Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Павлов, Одна задача биологии и обобщенная схема размещения, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 4, 88–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:14:45

Одна задача биологии и обобщенная схема размещения

© 2013 г. Ю. Л. Павлов

Рассмотрена обобщенная схема размещения частиц по ячейкам, в которой независимые случайные величины имеют отрицательное биномиальное распределение. Получены предельные распределения наибольших значений числа частиц в ячейке и числа ячеек с заданным количеством частиц. Этот пример обобщенной схемы размещения предложено использовать в качестве математической модели паразитарных биологических систем.

1. Введение

Хорошо известно (см., например, [1]), что отрицательное биномиальное распределение имеет приложения в медицине (статистика несчастных случаев и заболеваний) и в биологии (оценка числа особей данного вида). В частности, оно используется при моделировании паразитарных систем. Такие системы возникают при взаимодействии популяций паразита и хозяина и характеризуются значительной неравномерностью распределения паразитов в популяции хозяев. Это значит, что большое число паразитов содержится в небольшом числе хозяев. Давно замечено, что практически в любых паразитарных системах число паразитов на хозяине статистически значимо подчиняется отрицательному биномиальному закону распределения [2], что, фактически, является основным законом количественной паразитологии. Попытка объяснить этот факт на основе известного представления отрицательного биномиального распределения как распределения Пуассона со случайным параметром, имеющим гамма-распределение, впервые была предпринята, по-видимому, в [3]. В [4] было предложено уточнение этой модели и проведены экспериментальные исследования на различных видах животных, в ходе которых подтверждено предположение о том, что распределение зараженности хозяев личинками паразитов можно описать законом Пуассона, а сопротивляемость организмов хозяев развитию личинок во взрослых паразитов подчиняется гамма-распределению [4-6]. Использование такой модели оказалось полезным для прогнозирования паразитологической ситуации. В процессе эволюции возникает равновесие между популяциями паразитов и хозяев, в котором участвующие стороны «не заинтересованы» в гибели друг друга: чрезмерное массовое заражение может привести к исчезновению хозяев (а вместе с ними и паразитов), а слабая зараженность паразитами препятствует элиминации слабых и больных особей хозяев, что ухудшает генофонд вида и в перспективе приводит к его исчезновению. Зная значения параметров распределения численности паразитов,

можно оценить степень устойчивости системы и, следовательно, осуществить прогнозирование динамики развития популяции. Поэтому паразитологам важно знать структуру зараженности хозяев, т. е. долю особей, имеющих определенное число паразитов, а также наибольшие значения зараженности, чтобы прогнозировать долю погибающих хозяев. Задача оценки численности популяций является типичной и успешно решаемой в биологии с помощью статистических методов. Поэтому при моделировании паразитарных систем мы можем считать, что число хозяев в системе, так же, как и число паразитов, известно. В большинстве исследованных (в том числе и нами) популяций их размеры весьма велики, следовательно, при моделировании естественно применять асимптотические методы. Такая постановка задачи является типичной для обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам, разработанной и исследованной В.Ф. Колчиным (см., например, [7]). Заметим, что приведенный ниже пример использования этой схемы в случае отрицательного биномиального распределения независимых случайных величин рассматривается впервые.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 сформулирована математическая модель паразитарной системы. В этой модели участвуют случайные величины, описывающие число паразитов на хозяевах. Для них доказаны теоремы 1 и 2 о предельном поведении максимальных значений числа паразитов и числа хозяев с заданными значениями числа паразитов в случае, когда хозяева заражаются независимо друг от друга. Более реалистичной является ситуация, в которой число паразитов в популяции ограничено. В разделе 3 сформулированы основные результаты о предельном поведении тех же случайных величин, но при условии, что общее число паразитов в системе известно. Метод доказательства этих результатов основан на использовании обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам, возможность применения которой для рассматриваемой задачи показана в разделе 4. Раздел 5 содержит ряд вспомогательных утверждений (леммы 3–8), которые в разделе 6 используются для доказательства основных теорем.

2. Модель

Предположим, что популяция хозяев состоит из N особей. Обозначим $\eta_1, \dots, \eta_N$ одинаково распределенные случайные величины, соответствующие числам паразитов на хозяевах $1, \dots, N$ и имеющие отрицательное биномиальное распределение:

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_1 = k\} = \binom{\alpha + k - 1}{k} p^\alpha (1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где параметры распределения α и p удовлетворяют условиям $\alpha > 0, 0 < p < 1$. Заметим, что параметр α характеризует устойчивость паразитарной системы, т. е. чем меньше α , тем ниже зараженность, и только некоторые особи подвержены атаке большого числа паразитов. На практике обычно $\alpha < 1$, а в случае высоких значений α большинство хозяев имеют не совместимое с жизнью число паразитов, и такой популяции грозит вырождение.

Построим вариационный ряд $\eta_{(1)} \leq \eta_{(2)} \leq \dots \leq \eta_{(N)}$, расположив значения $\eta_1, \dots, \eta_N$ в неубывающем порядке. Это значит, что случайная величина $\eta_{(N)}$ соответствует максимальному числу паразитов на хозяине. Обозначим также μ_r число значений $\eta_1, \dots, \eta_N$, равных r , т. е. μ_r можно интерпретировать как число хозяев с r паразитами.

