Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Ронжин, Расширения информационных протоколов, основанных на отображениях конечных множеств, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 4, 18–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 06:36:48

Расширения информационных протоколов, основанных на отображениях конечных множеств

© 2005 г. А. Ф. Ронжин

Вводятся понятия информационного протокола на конечном множестве, его расширения и разложения. Приводятся примеры махинаций злоумышленника с информационными протоколами. Предлагается система защиты информационных протоколов, допускающих разложение на большое количество расширений, и вычисляются некоторые вероятностные характеристики ее качества.

1. Определения и основные свойства

Зафиксируем конечное непустое множество S . Пусть $C(S)$ — множество всех отображений множества S в себя. Далее всюду полагаем, что $\emptyset$ — пустое множество, для любого подмножества $X \subset S$ и отношения $\rho \in C(S)$ запись $|X|$ обозначает мощность множества X , $\rho(X)$ и $\rho^{-1}(X)$ — образ и прообраз множества X , соответственно.

Пару отображений (φ, ψ) , где $\varphi, \psi \in C(S)$, будем называть информационным протоколом на S (далее всюду протоколом). Протокол (φ, ψ) будем называть прозрачным, если $|\varphi(S)| = |\psi(\varphi(S))|$, и мутным, если $|\varphi(S)| > |\psi(\varphi(S))|$.

Протокол (φ_r, ψ_r) будем называть расширением протокола (φ, ψ) , если

$$\varphi_r(S) \subset \varphi(S), \quad (1)$$

$$\psi(\varphi_r(s)) = \psi(\varphi(s)) \text{ для всех } s \in S. \quad (2)$$

Расширение (φ_r, ψ_r) протокола (φ, ψ) будем называть строгим, если

$$|\psi_r(\varphi_r(S))| = |\psi(\varphi(S))|,$$

и противоречивым, если

$$|\psi_r(\varphi_r(S))| > |\psi(\varphi(S))|. \quad (3)$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что для расширения (φ_r, ψ_r) справедливы неравенства

$$|S| \geq |\varphi(S)| \geq |\varphi_r(S)| \geq |\psi(\varphi(S))| \geq 1. \quad (4)$$

Для противоречивого расширения из (3) и (4) следует, что

$$|S| \geq |\varphi(S)| \geq |(\varphi_r(S))| \geq |\psi_r(\varphi_r(S))| > |\psi(\varphi(S))| \geq 1. \quad (5)$$

Семейство расширений протокола (φ, ψ)

$$R(\varphi, \psi) = \{(\varphi_r, \psi_r), r \in R\},$$

где R — конечное множество, назовем разложением протокола (φ, ψ) , если

$$\varphi(S) = \bigcup_{r \in R} \varphi_r(S), \quad \varphi_{r_1}(S) \cap \varphi_{r_2}(S) = \emptyset, \quad r_1 \neq r_2. \quad (6)$$

Разложение $R(\varphi, \psi)$ назовем регулярным, если $|\varphi_r(S)| = |\psi(\varphi(S))|$ для всех $r \in R$.

Кроме того, пусть ξ — некоторая случайная величина с значениями на S , вероятностями $\mathbf{P}\{\xi = s\} > 0, s \in S$, и

$$\mathbf{P}_{\varphi, \psi}(x, y) = \mathbf{P}_{\varphi, \psi}\{\varphi(\xi) = x, \psi(\varphi(\xi)) = y\}$$

— совместное распределение пары случайных величин $(\varphi(\xi), \psi(\varphi(\xi)))$, $x \in \varphi(S)$, $y \in \psi(\varphi(S))$. Очевидно, что $\mathbf{P}_{\varphi, \psi}(x, y) = \mathbf{P}\{\varphi(\xi) \in \varphi^{-1}(x)\}$, если $y = \psi(x)$, и 0 в противном случае.

