Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. К. Форманов, А. Н. Старцев, С. С. Седов, Предельные теоремы для обобщённого размера эпидемии в одной марковской модели с иммунизацией, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 4, 103–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 02:25:03

Предельные теоремы для обобщённого размера эпидемии в одной марковской модели с иммунизацией*

© 2013 г. Ш. К. Форманов, А. Н. Старцев, С. С. Седов

В работе предлагается новая марковская модель распространения эпидемии в замкнутой популяции, в которой кроме обычных переходов, отражающих процесс заражения восприимчивых и устранения источников инфекции, вводится также переход, связанный с иммунизацией восприимчивых. Если в известной модели с естественной иммунизацией вероятность последнего перехода пропорциональна числу возможных контактов восприимчивых и больных, то в рассматриваемой модели эта вероятность пропорциональна только числу больных, т.е. с увеличением числа больных вероятность иммунизации возрастает.

Для введенной модели описывается класс предельных законов для обобщенного размера эпидемии (суммы числа зараженных и числа иммунизированных к моменту окончания эпидемии) при различных соотношениях между исходными параметрами модели в предположении, что первоначальные числа восприимчивых и больных стремятся к бесконечности, а параметры модели меняются вместе с ними ("схема серий").

1. Введение

Введём общую марковскую модель развития эпидемии в замкнутой популяции, с помощью которой мы сможем сопоставить известные ранее модели с моделью, рассматриваемой в данной статье. Пусть $\xi(t) = (R(t), S(t))$ — состояние популяции в данный момент времени $t \geq 0$, где $R(t)$ — число восприимчивых, а $S(t)$ — число источников инфекции в момент времени t , причём $\xi(0) = (n, m)$. Марковскую модель распространения эпидемии зададим с помощью вероятностей возможных переходов за бесконечно малый промежуток времени Δt

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\xi(t + \Delta t) = (r - 1, s + 1) / \xi(t) = (r, s)) = \lambda \varphi_1(r) \psi(s) \Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}(\xi(t + \Delta t) = (r, s - 1) / \xi(t) = (r, s)) = \mu \psi(s) \Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}(\xi(t + \Delta t) = (r - 1, s) / \xi(t) = (r, s)) = \theta \varphi_2(r) \psi(s) \Delta t + o(\Delta t), \end{cases} \quad (1.1)$$

где первый и второй переходы отражают процесс заражения восприимчивых и устранения больных, соответственно, а третий переход — процесс иммунизации восприимчивых.

* Светлой памяти Александра Викторовича Нагаева

Классическая, так называемая общая вероятностная модель, была предложена в 1927 году и связана с именами английских учёных Кермака и МакКендрика [1]. Эта модель получается из (1.1) при $\varphi_1(r) = r$, $\psi(s) = s$, $\varphi_2(r) = 0$. Она в дальнейшем была основательно исследована Бартлеттом [2], а сам процесс получил название процесса Бартлетта-МакКендрика (см., например, [3]).

Более общая модель с $\varphi_1(r) = r$, $\psi(s) = s$, $\varphi_2(r) = r$ была рассмотрена Даунтоном в 1968 г. [4] и независимо от него Нагаевым А.В. и Рахманиной Г.И. в 1970 г. [5], в последней работе третий переход был истолкован как естественная иммунизация, т. е. он отражает возможность перехода восприимчивого в число иммунизированных в результате контакта с источником инфекции.

Для общей вероятностной модели Бартлетт [2] установил уравнение Колмогорова для производящей функции вероятностей состояний процесса

$$\Pi_t(z, w) = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^{m+n-r} \mathbf{P}(\xi(t) = (r, s)) z^r w^s, \quad (1.2)$$

которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \Pi_t(z, w)}{\partial t} = (w^2 - zw) \frac{\partial^2 \Pi_t(z, w)}{\partial z \partial w} + \rho_1(1 - w) \frac{\partial \Pi_t(z, w)}{\partial w}, \quad (1.3)$$

где $\rho_1 = \mu/\lambda$ — относительный коэффициент устранения.

В 1965 году уравнение (1.3) было разрешено в явном виде независимо друг от друга Гани [6] и Сискиндом [7]. Уравнение типа (1.3) с явными коэффициентами при производных оказалось разрешимым лишь благодаря специальному виду неизвестной функции $\Pi_t(z, w)$.

К сожалению, явный вид решения уравнения (1.3) является настолько громоздким, что его трудно использовать для асимптотического анализа или выявления соотношений между исходными параметрами, характерными для того или иного поведения процесса. В связи с этим были предприняты попытки (как до получения явного решения модели, так и после этого) асимптотического анализа распределения размера эпидемии в условиях большой популяции ($n \rightarrow \infty$). Наиболее общий подход к асимптотическому анализу распределения этого важного функционала был предпринят в работах А.В.Нагаева и его учеников, начиная с 1968 г. ([9], [10], [11] и др.). В этих работах был разработан метод сведения задачи о распределении размера эпидемии к граничной задаче для сумм независимых случайных величин в схеме серий.

В настоящей работе проводится аналогичный асимптотический анализ модели (1.1) при $\varphi_1(r) = r$, $\psi(s) = s$, $\varphi_2(r) = 1$. В отличие от общей вероятностной модели и модели с естественной иммунизацией здесь возникают специфические трудности реализации граничных задач, а также новые эффекты в соотношениях между исходными параметрами. Вопрос о явном решении уравнения для производящей функции в рассматриваемой модели, а также в модели с естественной иммунизацией, пока остаётся открытым, а задача асимптотического анализа, в силу сказанного выше, остаётся актуальной.