Предположим сначала, что случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ независимы. При $N \rightarrow \infty$ нетрудно найти предельные распределения случайных величин μ_r и $\eta_{(N-s)}$, где $s = 0, 1, 2, \dots$. Это будет сделано ниже в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. Пусть $N \rightarrow \infty$ и

$$r = [(\ln N + \alpha \ln \ln N - (\alpha - 1) \ln q - \ln \Gamma(\alpha) + z)/q], \quad (2)$$

где $q = |\ln(1-p)|$, $[x]$ – целая часть числа x , $\Gamma(\alpha)$ – значение гамма-функции в точке α , z – произвольная постоянная. Тогда для $s = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-s)} \leq r\} \rightarrow e^{-e^{-z}} \sum_{j=0}^s (e^{-zj}/j!).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_{(N-s)} \leq r\} &= \sum_{j=0}^s \binom{N}{j} \mathbf{P}\{\eta_1 \leq r, \dots, \eta_{N-j} \leq r, \eta_{N-j+1} > r, \dots, \eta_N > r\} \\ &= \sum_{j=0}^s \binom{N}{j} \mathbf{P}^j\{\eta_1 > r\} (1 - \mathbf{P}\{\eta_1 > r\})^{N-j}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\mathbf{P}\{\eta_1 > r\} = \sum_{k>r} \binom{\alpha + k - 1}{k} p^\alpha (1-p)^k.$$

Используя свойства гамма-функции и формулу Стирлинга, получаем отсюда, что при $r \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta_1 > r\} = (1 + o(1))(\Gamma(\alpha))^{-1} p^\alpha \sum_{k>r} k^{\alpha-1} (1-p)^k.$$

Тогда из (2) следует, что $N\mathbf{P}\{\eta_1 > r\} \rightarrow e^{-z}$, и утверждение теоремы вытекает из (3).

Теорема 2. Пусть $N \rightarrow \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если r фиксировано, то для целых неотрицательных k равномерно относительно $(k - Np_r)/\sqrt{N}$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r (1-p_r)}} \exp\left\{-\frac{(k - Np_r)^2}{2N p_r (1-p_r)}\right\}.$$

2. Если $r \rightarrow \infty$ и Np_r ограничено, то для любого целого $k \geq 0$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k}. \quad (4)$$

Заметим, что $Np_r(1-p_r) \rightarrow \infty$ в случае фиксированного r и $p_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, поэтому осталось только применить к (4) нормальное и пуассоновское приближения.

Далее эту модель мы будем рассматривать при условии, что $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$, следовательно, случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ не являются независимыми.

3. Основные результаты

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$, распределение вероятностей которых зависит от параметра λ и задается следующим образом:

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \lambda^k \left(\frac{1 - \lambda(1-p)}{p} \right)^\alpha p_k, \quad (5)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \lambda < 1/(1-p)$. Из (1) и (5) следует, что случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют отрицательное биномиальное распределение с параметрами $(\alpha, 1 - \lambda(1-p))$. Пусть теперь параметр λ распределения (5) является решением уравнения

$$\alpha\lambda(1-p)/(1-\lambda(1-p)) = n/N. \quad (6)$$

Справедливы следующие результаты.

Теорема 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 0$, а натуральные $r \geq 2$ выбраны так, что

$$N \binom{\alpha+r}{r+1} \left(\frac{n}{\alpha N} \right)^r \rightarrow \infty, \quad N \binom{\alpha+r}{r+1} \left(\frac{n}{\alpha N} \right)^{r+1} \rightarrow \gamma,$$

где γ — некоторая неотрицательная постоянная. Тогда для любых фиксированных $s = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-s)} = r\} \rightarrow e^{-\gamma} \sum_{j=0}^s \gamma^j / j!, \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N-s)} = r+1\} \rightarrow 1 - e^{-\gamma} \sum_{j=0}^s \gamma^j / j!.$$

Теорема 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, а натуральные $r = r(n, N)$ выбраны так, что

$$N(\lambda(1-p))^{r+1} r^{\alpha-1} (1-\lambda(1-p))^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha) \rightarrow \gamma,$$

где γ — некоторая положительная постоянная. Тогда для любых фиксированных $s = 0, 1, 2, \dots$ и $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-s)} \leq r+l\} \rightarrow \exp\{-\gamma(\lambda(1-p))^l\} \sum_{j=0}^s (\gamma(\lambda(1-p)))^j / j!.$$

Теорема 5. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$. Тогда для любых фиксированных z и $s = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\alpha N \eta_{(N-s)} / n - \ln N - (\alpha-1) \ln \ln N + \ln \Gamma(\alpha) \leq z\} \rightarrow e^{-e^{-z}} \sum_{j=0}^s e^{-zj} / j!.$$

Теорема 6. Пусть $r \geq 2$, а $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 0$, $Np_r(\lambda)$ ограничено. Тогда для каждого целого неотрицательного k

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!} e^{-Np_r(1+o(1))}.$$

Это утверждение сохраняет силу при $r \rightarrow \infty$ даже если условие $n/N \rightarrow 0$ не выполнено.