По аналогии с [1] введем обозначения

$$\mathbf{P}_{\psi}(y) = \sum_{x \in \varphi(S)} \mathbf{P}_{\varphi, \psi}(x, y),$$

$$\mathbf{P}_{\varphi}(x) = \sum_{y \in \psi(\varphi(S))} \mathbf{P}_{\varphi, \psi}(x, y),$$

и определим среднюю взаимную информацию протокола (φ, ψ) как величину

$$\mathbf{I}(\varphi, \psi) = \sum_{x, y} \mathbf{P}_{\varphi, \psi}(x, y) \ln(\mathbf{P}_{\varphi, \psi}(x, y) / \mathbf{P}_{\psi}(y) \mathbf{P}_{\varphi}(x)).$$

Вычисления показывают, что

$$\mathbf{P}_{\varphi}(x) = \mathbf{P}\{\varphi(\xi) = x\}, \quad \mathbf{P}_{\psi}(y) = \mathbf{P}\{\psi(\varphi(\xi)) = y\}$$

и

$$\mathbf{I}(\varphi, \psi) = - \sum_{y \in \psi(\varphi(S))} \mathbf{P}_{\psi}(y) \ln \mathbf{P}_{\psi}(y). \quad (7)$$

Для $\mathbf{I}(\varphi, \psi)$ справедливы неравенства

$$0 \leq \mathbf{I}(\varphi, \psi) \leq - \sum_{x \in \varphi(S)} \mathbf{P}\{\varphi(\xi) = x\} \ln \mathbf{P}\{\varphi(\xi) = x\}, \quad (8)$$

причем слева равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$|\psi(\varphi(S))| = 1,$$

а равенство справа тогда и только тогда, когда протокол (φ, ψ) прозрачный.

Теорема 1 (теорема расширения). *Протокол (φ, ψ) имеет противоречивое расширение (φ_r, ψ_r) тогда и только тогда, когда он мутный. При этом существует его расширение (φ_r, ψ_r) такое, что средняя взаимная информация $I(\varphi, \psi)$ меньше средней взаимной информации этого расширения $I(\varphi_r, \psi_r)$.*

Доказательство. Необходимость условий утверждения следует из соотношений (5).

Докажем достаточность. Пусть протокол (φ, ψ) является мутным. Существуют $y_1, y_2, \dots, y_k \in \varphi(S)$, где $k \geq 2$, такие, что $\psi(y_1) = \dots = \psi(y_k) = z_1$, и существуют $z_2, \dots, z_k \in \varphi(S) \setminus \psi(\varphi(S))$. Пусть $\psi_r(y_j) = z_j$ для всех $j = 1, \dots, k$, и $\psi_r(s) = \psi(s)$, если $s \in S \setminus \{y_1, \dots, y_k\}$.

Очевидно, что

$$|\psi_r(\varphi_r(S))| = |\psi(\varphi(S))| + k - 1 > |\psi(\varphi(S))|.$$

Это неравенство завершает доказательство достаточности условий теоремы.

Средняя взаимная информация протокола (φ_r, ψ_r) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} I(\varphi_r, \psi_r) &= I(\varphi, \psi) + \mathbf{P}\{\psi(\xi) \in \{y_1, y_2, \dots, y_k\}\} \ln \mathbf{P}\{\psi(\xi) \in \{y_1, y_2, \dots, y_k\}\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^k (-\mathbf{P}\{\varphi(\xi) = y_i\} \ln \mathbf{P}\{\varphi(\xi) = y_i\}). \end{aligned}$$

Сумма последних двух слагаемых положительна.

Доказательство теоремы завершено.

Следствие 1. *Любой протокол имеет расширение, являющееся прозрачным.*

Теорема 2 (теорема разложения). *Протокол (φ, ψ) имеет разложение на m расширений тогда и только тогда, когда*

$$m \leq \min_{y \in \psi(\varphi(S))} |\psi^{-1}(y) \cap \varphi(S)|.$$

Доказательство. Пусть существует разложение (φ, ψ) на m расширений. Тогда для всех s из S

$$\psi(\varphi(s)) = \psi(\varphi_{r_1}(s)) = \dots = \psi(\varphi_{r_m}(s)), \quad r_i \in R, \quad i = 1, \dots, m. \quad (9)$$

В силу (6) для всех s из S и $i \neq j$

$$\varphi_{r_i}(s) \neq \varphi_{r_j}(s). \quad (10)$$

Пусть $y_m \in \psi(\varphi(S))$ таково, что

$$|\psi^{-1}(y_m) \cap \varphi(S)| = \min_{y \in \psi(\varphi(S))} |\psi^{-1}(y) \cap \varphi(S)|.$$