Отметим также, что асимптотический анализ немарковского аналога общей вероятностной модели, в котором учитывается состояние иммунной системы восприимчивых, а инфекционный период имеет произвольное (отличное от показательного) распределение, был рассмотрен в работах [12]–[14].

2. Постановка задачи и формулировка результатов

В работе рассматривается следующая марковская модель развития эпидемии:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\xi(t + \Delta t) = (r - 1, s + 1) / \xi(t) = (r, s)) = rs\Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}(\xi(t + \Delta t) = (r, s - 1) / \xi(t) = (r, s)) = \rho_1 s\Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}(\xi(t + \Delta t) = (r - 1, s) / \xi(t) = (r, s)) = \rho_2 s\Delta t + o(\Delta t), \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\rho_1 = \mu/\lambda$ и $\rho_2 = \theta/\lambda$ — относительные коэффициенты устранения и иммунизации соответственно.

В качестве регулирующих параметров выбираются величины $\theta_1 = \rho_1/n$ и $\theta_2 = \rho_2/n$, в терминах которых и будет проводиться классификация различных видов поведения процесса.

Из определения ясно, что состояния вида $(k, 0)$, $0 \leq k \leq n$ являются поглощающими для процесса $\xi(t)$.

Объектом исследования будет обобщённый размер эпидемии $\nu = \nu_1 + \nu_2$, где ν_1 и ν_2 — числа переболевших и иммунизированных восприимчивых к моменту окончания эпидемии.

Всюду в дальнейшем в данной работе будет предполагаться, что $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $m = o(n)$, а также что $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_2 = \theta_{20}$, $0 \leq \theta_{20} < \infty$. При этом относительно параметра θ_1 будут рассматриваться следующие случаи (аналогичные во многих отношениях общей вероятностной модели [10]):

- 1) Переходный случай 1-го типа: $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_1 = \theta_{10} = 1$.
- 2) Регулярный случай: $\theta_{10} > 1$ и $\theta_1 = o(m)$ или $0 < \theta_{10} < 1$ и $-\infty \leq g_0 < 0$, где $g_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\frac{m}{n} + 1 - (\theta_1 + \theta_2) \ln(1 + \frac{1}{\theta_2}) \right)$.
- 3) Переходный случай 2-го типа: $0 < \theta_{10} < 1$ и $0 \leq g_0 \leq \infty$.
- 4) Переходный случай 3-го типа: $\theta_1 \rightarrow \infty$, $m/\theta_1 \rightarrow \lambda_0$, $0 \leq \lambda_0 < \infty$.

Для этих случаев можно дать следующие предварительные комментарии общего характера.

В переходном случае 1-го типа на начальной стадии развития процесса число первоначальных больных будет меняться (при условии, что изменение произошло) на +1 или -1 с вероятностями, близкими к 1/2, т.е. процесс не имеет сноса (тренда) и поглощение происходит за счёт случайных флуктуаций, а сама вероятность поглощения аппроксимируется вероятностью первого выхода винеровского процесса на некоторую гладкую границу. Это происходит при относительно быстром стремлении θ_1 к 1, когда $1 - \theta_1 = O(1/m)$. При более медленном стремлении, когда $m | 1 - \theta_1 | \rightarrow \infty$, процесс приобретает снос, и картина качественно меняется. В этом случае, а также в регулярном случае, предельная граница в соответствующей граничной задаче вырождается, в связи с этим в качестве предельного выступает нормальное распределение. В переходном случае 3-го типа эпидемия охватывает только конечное число восприимчивых, а в переходном случае второго типа эпидемия охватывает всех восприимчивых с положительной вероятностью. Последняя возможность является существенной особенностью рассматриваемой модели: в модели с $\theta_2 = 0$ такой случай отсутствует.

Формулировку результата начнём с переходного случая первого типа. Символ $\Rightarrow$ всюду означает слабую сходимость.

Теорема 1. Если $\theta_1 \rightarrow 1$, $\beta \equiv m(1 - \theta_1) \rightarrow \beta_0$, $\frac{m^3}{n} \rightarrow \gamma_0 < \infty$, $|\beta_0| < \infty$, то для

любого фиксированного $x > 0$

$$\mathbf{P}\left(\nu > \frac{(1+\theta_2)m^2}{2}x\right) \Rightarrow \mathbf{P}\left(w(t) < \frac{1}{\sqrt{x}} + \beta_0\sqrt{\frac{x}{2}}t - \frac{(1+\theta_{20})\gamma_0x^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2}}t^2, 0 \leq t \leq 1\right),$$

где $w(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Следствие 1. Если $\gamma_0 = 0$, то в условиях Теоремы 1

$$\mathbf{P}\left(\nu > \frac{(1+\theta_2)m^2}{2}x\right) \Rightarrow 1 - e^{\frac{-(\beta_0 + |\beta_0|)}{\sqrt{2(1+\theta_{20})}}\beta_0^2x^{1/4(1+\theta_{20})}} \int_0^{\beta_0^2x^{1/4(1+\theta_{20})}} p(u)du,$$

$$\text{где } p(u) = \frac{|\beta_0|e^{\frac{|\beta_0|}{\sqrt{2(1+\theta_{20})}}u}}{2\sqrt{2\pi(1+\theta_{20})}}u^{-3/2}e^{-u-\beta_0^2/8u(1+\theta_{20})}.$$

