Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. П. Виноградов, О независимых событиях в семействах дискретных распределений, *Дискрет. матем.*, 2013, том 25, выпуск 4, 116–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:59:08

О независимых событиях в семействах дискретных распределений

© 2013 г. О. П. Виноградов

Рассматриваются дискретные пространства элементарных событий, в которых вероятности элементарных событий зависят от параметра λ , принадлежащему некоторому множеству. Вводятся понятие событий, независимых относительно этого семейства распределений, и понятие семейства вероятностных распределений без независимых событий. Дано простое необходимое условие существования событий, независимых относительно семейств распределений степенного ряда. Оно дает возможность для ряда распространенных распределений исследовать вопрос о существовании событий, независимых относительно этих семейств распределений. Приведены примеры семейств распределений, имеющих независимые события, семейств без независимых событий, а также семейств, не являющимися ни теми, ни другими.

1. Введение

Понятие независимости событий является одним из центральных понятий теории вероятностей.

Определение 1. События A и B называются независимыми, если выполнено равенство

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (1)$$

Определение 2. События A и B называются зависимыми, если

$$P(AB) \neq P(A)P(B).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только дискретные пространства элементарных событий и предполагать, что вероятность каждого элементарного события отлична от нуля и что любая совокупность элементарных событий является событием.

Будем также исключать из рассмотрения тот случай, когда одно из событий A или B совпадает со всем пространством элементарных событий или невозможным событием, так как в этом случае равенство (1) выполнено.

В любом вероятностном пространстве всегда существуют хотя бы два зависимых события. Действительно, если из события A следует событие B , то эти события зависимы.

Заметим, что существуют вероятностные пространства, в которых нет независимых событий.

Например, если число элементарных событий равно трем, то нетрудно видеть, что в этом пространстве не существует независимых событий.

Пусть задано дискретное пространство элементарных событий $\Omega = \Omega(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots)$. Обозначим $p_k = \mathbf{P}(\omega_k)$.

В работе [8] показано, что если для дискретного распределения $\{p_n\}$ для всех $n \geq 0$ выполняются неравенства $p_{n+1} \leq p_n^2$, то в соответствующем вероятностном пространстве не существует независимых событий.

В [1] изучался вопрос о построении дискретных пространств элементарных событий, в которых существуют или не существуют независимые события. Приведем один из результатов этой работы. Пусть в конечном вероятностном пространстве Ω вероятности элементарных событий являются рациональными числами, т.е. $\mathbf{P}(\omega_k) = a_k/b_k$, где a_k, b_k – натуральные числа, a_k/b_k – правильные несократимые дроби. Запишем $\mathbf{P}(\omega_k)$ в виде n_k/n , где n – наименьшее общее кратное знаменателей этих несократимых дробей, а n_k – некоторые натуральные числа. Оказывается, что если в Ω существуют независимые события, то n – составное число, обратное утверждение не верно. Если же n – простое число, то в Ω нет независимых событий. Обратное утверждение также не верно. Из этих результатов следует, что если вероятности всех элементарных событий одинаковы, то в Ω нет независимых событий тогда и только тогда, когда число элементарных событий является простым числом. Последний результат получен ранее в [2].

Автору известен ряд работ по аналогичной тематике [2]–[9].

В настоящей работе предполагается, что вероятности $p_k = \mathbf{P}(\omega_k)$ зависят от параметра λ , принадлежащего некоторому множеству $\mathfrak{M}$, т.е. $p_k = p_k(\lambda)$ и $p_k(\lambda) > 0$ для всех $k \geq 0$.

Определение 3. События $A, B \subset \Omega$ называются независимыми относительно семейства вероятностных распределений $\{p_k(\lambda)\}$ ($\lambda \in \mathfrak{M}$) на Ω , если они независимы для всех $\lambda \in \mathfrak{M}$.

Определение 4. Назовем семейство вероятностных распределений $\{p_k(\lambda)\}$ ($\lambda \in \mathfrak{M}$) на Ω семейством без независимых событий, если для каждого $\lambda \in \mathfrak{M}$ любые события A и B зависимы.

В настоящей работе дано простое необходимое условие существования событий, независимых относительно семейства распределений степенного ряда. Это условие применяется к ряду известных семейств. Приведены примеры семейств распределений, имеющих независимые события, семейств без независимых событий, а также семейств, не являющимися ни теми, ни другими.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. События A и B независимы тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}(AB)\mathbf{P}(\overline{A+B}) = \mathbf{P}(\overline{AB})\mathbf{P}(AB). \quad (2)$$

Доказательство. Из элементарных свойств вероятности следуют равенства

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\overline{AB}) + \mathbf{P}(AB),$$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\overline{AB}) + \mathbf{P}(AB),$$

$$\mathbf{P}(\overline{A+B}) = 1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(AB).$$

Поэтому для произвольных событий A и B справедливо равенство

$$\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB)\mathbf{P}(\overline{A+B}) - \mathbf{P}(\overline{AB})\mathbf{P}(A\overline{B}),$$

из которого и вытекает лемма 1.