Тогда в y_m переходят не более, чем $|\psi^{-1}(y_m)|$ элементов из $\varphi(S)$, следовательно, среди $\varphi_{r_1}(s), \dots, \varphi_{r_m}(s)$ при $s \in \varphi^{-1}(\psi^{-1}(y_m))$ не более $|\psi^{-1}(y_m)|$ различных элементов из S , и для выполнения (10) необходимо выполнение условия

$$m \leq |\psi^{-1}(y_m)|.$$

Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть

$$|\psi(\varphi(S))| = \{y_1, \dots, y_k\}, \quad m_i = |\psi^{-1}(y_i) \cap \varphi(S)|, \\ X_i = \{x_{i,1} \dots, x_{i,m_i}\} = \psi^{-1}(y_i) \cap \varphi(S), \quad i = 1, \dots, k, \quad m \leq \min_i m_i.$$

Определим отображения $\varphi_r(s) = x_{i,r}$, $\psi_r(s) = s$, если $\varphi(s) \in X_i$, $r = 1, \dots, m$. Из построения видно, что (φ_r, ψ_r) является расширением (φ, ψ) и $\psi_{r_i}(S) \cap \psi_{r_j}(S) = \emptyset$ при $i \neq j$. Если $\varphi_1(S) \cup \dots \cup \varphi_m(S) = \varphi(S)$, то утверждение доказано. Это означает, что $m_1 = \dots = m_k = m = |\varphi(S)|/|\psi(\varphi(S))|$, и построенное разложение является регулярным.

В противном случае построим протокол (φ_0, ψ_0) следующим образом. Обозначим через X все элементы $\varphi(S)$, не вошедшие в $\varphi_1(S) \cup \dots \cup \varphi_m(S)$. Положим $\varphi_0(s) = \varphi(s)$, если s принадлежит $\varphi^{-1}(X)$, и $\varphi_0(s) = \varphi_m(s)$, если s не принадлежит $\varphi^{-1}(X)$, $\psi_0(s) = s$. По построению (φ_0, ψ_0) является расширением (φ, ψ) , $\varphi_0(S) \cup \dots \cup \varphi_{m-1}(S) = \varphi(S)$, и значит, $\{(\varphi_r, \psi_r), r = 0, 1, \dots, m-1\}$ является требуемым разложением.

Теорема доказана.

2. Примеры махинаций в мутных протоколах

Прикладной смысл данного в предыдущем пункте определения протокола применительно к информационным системам заключается в следующем.

Система информацию о своем состоянии s из S передает участнику системы в виде $\varphi(s)$, который, в свою очередь, принимает некоторое решение $\psi(\varphi(s))$. Использование мутных протоколов может привести к нарушению безопасности системы посредством действий злоумышленника (нарушителя безопасности системы), находящегося в системе, возможно в сговоре с сообщником (агентом), находящимся у участника системы.

К примерам таких нарушений можно отнести махинации в системах нотариальной заверки цифровых подписей [2], организации скрытых [3], потайных [4] каналов для обмена данными между злоумышленником и сообщником.

2.1. Махинации в системах нотариальной заверки цифровых подписей

Рассматривается сеть передачи сообщений x из конечного множества всех сообщений X между абонентами из множества $I = \{0, 1, \dots, N\}$, $N > 2$. Абонент 0 объявлен нотариусом. Каждый абонент i имеет набор секретных функций $d_{i,j}(x)$, $x \in X$, которые принимают значения из множества D , $j \in I$. Они используются абонентом i для создания цифровой подписи сообщений x абонентам j . Кроме того, i имеет набор секретных функций $b_{j,i}(x, d)$, $x \in X$, $d \in D$, которые принимают значение из множества D , $j \in I$. Они используются абонентом i для проверки правильности цифровой подписи d под сообщением x от абонента j . Абонент $i \in \{1, \dots, N\}$ знает только функции $d_{i,j}(x)$, $b_{j,i}(x, d)$, $j \in I$, $d \in D$. Нотариус знает все функции. Получив от абонента i вектор (i, j, x, d) нотариус создает вектор $s = (i, j, x, d, b_{i,j}(x, d))$ и через сеть передает его абоненту j . Обратим внимание на то, что функция $b_{i,j}(x, d)$ известна лишь нотариусу и абоненту j . Абоненту i она неизвестна.