Следствие 2. Если к тому же $\beta_0 = 0$, то

$$\mathbf{P}(\nu > (1+\theta_2)m^2x/2) \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{x}} e^{-u^2/2} du.$$

Теорема 2. Если $\theta_1 \rightarrow 1$ так, что $|\beta| \rightarrow \infty$, $\frac{m^3}{n\beta^2} \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}(\nu > a_n - b_n x) \Rightarrow \Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du,$$

$$\text{где } a_n = \sqrt{2mn}, b_n = \sqrt[4]{\frac{2m^3}{n}(1+\theta_{20})^2}.$$

Теорема 3. Если $\theta_1 \rightarrow 1$ так, что $|\beta| \rightarrow \infty$, $\frac{m^3}{n} = o(\beta^2)$, то

$$\mathbf{P}(\nu > a_n - b_n x) \Rightarrow \Phi(x),$$

где

$$a_n = \begin{cases} \frac{2m^2(1+\theta_2)^2}{(\theta_1+\theta_2)\delta_1|\beta|}, & \text{если } \beta < 0, \\ \frac{n\beta\delta_1}{m(\theta_1+\theta_2)}, & \text{если } \beta > 0, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{n}{m} \sqrt{|\beta| \delta_1 / (1 + \frac{n\beta^2\delta_1}{2m^3(1+\theta_{20})})}, & \text{если } \beta < 0, \\ \sqrt{\frac{2mn(1+\theta_{20})^2}{\beta\delta_1}} / \left(1 - \frac{1+\theta_{20}}{\delta_1}\right), & \text{если } \beta > 0, \end{cases}$$

$$\text{а } \delta_1 = 1 + \sqrt{1 + \frac{2m^3(1+\theta_{20})^2}{n\beta^2}}.$$

Перейдём к описанию регулярного случая.

Теорема 4. Если $\theta_{10} > 1$ и $\theta_1 = o(m)$ или $0 < \theta_{10} < 1$ и $-\infty \leq g_0 < 0$, то

$$\mathbf{P}(\nu > a_n - b_n x) \Rightarrow \Phi(x),$$

$$\text{где } a_n = \begin{cases} \frac{m(1+\theta_2)}{\theta_1-1}, & \text{если } \theta_{10} > 1, \\ n\alpha_n, & \text{если } 0 < \theta_{10} < 1, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{(1+\theta_{20})\sqrt{m(\theta_{10}+(\theta_{10}^2+\theta_{20})(1+\theta_{20}))}}{(\theta_{10}-1)^{3/2}}, & \text{если } \theta_{10} > 1, \\ \frac{\sqrt{n\alpha_0[1+\theta_{10}^2/(1+\theta_{20})(1+\theta_{20}-\alpha_0)](1+\theta_{20}-\alpha_0)}}{\alpha_0-(1-\theta_{10})}, & \text{если } \theta_{10} < 1, \end{cases}$$

α_n и α_0 — корни уравнений $\frac{m}{n} + x + (\theta_1 + \theta_2) \ln(1 - \frac{x}{1+\theta_2}) = 0$ и $x + (\theta_{10} + \theta_{20}) \ln(1 - \frac{x}{1+\theta_{20}}) = 0$ соответственно, а g_0 определено на стр. 2.

В переходном случае 2-го типа имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. Если $0 < \theta_{10} < 1$ и $0 \leq g_0 \leq \infty$, то

$$\mathbf{P}(\nu = n) \rightarrow \Phi(g_0/c_2),$$

где

$$c_2^2 = \frac{\theta_{10}^2}{(1+\theta_{20})\theta_{20}} + (\theta_{10} + \theta_{20}) \ln \left(1 + \frac{1}{\theta_{20}} \right).$$

Последний результат касается переходного случая 3-го типа.

Теорема 6. Если $\theta_1 \rightarrow \infty$, $\frac{m}{\theta_1} \rightarrow \lambda_0$, $0 < \lambda_0 < \infty$, то

$$\mathbf{P}(\nu = k) \rightarrow \frac{\lambda_0^k}{k!} e^{-\lambda_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3. Редукция к граничной задаче для сумм независимых случайных величин

Общая схема доказательства близка к рассуждениям работ [5] и [10]. Поглощение марковского процесса (2.1) в состоянии $(n - k, 0)$ соответствует обобщённому размеру эпидемии $\nu = k$, и для изучения этого распределения достаточно ограничиться рассмотрением соответствующей вложенной цепи Маркова:

$$\begin{cases} \mathbf{P}((r, s) \rightarrow (r - 1, s + 1)) = \frac{r}{n} / (\theta_1 + \theta_2 + r/n), \\ \mathbf{P}((r, s) \rightarrow (r, s - 1)) = \theta_1 / (\theta_1 + \theta_2 + r/n), \\ \mathbf{P}((r, s) \rightarrow (r - 1, s)) = \theta_2 / (\theta_1 + \theta_2 + r/n). \end{cases}$$

Следует отметить, что аналогичное случайное блуждание в общей вероятностной модели было введено Фостером [15].

Для удобства перейдём к эквивалентному случайному блужданию с помощью преобразования $r' = n - r$, $s' = n - r - (s - m)$:

$$\begin{cases} P((r', s') \rightarrow (r' + 1, s')) = \frac{1 - r'/n}{1 + \theta_1 + \theta_2 - r'/n} = p_{nr'}^{(1)}, \\ P((r', s') \rightarrow (r', s' + 1)) = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1 + \theta_2 - r'/n} = p_{nr'}^{(2)}, \\ P((r', s') \rightarrow (r' + 1, s' + 1)) = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1 + \theta_2 - r'/n} = p_{nr'}^{(3)}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Сразу отметим, что здесь и всюду в дальнейшем двойные индексы $nr', ni, ni - 1$ и т.д. даются без запятой, что не приведёт к путанице, так как первый индекс n всюду один и тот же и означает номер "серии".