Теорема 7. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $Np_r(\lambda) \rightarrow \infty$. Тогда при $r \geq 2$ для целых неотрицательных k равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N}} e^{-u_r^2/2},$$

где

$$m = \mathbf{E}\xi_1 = \frac{\alpha\lambda(1-p)}{1-\lambda(1-p)}, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 = \frac{\alpha\lambda(1-p)}{(1-\lambda(1-p))^2}, \quad (7)$$

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\lambda) \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda) \right). \quad (8)$$

Это утверждение остается справедливым, если $r = 0$, $n^2/N \rightarrow \infty$ и если $r = 1$, $n^3/N^2 \rightarrow \infty$.

4. Метод доказательства

Из (1) и (5) следует, что при любом $\lambda, 0 < \lambda < 1/(1-p)$, справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \quad (9)$$

где независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ определены в п. 3. Соотношение (9) означает, что выполнены условия обобщенной схемы размещения. Представленные ниже доказательства теорем проводятся в соответствии с типичным алгоритмом применения этой схемы, часто используемой в асимптотическом анализе перечислительных задач комбинаторики. Для этого введем три набора независимых случайных величин: $(\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)})$, $(\bar{\xi}_1^{(r)}, \dots, \bar{\xi}_N^{(r)})$, $(\tilde{\xi}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(r)})$, удовлетворяющих при $i = 1, \dots, N$ условиям

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k | \xi_i \leq r\}, \quad (10)$$

$$\mathbf{P}\{\bar{\xi}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k | \xi_i > r\}, \quad (11)$$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k | \xi_i \neq r\}. \quad (12)$$

Обозначим $P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}$, $\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$, $\zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)}$, $\bar{\zeta}_N^{(r)} = \bar{\xi}_1^{(r)} + \dots + \bar{\xi}_N^{(r)}$, $\tilde{\zeta}_N^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\xi}_N^{(r)}$. Хорошо известно [7], что в условиях обобщенной схемы размещения имеют место следующие леммы 1 и 2.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-s)} \leq r\} = \sum_{j=0}^s \binom{N}{j} P_r^j (1 - P_r)^{N-j} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-j}^{(r)} + \bar{\zeta}_j^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Лемма 2. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (\lambda) (1 - p_r(\lambda))^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-kr}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Из лемм 1 и 2 вытекает, что для получения предельных распределений $\eta_{(N-s)}$ и μ_r достаточно изучить асимптотику указанных в этих утверждениях биномиальных вероятностей и распределений сумм вспомогательных независимых случайных величин. Это будет сделано в следующем разделе.

5. Асимптотика вспомогательных вероятностей

Рассмотрим сначала предельное поведение хвоста P_r распределения (5).

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда

$$NP_{r-1} \rightarrow \infty, \quad NP_r \rightarrow \gamma, \quad NP_{r+1} \rightarrow 0.$$

Доказательство. Из (6) следует, что

$$\lambda = ((1-p)(1+\alpha N/n))^{-1}, \quad (13)$$

следовательно, $\lambda \rightarrow 0$ при $n/N \rightarrow 0$ и из (1), (5) получаем, что

$$P_r = (1 - \lambda(1-p))^\alpha \sum_{j=r+1}^{\infty} \binom{\alpha+j-1}{j} (\lambda(1-p))^j. \quad (14)$$

Таким образом, при фиксированных r утверждения леммы следуют из (13) и соотношения

$$P_r \sim \binom{\alpha+r}{r+1} (\lambda(1-p))^{r+1}. \quad (15)$$

Пусть $r \rightarrow \infty$. Используя свойства гамма-функции и формулу Стирлинга, находим, что

$$\binom{\alpha+r}{r+1} \sim \frac{r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (16)$$

Из (13), (15), (16) и условия $NP_r \rightarrow \gamma$ следует, что $r = o(N/n)$, поэтому, как легко видеть, утверждения леммы 3 остаются в силе и в этом случае.

Лемма 4. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$NP_{r+s} = \gamma(\lambda(1-p))^s(1+o(1)).$$

Доказательство. Из (1) и (5) находим, что

$$\begin{aligned} P_{r+s} &= (1 - \lambda(1-p))^\alpha \binom{\alpha+r+s}{r+s+1} (\lambda(1-p))^{r+s+1} \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha+r+s+j}{r+s+j+1} \binom{\alpha+r+s}{r+s+1}^{-1} (\lambda(1-p))^j. \end{aligned}$$

Отсюда и из (16) нетрудно видеть, что

$$P_{r+s} \sim (\lambda(1-p))^{r+s+1} r^{\alpha-1} (1 - \lambda(1-p))^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha), \quad (17)$$

и утверждение леммы 4 немедленно вытекает из условий теоремы 4.

Лемма 5. Пусть выполнены условия теоремы 5 и

$$r = [n(\ln N + (\alpha-1) \ln \ln N - \ln \Gamma(\alpha) + z)/(\alpha N)].$$

Тогда $NP_r \rightarrow e^{-z}$.