Абонент j , получив через сеть вектор $s = (i, j, x, d, b)$, принимает решение о том, что сообщение x с подписью d подписано правильно, если вычисленное им значение $b_{i,j}(x, d)$ совпадает с b , и отображает его в себя. В противном случае, считает его неподписанным и отображает в вектор (i, i, x, d, b) .

Выше описан протокол (φ, ψ) для общения системы с участником j , в котором

$$S = \{(i, j, x, d, b)\}, \quad i \in I, \quad x \in X, \quad d \in D, \quad b \in B, \quad \varphi(s) = s,$$

$\psi(s) = s$, если $b_{i,j}(x, d) = b$, и $\psi(s) = (i, i, x, d, b)$, если $b_{i,j}(x, d) \neq b$.

Одна из функций механизма электронной цифровой подписи — это разрешение конфликта, в котором абонент j утверждает, что получил от i сообщение x , подписанное подписью d , а абонент i от этого отказывается. Обычно, условием разрешения конфликта в пользу абонента i является справедливость неравенства $d_{i,j}(x) \neq d$.

Пусть S_0 — множество тех состояний системы из S , для которых соответствующие им сообщения x приняты абонентом j как подписанные правильно.

Рассмотрим ограничение описанного выше протокола на множество S_0 .

Из приведенных выше определений видно, что для всех x

$$s_u = (i, j, x, d_{i,j}(x), b_{i,j}(x, d_{i,j}(x))) \in \psi(\varphi(S_0)).$$

Пусть для некоторых i , x эффективно вычислены при неизвестных функциях $b_{i,j}$, $b_{i_1,j}$ такие i_1 , x_1 , d_1 , что

$$b_{i,j}(x, d_{i,j}(x)) = b_{i_1,j}(x_1, d_1), (i_1, x_1, d_1) \neq (i, x, d_{i,j}(x)). \quad (11)$$

В силу условия (11) абонент j примет решение о том, что сообщение x_1 от абонента i_1 с подписью d_1 подписано правильно, то есть

$$\psi(\varphi(s_f)) = S_f.$$

В случае возникновения конфликта абонент i_1 будет отказываться от сообщения x_1 с подписью d_1 . Он сможет это сделать, если $d_{i,j}(x_1) \neq d_1$.

Замечание 1. Пусть функция $b_{i,j}(x, d)$ не зависит от d . Тогда любой абонент i_1 откажется от любого сообщения x_1 с подписью $d_1 \neq d_{i_1,j}(x_1)$, проведя описанную выше махинацию при $i = i_1$, $x = x_1$, если подменит

$$S_n = (i_1, j, x_1, d_{i_1,j}(x_1), b_{i_1,j}(x_1))$$

вектором

$$S_f = (i_1, j, x_1, d_1, b_{i_1,j}(x_1)).$$

Замечание 2. Пусть функция $b_{i,j}(x, d)$ не зависит от i . Тогда любой абонент i_1 откажется от любого сообщения x_1 с подписью $d_1 = d_{i,j}(x_1) \neq d_{i_1,j}(x)$, проведя описанную выше махинацию при $x = x_1$ в сговоре с абонентом i .

2.2. Потайные, скрытые каналы

Пусть протокол (φ, ψ) имеет разложение (6). Тогда злоумышленник (возможно, это программно-аппаратная закладка) может организовать канал передачи команд своему сообщнику (возможно, программно-аппаратной закладке), находящемуся у участника, следующим образом.

Не ограничивая общности, полагаем $R \subset S$.

Пусть злоумышленник желает передать сообщнику команду с именем r . Тогда, при передаче системой участнику сообщения о своем состоянии $\varphi(s)$, злоумышленник подменяет $\varphi(s)$ на $\varphi_r(s)$. В силу условий (1) и (2) на расширения (φ_r, ψ_r) участник не заметит такой подмены. Сообщник же примет решение об исполнении команды с именем r на том основании, что полученное им сообщение $\varphi_r(s)$ принадлежит множеству $\varphi_r(S)$. В силу условий (6) его решение будет однозначным и правильным. Конечно, такая подмена имеет смысл лишь в случае $|R| \geq 2$.