Легко видеть, что блуждание (3.1) начинается в точке $(0, 0)$, а поглощающим экраном служат целочисленные точки прямой $s' = m + r', r' = 0, \dots, n$. Далее, как и в работе [9], (модель (3.1) с $\theta_2 = 0$), введём вспомогательные случайные величины (с.в.) ζ_{ni} как времена пребывания блуждающей частицы на прямой $r' = i - 1, i = 1, 2, \dots, n$. Легко понять, ввиду марковости блуждания (3.1), что эти с.в. независимы и имеют геометрическое распределение

$$\mathbf{P}(\zeta_{ni} = k) = (1 - p_{ni-1}^{(2)})(p_{ni-1}^{(2)})^k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Кроме того, как и в работе [5], введём с.в. η_{ni} , которые принимают значение 1, если переход на линию $r' = i$ произошёл путём иммунизации восприимчивого, и значение 0, если это осуществилось путём заболевания, т.е.

$$\eta_{ni} = \begin{cases} 1, & \theta_2/(1 + \theta_2 - \frac{i-1}{n}), \\ 0, & \frac{1-(i-1)/n}{1+\theta_2-\frac{i-1}{n}}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Легко понять, что с.в. $\eta_{n1}, \eta_{n2}, \dots, \eta_{nn-1}$ также будут независимыми. Заметим еще, что в модели с естественной иммунизацией с.в. η_{ni} принимают значения 1 и 0 с вероятностями $\theta/(\lambda + \theta)$ и $\lambda/(\lambda + \theta)$ соответственно.

Теперь введём основные с.в.

$$\xi_{n1} = \zeta_{n1}, \quad \xi_{ni} = \zeta_{ni} + \eta_{ni} \quad \text{при } i \geq 2.$$

Нетрудно установить из (3.2) и (3.3), что

$$\mathbf{P}(\xi_{ni} = k) = \begin{cases} p_{ni-1}^{(1)}, & \text{если } k = 0, \\ (1 - p_{ni-1}^{(1)})(1 - p_{ni-1}^{(2)})(p_{ni-1}^{(2)})^k, & \text{если } k \geq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Далее, введём суммы

$$S_{nK} = \sum_{i=1}^k \xi_{ni}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{и} \quad S_{nk}^* = \frac{S_{nk} - M_{nk}}{B_n},$$

где

$$M_{nk} = \mathbf{E}S_{nk}, \quad B_{nk}^2 = \mathbf{D}S_{nk}, \quad B_n^2 = B_{nk_n}^2.$$

В терминах этих величин распределение ν записывается в виде

$$\mathbf{P}(\nu > k) = \mathbf{P}(S_{n1} < m, S_{n2} < m + 1, \dots, S_{nk+1} < m + k). \quad (3.5)$$

Пусть $\xi_n(t)$ — непрерывная случайная ломаная с вершинами в точках (t_{nk}, S_{nk}^*) , а $g_n(t)$ детерминированная ломаная с вершинами в точках $(t_{nk}, \frac{m+k-1-M_{nk}}{B_n})$, $k = 1, 2, \dots, k_n$, где $t_{nk} = \frac{B_{nk}^2}{B_n^2}$; тогда (3.5) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}(\nu > k_n) = \mathbf{P}(\xi_n(t) < g_n(t), \quad 0 \leq t \leq 1). \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) и служит основой для получения предельных распределений с использованием принципа инвариантности, согласно которому $f(\xi_n(t)) \implies f(w(t))$ для

любого непрерывного в $[0, 1]$ функционала f , где $w(t)$ — стандартный винеровский процесс (см., например, [16]). Сразу отметим, что в некоторых из рассматриваемых случаев предельная граница $g(t)$ является непрерывной функцией, а в большинстве других она является вырожденной: $g(1) = \text{const}$, $g(t) = \infty$ при $0 < t < 1$.

Для обоснования применимости принципа инвариантности необходимо изучить асимптотику моментов и проверить выполнение условий теоремы Линдеберга.

Исходя из (3.2) и (3.3), нетрудно установить, что

$$m_{ni} \equiv \mathbf{E}\xi_{ni} = \frac{\theta_1}{1 - \frac{i-1}{n} + \theta_2} + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2 - \frac{i-1}{n}},$$

$$\sigma_{ni}^2 \equiv \mathbf{D}\xi_{ni} = \frac{\theta_1}{1 + \theta_2 - \frac{i-1}{n}} + \left(\frac{\theta_1}{1 + \theta_2 - \frac{i-1}{n}} \right)^2 + \frac{\theta_2 \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)}{\left(1 + \theta_2 - \frac{i-1}{n}\right)^2}.$$

Асимптотику величин M_{nk} и B_{nk}^2 найдём с помощью следующей леммы, доказательство которой не представляет труда.

Лемма 1. Если $h(x) \geq 0$ и не возрастает на $[0, 1]$, то для любых $\alpha \in (0, 1]$ и $k_n < n$

$$\sum_{k=0}^{k_n} h\left(1 - \alpha \frac{k}{n}\right) = \frac{n}{\alpha} \int_{1 - \frac{\alpha k_n}{n}}^1 h(x) dx + R_n,$$

где $h(1) \leq R_n \leq h\left(1 - \alpha \frac{k_n}{n}\right)$.