Доказательство. Из (14) и (16) получаем, что

$$P_r = (1 - \lambda(1 - p))^\alpha (\Gamma(\alpha))^{-1} (1 + o(1)) \sum_{j=r+1}^{\infty} j^{\alpha-1} (\lambda(1 - p))^j,$$

поэтому из (13) находим, что

$$P_r = \frac{1 + o(1)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha N}{n} \right)^\alpha \int_r^\infty y^{\alpha-1} e^{-\alpha N y/n} dy = \frac{1 + o(1)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha N r}{n} \right)^{\alpha-1} e^{-\alpha N r/n}.$$

Учитывая явный вид r , отсюда приходим к утверждению леммы 5.

Лемма 6. Пусть выполнены условия любой из теорем 3–7. Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp \left\{ -\frac{(k - Nm)^2}{2\sigma^2 N} \right\}$$

равномерно относительно $u = (k - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$ в каждом фиксированном конечном интервале.

Доказательство. Если $n/N \leq C < \infty$, то утверждение леммы 6 следует из локальных предельных теорем, доказанных в [8].

Пусть $n/N \rightarrow \infty$. Обозначим $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины ξ_1 . Тогда из (5) следует, что

$$\varphi(t) = \left(\frac{1 - \lambda(1 - p)}{1 - \lambda(1 - p)e^{it}} \right)^\alpha. \quad (18)$$

Пусть $\psi(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$. Тогда

$$\psi(t) = \exp \left\{ -\frac{imNt}{\sigma\sqrt{N}} \right\} \varphi^N \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right). \quad (19)$$

Нетрудно видеть, что

$$\ln \varphi(t) = itm - t^2 \sigma^2 / 2 + Q(t) / 6, \quad (20)$$

где

$$|Q(t)| \leq 2 \max_{|\tau| \leq |t|} |(\ln \varphi(\tau))'''|, \quad (21)$$

$$(\ln \varphi(t))''' = -i\lambda(1 - p)e^{it}(1 - \lambda(1 - p)e^{it})^{-3}(1 + \lambda(1 - p)e^{it}). \quad (22)$$

Из (19)–(21) вытекает, что

$$\ln \psi(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sigma^3\sqrt{N}} Q \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right). \quad (23)$$

Из (7) и (13) следует, что $\sigma\sqrt{N} \rightarrow \infty$, поэтому, учитывая (21) и (22), из (23) находим, что при любом фиксированном t

$$\psi(t) \rightarrow e^{-t^2/2}. \quad (24)$$

Таким образом, распределение случайной величины $(\zeta_N - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$ слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Докажем теперь локальную сходимость, используя обычную схему доказательства локальных предельных теорем. Представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = k\}$ по формуле обращения:

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = (2\pi\sigma\sqrt{N})^{-1} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-iut} \psi(t) dt.$$

Поскольку

$$(2\pi)^{-1/2} e^{-u^2/2} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-iut - t^2/2\} dt,$$

разность

$$R = 2\pi(\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - (2\pi)^{-1}e^{-u^2/2})$$

представим в виде суммы четырех интегралов: $R = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \int_{-A}^A e^{-iut} (\psi(t) - e^{-t^2/2}) dt, \quad I_2 = \int_{A < |t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-iut} \psi(t) dt,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-iut} \psi(t) dt, \quad I_4 = - \int_{A < |t|} \exp\{-iut - t^2/2\} dt,$$

положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее. Лемма 6 будет доказана, если мы убедимся, что выбором достаточно больших A, N, n и достаточно малого ε разность R можно сделать сколь угодно малой.

Из (24) следует, что $I_1 \rightarrow 0$. Далее,

$$|I_4| \leq \int_{A < |t|} e^{-t^2/2} dt,$$

следовательно, выбором достаточно большого A интеграл I_4 можно сделать сколь угодно малым.

Для оценки I_3 проведем интегрирование по частям, учитывая (19) :

$$\begin{aligned} I_3 = & -\frac{\sigma\sqrt{N}}{ik} e^{-\frac{itk}{\sigma\sqrt{N}}} \varphi^N \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \Big|_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} \\ & + \frac{N}{ik} \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-\frac{itk}{\sigma\sqrt{N}}} \varphi^{N-1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \varphi' \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Хорошо известно, что при $\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}$ для некоторого положительного $q < 1$ справедливо неравенство

$$|\varphi(t/(\sigma\sqrt{N}))| \leq q, \quad (26)$$

а используя (18), нетрудно получить, что $\varphi'(t/(\sigma\sqrt{N})) = o(1)$. Кроме того, из (6) и (7) следует, что

$$\sigma^2 = \alpha(n/N)^2(1 + o(1)), \quad (27)$$

и, по условию леммы, $k \sim n$. Тогда из (25) и (27) находим, что

$$|I_3| \leq C_3 \sqrt{N} q^N \rightarrow 0,$$

здесь и далее символы $C_3, C_4, \dots$ означают некоторые положительные постоянные.