Далее рассмотрим довольно общий пример, встречающихся в практике ситуаций. На конечном промежутке времени T в фиксированные моменты времени в системе происходят события с признаками $0, 1, \dots, N$. Например, передаются сообщения со значениями атрибута $0, 1, \dots, N$ (см. [5]). Система передает информацию о событиях своему участнику. Информация о характере события (сообщения) недоступна никому, кроме системы и участника, а вот признаки (значения атрибутов) наблюдаемы. Рассмотрим в качестве модели наблюдений за передачей признаков событий выборку без возвращения.

Пусть множеством состояний системы S является множество выборов без возвращения из урны с $n + h_0$ шарами, содержащей $h_i \geq 1$ шаров цвета i , $i = 0, 1, \dots, N$, где $h_1 + \dots + h_N = n$. Будем обозначать это множество $S(h_0, \dots, h_N)$, а его элементы

$$s = (x_1, \dots, x_{n+h_0}), \quad x_j = 0, 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n + h_0.$$

Решения участника могут не зависеть от порядка следования всех событий или событий с некоторыми признаками. Поэтому для дальнейших обсуждений определим еще ряд множеств. Пусть

$I(n, h_0)$ — множество всех наборов целых чисел $i = (i_1, \dots, i_n)$ таких, что $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n + h_0$;

$S(h_1, \dots, h_N)$ — множество всех выборов без возвращения из урны с n шарами, содержащей $h_i \geq 1$ шаров цвета i , $i = 1, \dots, N$, которые будем обозначать $a = (a_1, \dots, a_n, a_j = 1, \dots, N, j = 1, \dots, n)$;

$T(i)$, $i \in I(n, h_0)$ — это множество всех элементов $S(h_1, \dots, h_N)$, у которых на местах i не стоит элемент цвета 0;

$P(a)$, $a \in S(h_1, \dots, h_N)$ — множество всех элементов $S(h_0, \dots, h_N)$, у которых есть подпоследовательность a , то есть существует $i \in I(n, h_0)$ такое, что $x_{i_v} = a_v$, $v = 1, \dots, n$.

Для $s \in S$ определим следующие отображения:

$\varepsilon(s) = s$ отображает элемент s в себя;

$\tau_t(s) = t$ отображает все элементы S в фиксированный элемент $t \in S$;

$\mu_i(s)$ отображает s в элемент, у которого шары цветов $1, \dots, N$ стоят в том же порядке, как в s , но на местах $i \in I(n, h_0)$;

$\pi_a(s)$ отображает s в элемент, у которого на тех местах, где стояли шары цветов $1, \dots, N$, стоит последовательность шаров $a \in S(h_1, \dots, h_N)$;

$\chi(s)$ принимает фиксированное значение на всех элементах множества S (это значит, что участнику важен лишь факт передачи информации о всех событиях за период T);

$\omega(s)$ принимает одно фиксированное значение на всех элементах множества P_a , $a \in S(h_1, \dots, h_N)$, причем, разные значения при разных a (это означает, что участнику важен лишь порядок, в котором следуют события с признаками $1, \dots, N$);

$\lambda(s)$ принимает одно фиксированное значение на всех элементах множества $T(i)$, $i \in I(n, h_0)$, причем, разные значения при разных i (это означает, что участнику важно лишь, в какие моменты времени происходили события с признаками $1, \dots, N$).

Теорема 3. Семейство протоколов $\{(\tau_t, \varepsilon), t \in S\}$ является регулярным разложением протокола (ε, χ) на $(n + h_0)!/(h_0! \dots h_n!)$ расширений.

Семейство протоколов $\{(\mu_i, \varepsilon), i \in I(n, h_0)\}$ является регулярным разложением протокола (ε, ω) на $(n + h_0)!/(h_0!n!)$ расширений.

Семейство протоколов $\{(\pi_a, \varepsilon), a \in S(h_1, \dots, h_N)\}$ является регулярным разложением протокола (ε, λ) на $n!/(h_1! \dots h_N!)$ расширений.

Справедливость утверждений теоремы следует из построения соответствующих отображений.