Отсюда нетрудно получить, что если $k \leq n(1 - \delta)$, $0 < \delta < 1$, то

$$M_{nk+1} = -n(\theta_1 + \theta_2) \ln \left(1 - \frac{k}{n(1 + \theta_2)}\right) + \frac{\theta_1 + \theta_2}{1 + \theta_2} R_{n_1}, \quad (3.7)$$

$$B_{nk+1}^2 = \frac{k\theta_1^2}{(1 + \theta_2)^2} \frac{1}{1 - \frac{k}{(1 + \theta_2)n}} - n(\theta_1 + \theta_2) \ln \left(1 - \frac{k}{n(1 + \theta_2)}\right) + \frac{\theta_1 + \theta_2}{1 + \theta_2} R_{n_1} + \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2}{(1 + \theta_2)^2} R_{n_2}, \quad (3.8)$$

где $1 \leq R_{n_1} \leq \frac{1 + \theta_2}{\theta_2 + \delta}$, $1 \leq R_{n_2} \leq \frac{(1 + \theta_2)^2}{(\theta_2 + \delta)^2}$.

Аналогичным образом можно оценить и сумму третьих моментов. С помощью этих результатов нетрудно оценить дробь Ляпунова. Для $k_n \rightarrow \infty$ и $k_n \leq (1 - \delta)n$:

$$L_{3n} \equiv \frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{M}|\xi_{n_i} - m_{n_i}|^3 = O\left(\frac{1}{\sqrt{k_n}}\right).$$

Заметим также, что при $k \rightarrow \infty$ и $k = o(n)$:

$$M_{nk+1} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{1 + \theta_2} k + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2(1 + \theta_2)^2} \frac{k^2}{n} + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right), \quad (3.9)$$

$$B_{nk+1}^2 \sim \sigma^2(n)k, \quad \sigma^2(n) = \left(\frac{\theta_1}{1 + \theta_2}\right)^2 + \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} + \frac{\theta_2}{(1 + \theta_2)^2}. \quad (3.10)$$

4. Доказательство основных утверждений

Доказательство теоремы 1. В условиях этой теоремы $k_n = o(n)$. Поэтому из (3.9) и (3.10) имеем, что $t_{nk} \sim \frac{k}{k_n}$ и при этом

$$g_n(t_{nk}) = \frac{m + k - \frac{\theta_1 + \theta_2}{1 + \theta_2}k - \frac{\theta_1 + \theta_2}{(1 + \theta_2)^2} \frac{k^2}{n} + O(k^3/n^2)}{\sigma(n)\sqrt{k_n}}.$$

Выбирая $k_n = (1 + \theta_2)m^2x/2$ и замечая, что $\sigma^2(n) \sim \frac{2}{1 + \theta_{20}}$, имеем

$$\begin{aligned} g_n(t_{nk}) &= \frac{1}{\sqrt{x}} + \left(1 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{1 + \theta_2}\right) \frac{k}{k_n} \sqrt{k_n} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2(1 + \theta_2)^2} \left(\frac{k}{k_n}\right)^2 \frac{k_n^{3/2}}{n} + O\left(\frac{k_n}{n^2}\right)^{5/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{(1 - \theta_1)m\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \theta_2}} t_{nk} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{1 + \theta_2}} \frac{m^3 x^{3/2}}{n \cdot 2^{3/2}} t_{nk}^2 + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

Теперь, если $k \sim k_n t$, $0 < t < 1$, то

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t_{nk}) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\beta_0 \sqrt{x/2}}{\sqrt{1 + \theta_{20}}} t - \frac{(\theta_{10} + \theta_{20})\gamma_0(x/2)^{3/2}}{2\sqrt{(1 + \theta_{20})}} t^2.$$

Таким образом, в силу принципа инвариантности

$$\mathbf{P}(\nu_n > k_n) \implies \mathbf{P}(w(t) < g(t), 0 \leq t \leq 1).$$

Утверждение следствия 1 следует из явного представления

$$\mathbf{P}(w(t) < b + kt, 0 \leq t \leq T) = 1 - e^{-b(k+|k|)} \int_0^{Tk^2/2} p_{b,k}(u) du,$$

где $p_{b,k}(u) = \frac{b|k|e^{b|k|}}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/2} e^{-u-b^2k^2/4u}$ — плотность распределения Вальда. Это равенство легко выводится из следующей формулы, приведённой в монографии Такача [17, с 92]:

$$\mathbf{P}(w(t) < b + kt, 0 \leq t \leq T) = 1 - b \int_0^T \varphi\left(\frac{b+kt}{\sqrt{t}}\right) t^{-3/2} dt,$$

где $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального распределения.