Интеграл I_2 представим в виде суммы $I_2 = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}$, где

$$I_2^{(j)} = \int_{S_j} e^{-iut} \psi(t) dt, \quad j = 1, 2,$$

а области интегрирования определяются следующим образом:

$$S_1 = \{t : A < |t| \leq \varepsilon\sqrt{N}\}, \quad S_2 = \{t : \varepsilon\sqrt{N} < |t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}\}.$$

Для оценки этих интегралов мы используем соотношения (18)–(23).

Нетрудно видеть, что в области S_1

$$|\psi(t/(\sigma\sqrt{N}))|^N \leq e^{-C_4 t^2},$$

поэтому выбором достаточно большого A интеграл $I_2^{(1)}$ можно сделать сколь угодно малым. Учитывая (18), можно получить, что в области S_2 оценка (26) остается в силе и, кроме того, $|\varphi'(t/(\sigma\sqrt{N}))| \leq C_5 n/N$. Поэтому интеграл $I_2^{(2)}$ оценивается аналогично I_3 , что и завершает доказательство леммы 6.

Рассмотрим теперь предельное поведение суммы $\zeta_{N-s}^{(r)} + \bar{\zeta}_s^{(r)}$.

Лемма 7. Пусть выполнены условия леммы 5 или одной из теорем 3, 4. Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-s}^{(r)} + \bar{\zeta}_s^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(k - Nm)^2}{2\sigma^2 N}\right\}$$

равномерно относительно $u = (k - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале.

Доказательство. Пусть $\varphi_r(t)$ и $\bar{\varphi}_r(t)$ — характеристические функции случайных величин $\xi_1^{(r)}$ и $\bar{\xi}_1^{(r)}$ соответственно. Тогда из (10) и (11) находим, что

$$\varphi_r(t) = (1 - P_r)^{-1} \left(\varphi(t) - \sum_{k>r} e^{itk} p_k(\lambda) \right), \quad \bar{\varphi}_r(t) = P_r^{-1} \sum_{k>r} e^{itk} p_k(\lambda). \quad (28)$$

Обозначим $\psi_{r,s}(t)$ характеристическую функцию суммы $(\zeta_{N-s}^{(r)} + \bar{\zeta}_s^{(r)} - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$. Тогда

$$\psi_{r,s}(t) = \exp\left\{-\frac{itNm}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \varphi_r^{N-s}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) \bar{\varphi}_r^s\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right). \quad (29)$$

Из (7) и свойств характеристических функций следует, что при любом фиксированном t

$$\exp\left\{\frac{itsm}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \bar{\varphi}_r^s\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) \rightarrow 1. \quad (30)$$

Рассмотрим теперь предельное поведение выражения

$$\tilde{\psi}_{r,s}(t) = \exp\left\{-\frac{it(N-s)m}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \varphi_r^{N-s}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right). \quad (31)$$

Следуя доказательству соотношения (24), заменяя N на $N - s$ и используя (28), из (31) получаем, что

$$\tilde{\psi}_{r,s}(t) = e^{-t^2/2}(1 - P_r)^{-(N-s)}(1 + o(1)) \left(\sum_{k>r} e^{\frac{itk}{\sigma\sqrt{N}}} p_r(\lambda) \right)^{N-s}. \quad (32)$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} e^{\frac{itk}{\sigma\sqrt{N}}} p_k(\lambda) = P_r + R(t),$$

где

$$|R(t)| \leq (\sigma\sqrt{N})^{-1} |t| \sum_{k>r} k p_k(\lambda). \quad (33)$$

Покажем, что

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{k>r} k p_k(\lambda) = o(N^{-1}). \quad (34)$$

Рассмотрим отдельно три случая. Пусть сначала $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$. Как и при доказательстве (17), нетрудно показать, что

$$\sum_{k>r} k p_k(\lambda) \leq C_6 r^\alpha (\lambda(1-p))^r.$$

Из условий теоремы 4 находим, что

$$\sum_{k>r} k p_k(\lambda) \leq C_7 r/N, \quad r/\sqrt{N} \rightarrow 0,$$

поэтому (34) имеет место.

Пусть $n/N \rightarrow 0$. Тогда из (13) ясно, что $\lambda \rightarrow 0$. Если r фиксировано, то из (1), (5) и (15) следует, что

$$\sum_{k>r} k p_k(\lambda) \leq C_8 (\lambda p)^{r+1} \leq C_9 P_r = O(N^{-1}),$$

поэтому (34) выполняется. Если $r \rightarrow \infty$, то, как и при доказательстве леммы 3, находим, что

$$\sum_{k>r} k p_k(\lambda) \leq C_{10} r^\alpha (\lambda(1-p))^{r+1} = O(r/N). \quad (35)$$

В силу леммы 3 выполняется соотношение $NP_{r-1} \rightarrow \infty$, или

$$Nr^\alpha (\lambda(1-p))^r \rightarrow \infty. \quad (36)$$

Нетрудно проверить, что $r = o(\sqrt{n})$, поскольку в противном случае условие (36) было бы нарушено. Из (7) и (13) видно, что $\sigma\sqrt{N} \geq C_{11}\sqrt{n}$, поэтому из (35) следует (34).