3. Использование расширений информационных протоколов для их защиты

По-видимому, наилучший способ не допускать нарушения безопасности информационных систем — это использовать только прозрачные протоколы. Однако, это не всегда возможно в связи с наличием таких требований к информационным системам как оперативность и ограниченность технических ресурсов.

Одним из возможных подходов к решению задач безопасности использования мутных протоколов, допускающих разложение на большое количество расширений, является следующий.

Пусть (φ, ψ) допускает разложение (6) и Q — подмножество R . Тогда, перед входом участника используется программно-техническое средство безопасности, которое случайным образом выбирает элемент r из Q и осуществляет преобразование его входа при помощи φ_r .

Рассмотрим далее лишь те протоколы (φ, ψ) , у которых отображения φ удовлетворяют условию

$$\varphi(\varphi(s)) = \varphi(s), \quad s \in S. \quad (12)$$

Такое ограничение логично, так как подготовленное для передачи состояние не имеет смысла еще раз изменять. Кроме того, для произвольного протокола (φ, ψ) существует взаимно однозначное отображение (подстановка) π множества S на себя такое, что отображение $\pi(\varphi(s))$ удовлетворяет условию (12), и $(\pi(\varphi(s)), \psi(\pi^{-1}(s)))$ эквивалентен протоколу (φ, ψ) с точки зрения конечных пользователей.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \{y_1, \dots, y_m\} &= \psi(\varphi(S)), & W_j &= \varphi^{-1}(\psi^{-1}(y_j)), \\ V_j &= \psi^{-1}(y_j) \cap \varphi(S), & j &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Лемма 1. Пусть для протокола (φ, ψ) выполнено условие (12). Тогда протокол (φ_r, ψ_r) является расширением протокола (φ, ψ) тогда и только тогда, когда для всех $j = 1, \dots, m$

$$\varphi_r(W_j) \subset V_j.$$

При этом $\varphi_r(V_j) \subset V_j$.

Доказательство. Из условия (12) следует, что

$$S = W_1 \cup \dots \cup W_m, \quad \varphi(S) = V_1 \cup \dots \cup V_m$$

являются такими разбиениями на непересекающиеся множества, что $W_j \supset V_j$, $j = 1, \dots, m$. Пусть (φ_r, ψ_r) является расширением и $s \in W_j$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\varphi(s) \in V_j$, $\varphi_r(s) \in \varphi(S)$, $\psi(\varphi_r(s)) = \psi(\varphi(s)) = y_j$, и следовательно, $\varphi_r(s) \in V_j$. Необходимость доказана. Достаточность доказывается проверкой условий (1) и (2).

Разложение

$$\{(\xi_z, \zeta_z), z \in Z\}, \quad \varphi(S) = \bigcup_{z \in Z} \xi_z(S), \quad \xi_{z_1}(s) \cap \xi_{z_2}(s) = \emptyset, \quad z_1 \neq z_2, \quad (13)$$

протокола (φ, ψ) будем называть вложенным по отношению к разложению (6), если выполнение условия $\xi_z(S) \cap \varphi_r(S) \neq \emptyset$ влечет выполнение условия $\xi_z(S) \supset \varphi_r(S)$.

Замечание 3. Если разложение (6) регулярное и $|\psi(\varphi(S))| = 1$, то любое разложение протокола (φ, ψ) будет вложенным по отношению к разложению (6).

Замечание 4. Пусть $S = S(h_0, h_1, \dots, h_N)$, $(\varphi, \psi) = (\varepsilon, \omega)$, $(\varphi_r, \psi_r) = (\mu_i, \varepsilon)$ (см. теорему 3) и в разложении (13) $\xi_z(S)$ переставляет все шары из $T(i)$, $i \in I(n, h_0)$, одним и тем же способом, тогда разложение (13) является вложенным по отношению к (ε, ω) .

Теорема 4. Пусть протокол (φ, ψ) имеет разложения (6) и (13), отображение φ удовлетворяет условию (12), ρ — некоторая случайная величина, принимающая значения из множества R .