Доказательство теорем 2, 3 и 4. Эти теоремы относятся к случаю вырожденной предельной границы, т.е. когда

$$g(t) = \infty \text{ при } t \in (0, 1), \quad g(1) = x = \text{const}, \quad (4.1)$$

и тогда

$$\mathbf{P}(\nu > k_n) \implies \mathbf{P}(w(1) < x) = \Phi(x).$$

Как и в случае общей вероятностной модели ($\theta_2 = 0$), эти теоремы доказываются схожим образом. Последовательность k_n выбирается так, что $k_n = n\alpha_n - b_n x$, где α_n — положительный корень уравнения

$$f_n(x) \equiv \frac{m}{n} + x + (\theta_1 + \theta_2) \ln\left(1 - \frac{x}{1 + \theta_2}\right) = 0. \quad (4.2)$$

В терминах $f_n(x)$ искомая вероятность запишется следующим образом:

$$\mathbf{P}(\nu > k_n) = \mathbf{P}\left(S_{nk}^* < \frac{nf_n(\frac{k}{n})}{B_n} + o(1), 1 \leq k \leq k_n\right). \quad (4.3)$$

При этом

$$g_n(1) = \frac{n}{B_n} f_n\left(\frac{k_n}{n}\right) \sim \frac{f'_n(\alpha_n)}{B_n} (k_n - n\alpha_n) \sim \frac{f'_n(\alpha_n)}{B_n} b_n \cdot x \sim x, \quad (4.4)$$

если $b_n \sim B_n/f'_n(\alpha_n)$.

Вырожденность предельной границы доказывается путём выбора таких последовательностей $t'_n \rightarrow 1$ и $t''_n \rightarrow 0$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t''_n) = \infty$. Выбор таких последовательностей в каждом случае не представляет особого труда. Например, как и в [10], в качестве t''_n можно взять $t_{nk'_n} = 1 - B_{k'_n}^2/B_n^2$ где $k'_n = a_n - b_n x_n$ с $x_n \rightarrow \infty$ и $x_n = o(a_n/b_n)$, так как в рассматриваемых теоремах $b_n = o(a_n)$. А в качестве t'_n можно выбрать какое-то из t_{ni} с $i \rightarrow \infty$ с нужными свойствами.

Доказательство теоремы 2. В условиях этой теоремы корень уравнения (4.2) стремится к нулю, и для нахождения его асимптотики достаточно рассмотреть квадратичное приближение к функции $f_n(x)$, т. е. решить уравнение

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{(1 + \theta_2)^2} x^2 - 2 \frac{1 - \theta_1}{1 + \theta_2} x - 2 \frac{m}{n} = 0. \quad (4.5)$$

Следовательно, в этом случае имеем

$$\alpha_n = (1 - \theta_1) + \sqrt{(1 - \theta_1)^2 + 2 \frac{m}{n} (\theta_1 + \theta_2)} \frac{1 + \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}. \quad (4.6)$$

А так как $1 - \theta_1 = \frac{\beta}{m} = o(\sqrt{\frac{m}{n}})$ в силу условия $\frac{n}{m^3} = o(\frac{1}{\beta^2})$, то $\alpha_n \sim \sqrt{2(1 + \theta_{20}) \frac{m}{n}}$.

Выбор нормирующей последовательности b_n , в соответствии с (4.4), осуществляется так, чтобы $b_n \sim -\frac{B_n}{f'_n(\alpha_n)}$, где

$$B_n \sim \sqrt{\frac{2k_n}{1 + \theta_2}} \sim \sqrt{\frac{2n\alpha_n}{1 + \theta_2}}.$$

Следовательно, $b_n \sim \sqrt{\frac{2n(1 + \theta_{20})}{\alpha_n}}$, так как $1 - \theta_1 = o(\alpha_n)$.

Далее, в условиях данной теоремы имеем

$$g_n(t_{n1}) = \frac{m}{B_n} \sim \frac{m\sqrt{1 + \theta_{20}}}{\sqrt{2\sqrt{n}\sqrt{2(1 + \theta_{20})\frac{m}{n}}}} = \frac{m^{\frac{3}{4}}(1 + \theta_{20})^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{4}}} = \left(\frac{1 + \theta_{20}}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{m^3}{n}\right)^{\frac{1}{4}} \rightarrow \infty.$$

Тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Если $\beta < 0$ (т.е. $\theta_1 > 1$), то

$$\alpha_n = \left[\sqrt{\left(\frac{1 - \theta_1}{1 + \theta_2}\right)^2 + 2 \frac{m}{n}} - \frac{\theta_1 - 1}{1 + \theta_2} \right] \cdot \frac{1 + \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{2m^2(1 + \theta_2)^2}{n |\beta| (\theta_1 + \theta_2) \delta_1} \sim \frac{2m^2(1 + \theta_2)}{n |\beta| \delta_1},$$

где

$$\delta_1 = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{m^3(1 + \theta_2)^2}{n\beta^2}}.$$

В этом случае

$$g_n(t_{n1}) = \frac{m}{B_n} \sim \frac{m\sqrt{1 + \theta_2}}{\sqrt{2k_n}} \sim \frac{m\sqrt{1 + \theta_2}\sqrt{n|\beta|\delta_1}}{\sqrt{2n2m^2(1 + \theta_{20})}} = \frac{1}{2}\sqrt{\delta_1|\beta|} \rightarrow \infty.$$