Осталось рассмотреть случай $n/N \rightarrow \infty$. Используя лемму 5, получаем, что

$$\sum_{k>r} k p_k(\lambda) = O(N^{-1} \ln N),$$

и с помощью (6), (7) опять приходим к (34). Из (29)–(34) следует, что

$$\psi_{r,s}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}, \quad (37)$$

а это значит, что доказана слабая сходимосль. Чтобы установить локальную сходимосль, рассмотрим, как и при доказательстве леммы 6, разность

$$R^{(r)} = 2\pi(\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} - (2\pi)^{-1/2}e^{-z^2/2}) = I_1^{(r)} + I_2^{(r)} + I_3^{(r)} + I_4^{(r)}, \quad (38)$$

где интегралы $I_1^{(r)}, \dots, I_4^{(r)}$ отличаются от определенных в доказательстве леммы 6 интегралов $I_1, \dots, I_4$ только заменой $\psi(t)$ на $\psi_{r,s}(t)$.

Из (37) следует, что $I_1^{(r)} \rightarrow 0$, а $I_4^{(r)}$, как обычно, можно сделать сколь угодно малым выбором A .

Нетрудно видеть, что справедливо равенство, аналогичное (25):

$$\begin{aligned} I_3^{(r)} = & -\frac{\sigma\sqrt{N}}{ik} e^{-\frac{ikt}{\sigma\sqrt{N}}} \varphi_r^{N-s} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \bar{\varphi}_r \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \Big|_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} \leq |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} \\ & + \frac{1}{ik} \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-\frac{ikt}{\sigma\sqrt{N}}} \left((N-s) \varphi_r^{N-s-1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \bar{\varphi}_r^s \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right. \\ & \left. + \varphi_r^{N-s} s \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \bar{\varphi}_r^{s-1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right) dt, \end{aligned}$$

и далее $I_3^{(r)}$ оценивается аналогично I_3 в лемме 6.

Из (28) и (29) ясно, что при $|t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}$

$$|\psi_{r,s}(t)| \leq C_{12} |\varphi(t/(\sigma\sqrt{N}))|^N, \quad (39)$$

а из (6), (7) и (20)–(22) нетрудно получить, что при $n/N \leq C_2$ и достаточно малом ε справедлива оценка

$$|\varphi(t/(\sigma\sqrt{N}))| \leq \exp\{-C_{13}t^2/N\},$$

поэтому из (28), (29) следует, что выбором A интеграл $I_2^{(r)}$ можно сделать сколь угодно малым. Если же $n/N \rightarrow \infty$, то, как и в лемме 6, разбивая $I_2^{(r)}$ на сумму двух интегралов и используя (39) получаем, что $I_2^{(r)} \rightarrow 0$. Отсюда и из (38) следует, что лемма 7 доказана.

Введем обозначения $m_r = \mathbf{E}\tilde{\xi}_1^{(r)}$, $\sigma_r^2 = \mathbf{D}\tilde{\xi}_1^{(r)}$. Из (5) и (12) нетрудно получить, что

$$m_r = \frac{m - rp_r(\lambda)}{1 - p_r(\lambda)}, \quad \sigma_r^2 = \frac{\sigma^2}{(1 - p_r(\lambda))^2} \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m - r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda) \right). \quad (40)$$

Следующая лемма будет использована для доказательства теорем 4 и 5.

Лемма 8. Пусть $N, n \rightarrow \infty$. Тогда при любом $r \geq 2$ и $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$ для целых неотрицательных k равномерно относительно $u_r = (k - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma_r\sqrt{2\pi S}} e^{-u_r^2/2}.$$

Это утверждение остается справедливым при $r = 0$, если $n^2/N \rightarrow \infty$, и при $r = 1$, если $n^3/N^2 \rightarrow \infty$.

Доказательство. Обозначим $\tilde{\varphi}_r(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\tilde{\xi}_1^{(r)}$. Тогда из (5) и (12) следует, что

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \frac{\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr}}{1 - p_r(\lambda)}. \quad (41)$$

Пусть $\tilde{\psi}_S^{(r)}(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\tilde{\zeta}_S^{(r)} - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$. Тогда

$$\tilde{\psi}_S^{(r)}(t) = \exp \left\{ -\frac{iSm_rt}{\sigma_r\sqrt{S}} \right\} \tilde{\varphi}_r^S \left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{S}} \right). \quad (42)$$

Повторяя рассуждения, аналогичные выводу соотношений (20)–(24), нетрудно показать, учитывая условия леммы и (40)–(42), что

$$\tilde{\psi}_S^{(r)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}. \quad (43)$$

Для доказательства локальной сходимости рассмотрим разность

$$\tilde{R} = 2\pi(\sigma_r\sqrt{S}\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = k\} - (2\pi)^{-1/2}e^{-u_r^2/2})$$

и представим ее в виде суммы $\tilde{R} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где интегралы $I_1, \dots, I_4$ определяются так же, как и в лемме 6, с очевидными заменами N на S , u на u_r и $\psi(t)$ на $\tilde{\psi}_S^{(r)}(t)$. Как обычно, достаточно показать, что все эти интегралы стремятся к нулю. Ясно, что $I_1 \rightarrow 0$ в силу (43), а I_4 оценивается традиционным образом.