Обратим внимание, что события AB , $\overline{A+B}$, $\overline{AB}$, $A\overline{B}$ образуют полную группу событий.

Рассмотрим дискретное пространство элементарных событий $\Omega(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots)$. Каждому элементарному событию ω_k поставим в соответствие положительное число x_k . Пусть ряд из этих чисел сходится. Положим $s = \sum_{k \geq 0} x_k$. Если $s = 1$, то тем самым задана вероятностная мера $\mathbf{P}(\cdot)$ в этом пространстве элементарных событий. Если же $s \neq 1$, то будем говорить, что задана ненормированная мера $\mu(\cdot, s)$. Ненормированная мера $\mu(A, s)$ любого события A пространства Ω определяется как $\mu(A, s) = \sum_{k: \{\omega_k \in A\}} x_k$; она порождает вероятност-

ную меру $\mathbf{P}(\cdot) = \frac{\mu(\cdot, s)}{s}$.

Лемма 2. Пусть на пространстве элементарных событий Ω задана ненормированная мера $\mu(\cdot, s)$. Тогда в Ω с вероятностной мерой $\mathbf{P}(\cdot) = \frac{\mu(\cdot, s)}{s}$ существуют независимые события тогда и только тогда, когда Ω можно представить в виде $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$, причем $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$ и имеет место равенство

$$Q_1 Q_2 = Q_3 Q_4, \quad (3)$$

где $Q_i = \mu(\Omega_i, s)$.

Лемма 2 следует из леммы 1 при $A = \Omega_1 + \Omega_3$, $B = \Omega_1 + \Omega_4$.

Замечание 1. Таким образом, если условия леммы 2 выполнены, то в Ω существуют независимые события и, в частности, события $\Omega_1 + \Omega_3$, $\Omega_1 + \Omega_4$ независимы.

Замечание 2. Из леммы 2 вытекает, что понятие независимости в некотором смысле не обладает непрерывностью. А именно, пусть число элементарных событий конечно и равно некоторому составному числу N и пусть $x_k = 1$ ($1 \leq k \leq N$). Тогда (см. [1]) в соответствующем вероятностном пространстве (которое является равновероятным) существуют независимые события. Изменим x_1 так, чтобы оно было равно некоторому иррациональному числу, сколь угодно близкому к 1, а остальные x_k оставим неизменными. Равенство (3) невозможно при любом разбиении этого пространства элементарных событий, так как в противном случае рациональное число равно иррациональному. В силу леммы 2 в этом новом вероятностном пространстве не будет существовать независимых событий.

Замечание 3. Лемма 2 дает возможность построения вероятностных пространств, в которых существуют или не существуют независимые события (см. [1]).

Замечание 4. Пусть $f(\lambda) = \sum_{n=l}^{\infty} a_n \lambda^n$ ($l \geq 0$) – степенной ряд с неотрицательными коэффициентами и ненулевым радиусом сходимости R . Тогда для любого

$\lambda \in (0, R)$ можно определить дискретное вероятностное распределение $p_k(\lambda) = \frac{a_k \lambda^k}{f(\lambda)}$ ($k \geq l \geq 0$). Согласно [10] такое распределение называется распределением степенного ряда.

Класс таких семейств распределений достаточно широк и включает в себя много стандартных распределений:

1) отрицательные биномиальные распределения с параметрами r, λ ($0 < \lambda < 1$) (распределение числа "успехов", предшествующих r -й "неудаче") $p_k(\lambda) = C_{r+k-1}^k \lambda^k (1-\lambda)^r$, $k \geq 0$, $R = 1$.

В этом случае $a_k = \frac{(r+k-1)!}{k!}$, $f(\lambda) = \frac{1}{(1-\lambda)^r (r-1)!}$.

В частном случае $r = 1$ отрицательное биномиальное распределение является геометрическим распределением.

2) распределения Пуассона $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $a_k = \frac{1}{k!}$, $f(\lambda) = e^\lambda$, $k \geq 0$, $R = \infty$.

3) логарифмические распределения $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k f(\lambda)}$, $a_k = \frac{1}{k}$, $f(\lambda) = -\ln(1-\lambda)$, $k \geq 1$, $R = 1$.

3. Основные результаты

Сформулируем и докажем необходимое условие существования событий, независимых относительно семейства распределений степенного ряда.