Если же $\beta > 0$ (т.е. $\theta_1 < 1$), то корень α_n имеет тот же вид, что и в (4.6). После преобразований получим

$$\alpha_n = \frac{1 - \theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \left[1 + \sqrt{1 + 2 \frac{m(1 + \theta_2)^2}{n(1 - \theta_1)^2}} \right] = \frac{\beta\delta_1}{m(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Но в рассматриваемом случае, как нетрудно убедиться, $y_n(t_{n1}) = O\left(\frac{m^3}{n\beta^2}\right) = O(1)$. Однако, если выбрать $t''_n = \frac{B_n^2}{B_n^2}$ с $i = \left[\frac{n\beta}{m}\right]^{3/4}$, то $t''_n \rightarrow 0$, а $g_n(t''_n) \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 4. 1. Пусть сначала $\theta_{10} > 1$ и $\theta_1 = o(m)$. В этом случае корень уравнения $f_n(x) = 0$ также стремится к нулю. Применяя квадратичное приближение, из уравнения (4.5), с учётом того, что $m = o(n)$, имеем

$$\alpha_n = \left(\sqrt{\left(\frac{1 - \theta_1}{1 + \theta_2}\right)^2 + 2\frac{m}{n} - \frac{\theta_1 - 1}{1 + \theta_2}} \right) \cdot \frac{1 + \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{2m/n}{\sqrt{\left(\frac{1 - \theta_1}{1 + \theta_2}\right)^2 + 2\frac{m}{n} + \frac{\theta_1 - 1}{1 + \theta_2}}} \cdot \frac{1 + \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{m(\theta_1 + \theta_2)}{n(\theta_1 - 1)} \left(1 + O\left(\frac{m}{n}\right) \right).$$

В рассматриваемом случае $B_n^2 \sim n\alpha_n\sigma^2(n) \sim mc_0^2$, где

$$c_0^2 = \frac{(\theta_{10} + \theta_{20})}{\theta_{10} - 1} \cdot \left(\frac{\theta_{10}}{1 + \theta_{20}} + \frac{\theta_{10}^2}{(1 + \theta_{20})^2} + \frac{\theta_{20}}{(1 + \theta_{20})^2} \right).$$

В силу этого

$$g_n(t_{n1}) = \frac{m}{B_n} \sim \frac{\sqrt{m}}{c_0} \rightarrow \infty.$$

Величина b_n при этом принимает вид $b_n = \delta_0\sqrt{m}$, где

$$\delta_0 = \frac{(1 + \theta_{20})}{(\theta_{10} - 1)^{3/2}} + \sqrt{\theta_{10} + \frac{\theta_{20} + \theta_{10}^2}{1 + \theta_{20}}}.$$

2. Если $0 < \theta_{10} < 1$ и при этом выполняется условие $-\infty \leq g_0 < 0$, то уравнение $f_n(x) = 0$ имеет положительный корень α_n , $1 - \theta_1 < \alpha_n \leq 1$, причём $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$, где α_0 — корень уравнения

$$x + (\theta_{10} + \theta_{20}) \ln \left(1 - \frac{x}{1 + \theta_{20}} \right) = 0.$$

В условиях рассматриваемого случая, в силу (3.8), имеем

$$B_n^2 \sim \frac{n\alpha_0\theta_{10}^2}{(1+\theta_{20})^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha_0}{1+\theta_{20}}} - n(\theta_{10} + \theta_{20}) \ln(1 - \frac{\alpha_0}{1+\theta_{20}}).$$

А так как $(\theta_{10} + \theta_{20}) \ln(1 - \frac{\alpha_0}{1+\theta_{20}}) = -\alpha_0$, то

$$B_n^2 \sim n\alpha_0(1 + \theta_{10}^2/(1 + \theta_{20})(1 + \theta_{20} - \alpha_0)) \equiv nc_1^2.$$

В силу этого $g_n(t_{n1}) = \frac{m}{B_n} \sim \frac{m}{c_1\sqrt{n}}$, и поэтому в качестве t_n'' выберем t_{ni} с $i = [n^{5/8}]$, для которого будет выполнено необходимое условие.

Тем самым теорема 4 доказана.

Что касается теоремы 5, то её утверждение очевидно ввиду того, что при её условиях $B_n^2 \sim nc_2^2$, где $c_2^2 = \frac{\theta_{10}^2}{(1+\theta_{20})\theta_{20}} + (\theta_{10} + \theta_{20}) \ln\left(1 + \frac{1}{\theta_{20}}\right)$, и, следовательно,

$$g_n(1) \sim \frac{nf_n(1)}{B_n} \sim \frac{\sqrt{n}f_n(1)}{C_2} \sim \frac{g_0}{C_2}.$$

Доказательство теоремы 6. Легко понять, что в условиях рассматриваемой теоремы $p_{ni}^{(2)} \rightarrow 1$ и $p_{ni}^{(2)} \sim p_{n0}^{(2)} = \frac{\theta_1}{1+\theta_1+\theta_2}$ при любом фиксированном i .

Следовательно, вместо с.в. ξ_{ni} можно рассматривать (при $i \geq 2$) такие $\widetilde{\xi}_{ni}$, что

$$\mathbf{P}(\widetilde{\xi}_{ni} = k) = \begin{cases} p_{n0}^{(1)}, & \text{если } k = 0 \\ (1 - p_{n0}^{(1)})(1 - p_{n0}^{(2)})(p_{n0}^{(2)})^k, & \text{если } k \geq 1, \end{cases} \quad (4.7)$$