Тогда для любых $s \in S$, $z \in Z$ справедливы соотношения

$$\mathbf{P}\{\rho \in \{r: \psi(\varphi_r(\varphi(s))) = \psi(\varphi(s))\}\} = 1, \quad (14)$$

$$\mathbf{P}\{\rho \in \{r: \psi(\varphi_r(\xi_z(s))) = \psi(\varphi(s))\}\} = 1. \quad (15)$$

Пусть, кроме того, разложение (13) является вложенным по отношению к разложению (6).

Тогда существуют такие множества $R(z) \subset R$, $z \in Z$, что $R(z_1) \cap R(z_2) = \emptyset$ при $z_1 \neq z_2$ и

$$R = \bigcup_{z \in Z} R(z), \quad \xi_z(S) = \bigcup_{r \in R(z)} \varphi_r(S), \quad (16)$$

и для любых $s \in S$, $z_1, z_2 \in Z$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\rho \in \{r: \varphi_r(\xi_{z_1}(s)) \in \xi_{z_2}(S)\}\} = \mathbf{P}\{\rho \in R(z_2)\}. \quad (17)$$

Доказательство. Для любых $r \in R$, $z \in Z$, $s \in W_j$, $j = 1, \dots, m$, из (2) и (12) следует справедливость цепочек равенств

$$\begin{aligned}\psi(\varphi_r(\varphi(s))) &= \psi(\varphi(\varphi(s))) = \psi(\varphi(s)), \\ \psi(\varphi_r(\xi_z(s))) &= \psi(\varphi(\xi_z(s))) = \psi(\xi_z(\xi_z(s))) = \psi(\xi_z(s)) = \psi(\varphi(s)).\end{aligned}$$

Из леммы 1 следует, что $\xi_z(\xi_z(s))$ и $\xi_z(s)$ лежат в V_j , а это означает совпадение двух крайних членов последних цепочек. Утверждения теоремы (14) и (15) доказаны.

Для каждого $z \in Z$ существует такое $R(z)$, что

$$\xi_z(S) = \bigcup_{r \in R(z)} \varphi_r(S)$$

и для любого подмножества $Q \subset R(z)$, не равного $R(z)$, объединение

$$\bigcup_{r \in Q} \varphi_r(S)$$

не включает $\xi_z(S)$. Если $R(z) = R$, то $\xi_z(S) = \varphi(S)$, $|Z| = 1$, и соотношения (16) и (17) доказаны.

Пусть существуют такие $r \in R$, z_1, z_2 , что

$$\varphi_r(S) \cap \xi_{z_1}(S) \neq \emptyset, \quad \varphi_r(S) \cap \xi_{z_2}(S) \neq \emptyset.$$

Тогда в силу того, что разложение (13) является вложенным по отношению к разложению (6),

$$\xi_{z_1}(S) \cap \xi_{z_2}(S) \subset \varphi_r(S).$$

Это возможно лишь при $z_1 = z_2$, что, в свою очередь, означает, что множества $R(z)$, не пересекаются при разных $z \in Z$. В силу (6) и (13) справедливо (16). А это означает, что

$$\{r: \varphi_r(\xi_{z_1}(S)) \in \xi_{z_2}(S)\} = R(z_2).$$

Это влечет справедливость (17).

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть семейство расширений $\{(\varphi_r, \psi_r), r \in R\}$ является регулярным разложением протокола (φ, ψ) , $\{(\xi_z, \eta_z), z \in Z\}$ — некоторое разложение протокола (φ, ψ) , отображение φ удовлетворяет условию (12), и ρ — некоторая случайная величина, принимающая значения из R .

Тогда для любых $s \in S$, $z_1, z_2 \in Z$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\rho \in \{r: \varphi_r(\xi_{z_1}(s)) \in \xi_{z_2}(S)\}\} = \mathbf{P}\{\rho \in \{r: \xi_{z_2}(S) \cap \varphi_r(S) \cap \psi^{-1}(\psi(\varphi(s))) \neq \emptyset\}\}.$$