Замечание 5. Пусть $p_k(\lambda)$ является распределением степенного ряда и пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное множество на интервале $(0, R)$, которое имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую этому интервалу. Тогда для существования событий, независимых относительно распределений $p_k(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathfrak{M}$, необходимо выполнение равенства

$$a_l a_i = a_m a_{l+i-m} \quad (4)$$

для некоторых натуральных чисел i, m таких, что $i > m > l$.

Доказательство. В этом случае ненормированная мера элементарного события ω_k равна $x_k = a_k \lambda^k$ ($k \geq l$).

Рассмотрим некоторое разбиение $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$. В силу леммы 2 для того, чтобы это разбиение порождало независимые события, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (3).

Положим $Q_j = \sum_{k: \{\omega_k \in \Omega_j\}} x_k$ для $j = 1, \dots, 4$. Из определения распределений степенного ряда вытекает, что левая и правая части (3) – аналитические функции в круге радиуса R , представленные степенными рядами, сходящимися в этом круге. Если две аналитические функции совпадают на множестве, которое имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую этой области, то эти функции совпадают в этой области [11]. Отсюда вытекает, что так как левая и правая части (3) совпадают на множестве $\mathfrak{M}$, то они совпадают и в круге радиуса R . Из совпадения сумм двух степенных рядов в окрестности $\lambda = 0$ следует совпадение коэффициентов при одинаковых степенях λ [12]. Поэтому для выполнения (3) необходимо, чтобы совпадали коэффициенты при наименьшей степени λ в левой и правой части (3). Пусть наименьшая степень λ в Q_1 равна l , а в Q_2 равна i , причем $i > l$. Таким образом,

наименьший показатель степени, в которую входит параметр λ в левой части (3), равен $(l + i)$, причем коэффициент при λ^{l+i} равен $a_l a_i$. Поэтому для выполнения (3) необходимо, чтобы в правой части (3) наименьший показатель степени, в которую входит параметр λ , был также равен $(l + i)$ с коэффициентом при λ^{l+i} , равным $a_l a_i$. Тем самым, если $\min \{k : \omega_k \in \Omega_3\} = m$, то отсюда и следует равенство (4). Так как $i > l$, $m > l$, $l + i - m > l$, то $i > m > l$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Не существует нетривиальных событий A , B , независимых относительно семейств пуассоновских, логарифмических или отрицательных биномиальных распределений (при $r = 2, 3, \dots$), если множество значений их параметра содержит непустой интервал. Существует значение их параметров, для которых можно найти по крайней мере два независимых события.*

Доказательство. Для пуассоновского распределения $l = 0$ и $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ ($k \geq 0$). В силу леммы 3 необходимо выполнение равенства $\frac{1}{i!} = \frac{1}{m!(i-m)!}$ или $C_i^m = 1$, а это равенство невозможно, так как $i > m > 1$.

В то же время, существует λ для которого можно найти два независимых события.

Пусть, например, $\Omega_1 = \Omega_1(\omega_0)$, $\Omega_2 = \Omega_2(\omega_2)$, $\Omega_3 = \Omega_3(\omega_1)$, $\Omega_4 = \Omega_4(\omega_3, \omega_4, \omega_5, \dots)$.

Условие $Q_1 Q_2 = Q_3 Q_4$ приводит к уравнению $1 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{\lambda^2}{2} = e^\lambda$. Из рассмотрения графиков левой и правой частей вытекает, что у этого уравнения существует положительный корень.

В силу леммы 3 для логарифмического распределения необходимо выполнение равенства $\frac{1}{i} = \frac{1}{m(i-m+1)}$ или $i(m-1) = m(m-1)$, а это равенство невозможно, так как $i > m > 1$.

Покажем, что существует λ для которого можно найти два независимых события.

Пусть, например, $\Omega_1 = \Omega_1(\omega_1)$, $\Omega_2 = \Omega_2(\omega_2)$, $\Omega_3 = \Omega_3(\omega_3)$, $\Omega_4 = \Omega_4(\omega_4, \omega_5, \omega_6, \dots)$.

Условие (4) приводит к уравнению $\ln(1-\lambda) + \frac{3}{2} + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} = 0$. Как нетрудно показать, оно имеет положительный корень, не превосходящий единицы. Утверждение 2 теоремы доказано.

В силу леммы 3 для отрицательного биномиального распределения при $r = 2, 3, \dots$ необходимо выполнение равенства $a_0 a_i = a_m a_{i-m}$, где $a_i = \frac{(r+i-1)!}{i!}$ ($i > m$, $m \geq 1$, $r > 1$). Покажем, что на самом деле справедливо неравенство $a_0 a_i < a_m a_{i-m}$.

Для этого нужно показать, что

$$(r-1)! \frac{(r+i-1)!}{i!} < \frac{(r+m-1)!}{m!} \frac{(r+i-m-1)!}{(i-m)!}$$

или

$$j! m! (j+i)! (i-m)! < (j+m)! (j+i-m)! i!, \quad (5)$$

где $j = r-1$.