а $\widetilde{\xi}_{n1}$ имеет распределение (3.2) с $p_{ni-1}^{(2)} = p_{n0}^{(2)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\nu = k) &\sim \mathbf{P}(\widetilde{\xi}_{n1} < m, \widetilde{\xi}_{n1} + \widetilde{\xi}_{n2} < m+1, \dots, \widetilde{\xi}_{n1} + \dots + \widetilde{\xi}_{nnk+1} \geq m+k) = \\ &= \sum_{i_1 < m} \mathbf{P}(\widetilde{\xi}_{n1} = i_1) \sum_{i_2 < m+1-i_1} \mathbf{P}(\widetilde{\xi}_2 = i_2) \dots \sum_{i_k < m+k-1-i_1-\dots-i_{k-1}} \mathbf{P}(\widetilde{\xi}_{nk} = i_k) \\ &\quad \sum_{i_{k+1} \geq m+k-i_1-\dots-i_k} \mathbf{P}(\widetilde{\xi}_{nk+1} = i_{k+1}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Далее, легко заметить, что суммирование по $i_2, \dots, i_{k-1}$ в (4.8) можно ограничить значениями $i_2 \geq 1, \dots, i_k \geq 1$, так как в силу (4.7) значения $i_2 = 0, \dots, i_k = 0$ влекут за собой появление слагаемых, содержащих $p_{n0}^{(1)}$, которые стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому, с учётом (4.7), имеем

$$\mathbf{P}(\nu = k) = (1 - p_{n0}^{(1)})^k (1 - p_{n0}^{(2)})^k (p_{n0}^{(2)})^m \cdot N_k(m) + o(1), \quad (4.9)$$

где $N_k(m) = |D_k(m)|$ — число точек в области

$$D_k(m) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) : i_1 < m, \dots, i_1 + \dots + i_k < m+k-1, i_2 \geq 1, \dots, i_k \geq 1\}.$$

Легко установить, что величина $N_k(m)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$N_k(m) = \sum_{i=1}^m N_{k-1}(i). \quad (4.10)$$

Основную идею доказательства продемонстрируем для $k = 2$. Если $D_1(m) = \{i_1 : i_1 < m\}$, то

$$\begin{aligned} D_2(m) &= \{(i_1, i_2) : i_1 < m, i_1 + i_2 < m + 1; i_2 \geq 1\} = \\ &= \cup_{i=1}^m \{(i_1, i_2) : i_1 < m, i_1 + i_2 < m + 1; i_2 = i\} = \\ &= \cup_{i=1}^m \{i_1 : i_1 < m + 1 - i\} = \cup_{j=1}^m D_1(j). \end{aligned}$$

Далее, нетрудно показать, что $N_k(m) = C_{m+k-1}^k$. Это легко обосновывается индукцией по m с использованием соотношения (4.10) и тождества $\sum_{k=1}^m C_{k+a}^{k-1} = C_{m+a+1}^{m-1}$. Подставляя $N_k(m)$ в соотношение (4.9), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\nu = k) &\sim (1 - p_{n0}^{(1)})^k (1 - p_{n0}^{(2)})^k (p_{n0}^{(2)})^m \frac{(m + k - 1)!}{k!(m - 1)!} \sim \\ &\sim \frac{\left(m \left(1 - p_{n0}^{(2)}\right)\right)^k}{k!} \left(1 - \frac{m \left(1 - p_{n0}^{(2)}\right)}{m}\right)^m \sim \frac{\lambda_0^k}{k!} e^{-\lambda_0}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Kermack W. O., McKendrick A. G., Contributions to the mathematical theory of epidemics. *Proc. Roy. Lond. Soc.* (1927) **A 115**, 700-721.
2. Бартлетт М. С., *Введение в теорию случайных процессов*. ИЛ, Москва, 1958.
3. Баруча-Рид А. Т., *Элементы теории марковских процессов и их приложения*. "Наука", Москва, 1969.
4. Downton F., The ultimate size of carrier-born epidemic. *Biometrika* (1968) **55**, №2, 277-289.
5. Нагаев А. В., Рахманина Г. И., Пороговые теоремы для стохастической модели с им-мунизацией. *Мат. заметки* (1970) **3**, №3, 385-392.
6. Gani J., On the partial differential equation of epidemic theory I. *Biometrika* (1965) **52**, №3-4, 617-622.
7. Siskind. V., A solution of general stochastic epidemic. *Biometrika* (1965) **52**, №3-4, 613-616.
8. Bailey N. T. J., *The mathematical theory of epidemic*, London, 1957.
9. Нагаев А. В., Старцев А. Н., Пороговая теорема для одной модели эпидемии. *Мат. заметки*. (1968) **3**, №2, 179-185.
10. Нагаев А. В., Старцев А. Н., Асимптотический анализ одной стохастической модели эпидемии. *Теория вероятностей и её прим.* (1970) **XV**, №1, 97-105.
11. Нагаев А. В., Некоторые предельные теоремы для общей стохастической модели эпидемии. *Матем. заметки* (1973) **13**, №5, 709-714.
12. Старцев А. Н., Об одной модели с взаимодействием частиц двух типов, обобщающей процесс эпидемии Бартлетта-МакКендрика. *Теория вероятностей и её применения* (2001) **46**, №3, 463-482.
13. Startsev A. N., Asymptotic analysis of the general stochastic epidemic with variable infections periods. *J. Applied Probability* (2001) **38**, 18-35.

14. Мирзаев М., Старцев А. Н., Предельные теоремы для одной модели с взаимодействием частиц двух типов, обобщающей процесс эпидемии Бартлетта-МакКендрика. *Теория вероятностей и её применения* (2006) **51**, №2, 385-390.
15. Foster F.G., Note on Bailey's and Whitte's treatment of a general stochastic epidemic. *Biometrika* (1955) **42**, 123-125.
16. Гихман И. И., Скороход А. В., *Введение в теорию случайных процессов*. Наука, 1965.
17. Такач Л., *Комбинаторные методы в теории случайных процессов*. Мир, Москва, 1974.

Статья поступила 27.01.2012.

Переработанный вариант поступил 02.07.2013.