Доказательство. Из соотношения (14) следует, что $\varphi_r(\xi_{z_1}(s)) \in \psi^{-1}(\psi(\varphi(s)))$ и, кроме того, $\varphi_r(\xi_{z_1}(s)) \in \varphi_r(S)$. В силу регулярности разложения

$$|\varphi_r(S) \cap \psi^{-1}(\psi(\varphi(s)))| = 1. \quad (18)$$

Это, наряду со сказанным выше, означает, что

$$\varphi_r(\xi_{z_1}(s)) = \varphi_r(S) \cap \psi^{-1}(\psi(\varphi(s))),$$

и в силу (18)

$$\begin{aligned}\{r: \varphi_r(\xi_{z_1}(s)) \in \xi_{z_2}(S)\} &= \{r: \varphi_r(S) \cap \psi^{-1}(\psi(\varphi(s))) \in \xi_{z_2}(S)\} \\ &= \{r: \xi_{z_2}(S) \cap \varphi_r(S) \cap \psi^{-1}(\varphi(s)) \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

Последнее соотношение завершает доказательство теоремы.

Следствие 2. Пусть в условиях теоремы 5 случайная величина ρ имеет равномерное распределение на R . Тогда справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\rho \in \{r: \varphi_r(\xi_{z_1}(s)) \in \xi_{z_2}(S)\}\} = \frac{|\psi(\varphi(S))|}{|\varphi(S)|} |\xi_{z_1}(S) \cap \psi^{-1}(\psi(\varphi(s)))|.$$

Если, кроме того $|\varphi(S)| = |S|$, то

$$\frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \mathbf{P}\{\rho \in \{r: \varphi_r(\xi_{z_1}(s)) \in \xi_{z_2}(S)\}\} = \frac{|\xi_{z_2}(S)|}{|S|}.$$

Замечание 5. Пусть для защиты протокола (φ, ψ) , допускающего разложение (6), используется защита, основанная на разложении (13). Тогда смысл фигурирующих в теоремах 4 и 5 вероятностей заключается в следующем.

Решения, принимаемые участником не изменяются ни от действия защиты, ни при подмене протокола (φ, ψ) на протоколы (ξ_z, η_z) , $z \in Z$.

Вероятность решения сообщника z_2 не зависит от передаваемой ему команды злоумышленника z_1 .

Замечание 6. Рассмотрим результаты применения описанной выше защиты к одному примеру построения процедуры скрытого общения злоумышленника с сообщником из [5].

Описание процедуры дается в терминах раздела 2.2.

Пусть $S = (h_0, h_1)$, t_0 — фиксированный элемент из S . Рассмотрим пару протоколов (ξ_0, η_0) , (ξ_1, η_1) , в которых $\xi_0 = \tau_{t_0}$, $\eta_0 = \eta_1 = \varepsilon$, ξ_1 — произвольное отображение множества S на множество $S \setminus t_0$.

Тогда, по построению, определенная выше пара является разложением протокола (ε, χ) , которое в силу первого утверждения теоремы 3 и замечания 3 является вложенным по отношению к разложению $\{(\tau_t, \varepsilon), t \in S\}$. Злоумышленник использует пару (ξ_0, η_0) , (ξ_1, η_1) для передачи сообщнику команды на начало действия t_0 .

Из теоремы 4 и замечания 5 при равномерном распределении ρ на множестве S следует, что вероятность правильного решения на начало действий равна

$$\frac{h_0! h_1!}{(h_0 + h_1)!}$$

Отсюда следует, что вероятность правильного решения в процедуре (активизации агента) [5], даже в том случае, когда он знает систему адресации сегментов и внутренних адресов, при применении описанной выше защиты будет стремиться к 0 с ростом $h_0 + h_1$.

Автор выражает признательность И. А. Круглову за внимание к работе и ряд конструктивных замечаний. В частности, им предложена лемма 1, которая существенно расширяет границы применимости теоремы 4.

Список литературы

1. Шеннон К., *Работы по теории информации и кибернетике*. ИЛ, Москва, 1963.
2. Князев А. В., Ронжин А. Ф., О простейших махинациях в некоторых системах нотариального заверивания цифровых подписей. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (2003) **10**, №2, 481–482.
3. Lampson B. W., A note of the confinement problem. *Commun. ACM* (1973) **16**, №10, 613–615.
4. Schneier B., *Applied cryptography: protocols, algorithms and source code in C*. Wiley, New York, 1996.
5. Грушо А. А., Тимонина Е. Е., Оценка времени, требуемого для организации скрытого канала. *Дискретная математика* (2003) **15**, №2, 40–46.

Статья поступила 23.03.2004.