r)\right),$$

а второе и третье произведения со сложностями

$$O\left(\sum_{i=1}^j M(2^i \log 2r)\right) \quad \text{и} \quad O\left(\sum_{i=1}^j M(2^i \log 4r)\right)$$

соответственно. Чтобы возвести $2^j \log r$ -значное число $\frac{(r-2^{j+1}\nu-2^j)!}{(r-2^{j+1}\nu-2^{j+1})!}$ в куб, достаточно $O(M(2^{j+1} \log r))$ операций, а чтобы возвести $2^j \log 4r$ -значное число $\frac{(4r-2^{j+3}\nu-1)!!!!}{(4r-2^{j+3}\nu-2^{j+2}-1)!!!!}$ в квадрат, достаточно $O(M(2^j \log 4r))$ операций. Чтобы перемножить $2^j \log 2r$ -значное число $\frac{(2r-2^{j+2}\nu-1)!!}{(2r-2^{j+2}\nu-2^{j+1}-1)!!}$ и $2^{j+1} \log 4r$ -значное число $\left(\frac{(4r-2^{j+3}\nu-1)!!!!}{(4r-2^{j+3}\nu-2^{j+2}-1)!!!!}\right)^2$, достаточно $O(M(2^{j+1} \log 4r))$ операций. Следовательно, для вычисления $\alpha_{r_{j+1}-\nu}(j+1)$ (см. формулу (42) для $j+1$), достаточно $O(A(j+1))$ операций, где

$$\begin{aligned} A(j+1) &= \\ &= \sum_{i=1}^j M(2^i \log 4r) + M(2^{j+1} \log 4r) = \\ &= O(2^{j+1} \log r (j+1 + \log \log r) (\log(j+1 + \log \log r))) . \end{aligned}$$

Чтобы вычислить все $\alpha_{r_{j+1}-\nu}(j+1)$, которых ровно $r_{j+1} = 2^{-(j+1)}r$, достаточно

$$O(r_{j+1} A(j+1))$$

операций. Тогда для вычисления S достаточно

$$\begin{aligned} &O\left(\sum_{j=1}^{m-1} r_{j+1} A(j+1)\right) = \\ &= O\left(r \sum_{j=1}^{m-1} \log r (j+1 + \log \log r) (\log(j+1 + \log \log r))\right) = \\ &= O(r \log^3 r \log \log r) . \end{aligned} \tag{50}$$

Количество битовых операций, достаточное для вычисления константы G_2 , подсчитывается аналогично, и для сложности вычисления G_2 также справедлива оценка

(50). Из (6), (36), (46) и (50) следует, что для вычисления постоянной Каталана G с точностью до n знаков достаточно

$$O(n \log^3 n \log \log n) = O(M(n) \log^2 n) \quad (51)$$

операций.

Список литературы

1. Karatsuba E. A., Fast computation of some special integrals of mathematical physics. *Sci. Comput., Validated Numerics, Interval Methods* (2001) 29–41.
2. Berndt B. C., *Ramanujan's notebooks*, 1. Springer, 1985.
3. Ramanujan S., *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*. Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
4. Карацуба Е. А., Быстрое вычисление трансцендентных функций. *Проблемы передачи информации* (1991) **27**, №4, 87–110.
5. Карацуба Е. А., Быстрое вычисление $\zeta(3)$. *Проблемы передачи информации* (1993) **29**, №1, 68–73.
6. Karatsuba Catherine A., Fast Evaluation of Bessel Functions. *Integral Transforms and Special Functions* (1993) **1**, №4, 269–276.
7. Карацуба Е. А., Быстрое вычисление дзета-функции Римана $\zeta(s)$ для целых значений аргумента s . *Проблемы передачи информации* (1995) **31**, №4, 69–80.
8. Карацуба Е. А., Быстрое вычисление дзета-функции Гурвица и L -рядов Дирихле. *Проблемы передачи информации* (1998) **34**, №4, 342–353.
9. Karatsuba Ekatherine A., Fast evaluation of hypergeometric function by FEE. *Singapore: World Scientific. Ser. Approx. Decompos* (1999) **11**, 303–314.
10. Karatsuba E. A., On the computation of the Euler constant γ . *J. Numer. Algor.* (2000) **24**, №1-2, 83–97.
11. Karatsuba E. A., Fast computation of $\zeta(3)$ and of some special integrals using the Ramanujan formula and polylogarithms. *BIT Num. Math.* (2001) **41**, №4, 722–730.
12. Kummer E. E., Über die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen. *J. für die reine und angew. Math.* (1835) **13**, 171–183.
13. Kummer E. E., Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu berechnen. *J. für die reine und angew. Math.* (1837) **16**, 206–214.
14. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления (1959).
15. Bailey D. H., Borwein J. M., Mattingly A., Wightwick G., The computation of previously inaccessible digits of π^2 and Catalan's constant. *Notices of AMS* (2013) **50**, 844–854.
16. Catalan E., Memoire sur la transformation des series et sur quelques integrales defines. *Mem. Acad. Roy. Belgique* (1865) **33**, 1–50.
17. Karacuba A., Berechnungen und die Kompliziertheit von Beziehungen. *EIK* (1975) **11**, 10–12.
18. Карацуба А. А., Сложность вычислений. *Труды Математического института им. В.А. Стеклова* (1995) **211**, 169–183.
19. Карацуба А., Офман Ю., Умножение многозначных чисел на автоматах. *Доклады АН СССР* (1962) **145**, №2, 293–294.

-
20. Тоом А.Л., О сложности схемы из функциональных элементов, реализующей умножение целых чисел. *Доклады АН СССР* (1963) **150**, №2, 496–498.
 21. Карацуба А. А., Комментарии к моим работам, написанные мной самим. В сб.: *Совр. пробл. матем.*, **17**. МИАН, Москва, 2013, с. 7–29.
 22. Schönhage A., V. Strassen. *Schnelle Multiplikation großer Zahlen. Comput.* (1971) **7**, 281–292.
 23. Fürer M., Faster integer multiplication. *SIAM J. Comp.* (2009) **39**, №3, 979–1005.

Статья поступила 05.07.2013.