Пусть $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$. Применив формулу Тейлора к $\tilde{\varphi}_r(t)$, из (40)–(42) нетрудно получить, что в области интегрирования I_2

$$\left| \tilde{\psi}_S^{(r)}(t) \right| \leq e^{-C_{14}t^2}, \quad (44)$$

следовательно, $|I_2|$ тем меньше, чем больше A . Рассматривая I_3 , можно заметить, что для $\tilde{\varphi}_r(t)$ справедливо неравенство, аналогичное (26), поэтому этот интеграл оценивается так же, как и в лемме 6.

Если $n/N \rightarrow 0$, а $r \geq 2$ фиксировано, то утверждение леммы следует из теоремы 5 работы [8]. Если $r \rightarrow \infty$ или $r = 0, 1$, то, с помощью (5), (20), (41), (42), нетрудно получить, что для оценки I_2 можно применить неравенство (44). При $r \rightarrow \infty$ в области интегрирования I_3 из (5), (18), (41) следует, что

$$\left| \tilde{\varphi}_r(t/(\sigma_r\sqrt{S})) \right| \leq e^{-C_{15}n/N},$$

поэтому из (7) находим, что

$$|I_3| \leq C_{16}\sigma\sqrt{N}e^{-C_{15}n} \rightarrow 0.$$

Аналогично, при $r = 0$

$$|\tilde{\varphi}_0(t/(\sigma_0\sqrt{S}))| \leq e^{-C_{17}n/N},$$

поэтому

$$|I_3| \leq C_{18}(n/\sqrt{N})e^{-C_{17}n^2/N} \rightarrow 0.$$

Пусть теперь $r = 1$. Из (5), (18), (41) нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t/(\sigma_1\sqrt{S}))| &\leq 1 - \lambda^2(p_2/p_1)(1 - \cos(2t/(\sigma_1\sqrt{S}))) \\ &\quad - \lambda^3(p_3/p_0)(1 - \cos(3t/(\sigma_1\sqrt{S}))) + O(\lambda^4). \end{aligned} \quad (45)$$

Разобьем I_3 на сумму двух интегралов: $I_3 = I_3^{(1)} + I_3^{(2)}$, где области интегрирования слагаемых соответственно имеют вид

$$\{\varepsilon\sigma_1\sqrt{S} < |t| \leq (\pi - \varepsilon)\sigma_1\sqrt{S}\}, \quad \{(\pi - \varepsilon)\sigma_1\sqrt{S} < |t| \leq \pi\sigma_1\sqrt{S}\}.$$

Из (1), (6), (7) и (45) следует, что в области интегрирования $I_3^{(1)}$

$$|\tilde{\varphi}_1(t/(\sigma_1\sqrt{S}))| \leq \exp\{-C_{19}n^2/N^2\},$$

следовательно,

$$|I_3^{(1)}| \leq C_{20}(n/\sqrt{N}) \exp\{-C_{19}n^2/N\} \rightarrow 0.$$

Оценим теперь $I_3^{(2)}$. Из (6) и (45) находим, что

$$|\tilde{\varphi}_1(t/(\sigma_1\sqrt{S}))| \leq \exp\{-\lambda^2(p_2/p_0)(1 - \cos(2t/(\sigma_1\sqrt{S}))) - C_{21}(n/N)^3\}. \quad (46)$$

Разлагая $1 - \cos(2t/(\sigma_1\sqrt{S}))$ в ряд в окрестности $\pi/(\sigma_1\sqrt{S})$, получаем, что при $t/(\sigma_1\sqrt{S}) \rightarrow \pi$ справедливо соотношение

$$1 - \cos(2t/(\sigma_1\sqrt{S})) = 2(t/(\sigma_1\sqrt{S}) - \pi)^2 + O((t/(\sigma_1\sqrt{S}) - \pi)^3),$$

откуда следует, что при достаточно малом ε и достаточно больших N, n

$$\exp\{-\lambda^2(p_2/p_0)(1 - \cos(2t/(\sigma_1\sqrt{S})))\} \leq \exp\{-C_{22}(n/N)^2(t/(\sigma_1\sqrt{S}) - \pi)^2\}.$$

Отсюда и из (46) вытекает, что

$$|\tilde{\varphi}_1(t/(\sigma_1\sqrt{S}))| \leq \exp\{-C_{21}(n/N)^3 - C_{22}(n/N)^2(t/(\sigma_1\sqrt{S}) - \pi)^2\}. \quad (47)$$

В силу периодичности модуля характеристической функции решетчатого распределения

$$\begin{aligned} |I_3^{(2)}| &\leq \int_{(\pi-\varepsilon)\sigma_1\sqrt{S} < |t| \leq \pi\sigma_1\sqrt{S}} |\{\tilde{\varphi}_1(t/(\sigma_1\sqrt{S}))\}|^S dt \\ &= \int_{(\pi-\varepsilon)\sigma_1\sqrt{S}}^{(\pi+\varepsilon)\sigma_1\sqrt{S}} |\tilde{\varphi}_1(t/(\sigma_1\sqrt{S}))|^S dt = \sigma_1\sqrt{S} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\varphi}_1(\pi + t)|^S dt. \end{aligned}$$

Применяя неравенство (47), отсюда получаем, что при достаточно больших N, n и достаточно малом ε

$$\begin{aligned} |I_3^{(2)}| &\leq \sigma_1\sqrt{S} e^{-C_{22}n^3/N^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-C_{23}n^2t^2S/N^2} dt \\ &\leq C_{25}(n/\sqrt{N}) e^{-C_{23}n^3/N^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-C_{26}n^2t^2/N} dt \leq C_{27} e^{-C_{23}n^3/N^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-C_{26}x^2} dx. \end{aligned}$$

Поскольку $n^3/N^2 \rightarrow \infty$, из последнего неравенства получаем, что $I_3^{(2)} \rightarrow 0$.

Нам осталось рассмотреть I_2 и I_3 при $n/N \rightarrow \infty$. Как и в случае $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, нетрудно показать справедливость (44), поэтому приведенная выше оценка $|I_2|$ сохраняет силу. По аналогии с (25) находим, что

$$I_3 = - \frac{\sigma_r \sqrt{S}}{ik} e^{-\frac{ikt}{\sigma_r \sqrt{S}}} \tilde{\varphi}_r^S \left(\frac{t}{\sigma_r \sqrt{S}} \right) \Big|_{\varepsilon \sigma_r \sqrt{S} < |t| \leq \pi \sigma_r \sqrt{S}} + \frac{S}{ik} \int_{\varepsilon \sigma_r \sqrt{S} < |t| \leq \pi \sigma_r \sqrt{S}} e^{-\frac{ikt}{\sigma_r \sqrt{S}}} \tilde{\varphi}_r^{S-1} \left(\frac{t}{\sigma_r \sqrt{S}} \right) \tilde{\varphi}_r' \left(\frac{t}{\sigma_r \sqrt{S}} \right) dt$$

и далее, используя (5), (18), (26) и (41), как и в лемме 6, находим, что $I_3 \rightarrow 0$. Лемма 8 доказана.

6. Доказательства теорем 3–7

Легко видеть, что для доказательства теоремы 3 достаточно использовать леммы 1, 3, 6 и 7.

Пусть выполнены условия теоремы 4. Нетрудно проверить, что при замене r на $r + l$ лемма 7 сохраняет силу. Поэтому теорема 4 является следствием лемм 1, 4, 6 и 7.

Теорема 5 доказывается аналогично с использованием лемм 1 и 5–7.

Для доказательства теоремы 6 заметим, что согласно известному пуассоновскому приближению биномиального распределения при $p_r(\lambda) \rightarrow 0$ и ограниченных значениях $Np_r(\lambda)$ для целых неотрицательных k

$$\binom{N}{k} p_r^k(\lambda) (1 - p_r(\lambda))^{N-k} = \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!} e^{-Np_r(\lambda)} (1 + o(1)).$$

Отсюда и из лемм 2, 6 и 8 вытекает теорема 6.

Если $Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda)) \rightarrow \infty$, то, согласно нормальному приближению для биномиальных вероятностей,

$$\binom{N}{k} p_r^k(\lambda) (1 - p_r(\lambda))^{N-k} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}} \exp \left\{ -\frac{(k - Np_r(\lambda))^2}{2Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))} \right\}$$

равномерно относительно $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}$ в любом фиксированном конечном интервале. Используя это соотношение, а также (8) и леммы 2, 6, 8, нетрудно получить утверждение теоремы 7.

7. Благодарности

Автор выражает благодарность заведующему лабораторией паразитологии растений и животных Института биологии Карельского научного центра РАН, профессору Е.П. Иешко, сотрудничество с которым привело к постановке рассмотренной в статье задачи. Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета на 2012–2016 гг.

Список литературы

1. Корольук В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф., *Справочник по теории вероятностей и математической статистике*. Наука, Москва, 1985.
2. Бреев К. А., *Применение негативного биномиального распределения для изучения популяционной экологии паразитов*. Наука, Ленинград, 1972.
3. Anderson R. M., Population dynamics of the cestode *Caryophyllaeus laticeps* (Pallas, 1781) in the bream (*Abramis brama* L.). *J. Animal Ecology* (1974) **43**, №2, 305–321.
4. Павлов Ю. Л., Иешко Е. П., Модель распределения численности паразитов. *Доклады АН СССР* (1986) **289**, №3, 746–748.
5. Иешко Е. П., Ларсон Б. М., Павлов Ю. Л., Барская Ю. Ю., Лебедева Д. И., Новохацкая О. В., Популяционная динамика численности глохий пресноводной жемчужницы *Margaritifera margaritifera* L, паразитирующих на молоди лососевых рыб северных водоемов. *Известия РАН, серия биологическая* (2009), № 6 734–739.
6. Иешко Е. П., Бугмырин С. В., Аниканова В. С., Павлов Ю. Л., Особенности динамики и распределения численности паразитов мелких млекопитающих. *Труды Зоологического института РАН* (2009) **313**, №3, 319–328.
7. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
8. Колчин А. В., Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения. *Дискр. матем.* (2003) **15**, №4, 148–157.

Статья поступила 20.12.2012.