Справедливость этого неравенства можно доказать методом индукции.

Напомним, что $i > m \geq 1$. Легко проверить, что оно справедливо для $i = m+1$. Пусть (5) верно для некоторого $i > m+1$. Докажем неравенство (8) для $i+1$. Легко

проверить, что имеет место неравенство

$$(j + i + 1)(i + 1 - m) > (j + i - m + 1)(i + 1) \quad (6)$$

Умножим (5) на (6). Тем самым получим (5), в котором заменено i на $i + 1$. Неравенство (5) доказано.

Для доказательства теоремы для отрицательных биномиальных распределений ($r = 2, 3, \dots$) осталось показать, что существует λ , для которого можно найти два независимых события.

Покажем, что существует λ для которого можно найти два независимых события. Пусть событие A состоит из элементарных событий ω_0, ω_2 , а событие B из элементарных событий ω_1, ω_2 . Нетрудно показать, что силу определения 1 эти события будут независимы, если λ удовлетворяет уравнению

$$\frac{(r+1)\lambda}{(1-\lambda)^r} = \left(1 + \frac{r(r+1)}{2}\lambda^2\right) \left(1 + \frac{r+1}{2}\lambda\right).$$

Легко видеть, что это уравнение имеет положительный корень, не превосходящий единицы.

Теорема доказана.

Пример 1. Определим на некотором множестве $\mathfrak{M}$ вероятности $p_0(\lambda), p_1(\lambda)$, $\lambda \in \mathfrak{M}$, произвольным образом так, чтобы выполнялось неравенство $p_0(\lambda) + p_1(\lambda) < 1$. Выберем вероятность $p_2(\lambda)$ из равенства

$$p_2(\lambda) = \frac{p_0(\lambda)(1 - p_0(\lambda) - p_1(\lambda))}{p_0(\lambda) + p_1(\lambda)}, \quad (7)$$

а вероятности $p_3 = p_3(\lambda), p_4 = p_4(\lambda), \dots$ зададим произвольно так, чтобы выполнялось равенство $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) = 1$.

Пусть событие A состоит из элементарных событий ω_0, ω_1 , а событие B из элементарных событий ω_0, ω_2 . Нетрудно проверить, что силу определения 1 эти события будут независимыми для всех $\lambda \in \mathfrak{M}$.

Пример 2. Зададим счетное множество функций $\{x_k(\lambda)\}$ ($k \geq 0$) с общей областью определения $\mathfrak{M}$, причем для всех $\lambda \in \mathfrak{M}$ и всех $k \geq 0$ функции $x_k(\lambda)$ обладают свойствами: $x_k(\lambda) > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} x_k(\lambda) = s(\lambda) < \infty$. Кроме этого, предположим, что можно так перенумеровать эти функции, чтобы для всех $k \geq 0$ и всех $\lambda \in \mathfrak{M}$ выполнялись равенства $x_{2k}(\lambda) = x_{2k+1}(\lambda)$.

Если множество функций $\{x_k(\lambda)\}$ ($k \geq 0$) обладает этим свойством, то у вероятностных распределений $p_k(\lambda) = \frac{x_k(\lambda)}{s(\lambda)}$ существуют события независимые относительно $p_k(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathfrak{M}$.

Действительно, проведя перенумерацию описанную выше, положим $\Omega_1 = \Omega_1(\omega_0)$, $\Omega_2 = \Omega_2(\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2k}, \dots)$, $\Omega_3 = \Omega_3(\omega_1)$, $\Omega_4 = \Omega_4(\omega_3, \omega_5, \dots, \omega_{2k+1}, \dots)$. Так как $x_{2k}(\lambda) = x_{2k+1}(\lambda)$ для всех $k \geq 0$, то $Q_1 = Q_3$, $Q_2 = Q_4$. Поэтому равенство (3) справедливо для всех $\lambda \in \mathfrak{M}$ и, значит, наше утверждение следует из леммы 2. Очевидно, что в этом вероятностном пространстве для всех $\lambda \in \mathfrak{M}$ существует бесконечное число пар независимых событий.

Пример 3. Для семейства геометрических распределений с параметром $\lambda \in (0, 1)$ существуют независимые относительно него нетривиальные события.

Пусть $p_k(\lambda) = (1-\lambda)\lambda^k$ ($k = 0, 1, \dots$). Выберем $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ следующим образом: $\Omega_1 = \Omega_1(\omega_0, \omega_4, \omega_8, \dots)$, $\Omega_2 = \Omega_2(\omega_3, \omega_7, \omega_{11}, \dots)$, $\Omega_3 = \Omega_3(\omega_1, \omega_5, \omega_9, \omega_{13}, \dots)$, $\Omega_4 = \Omega_4(\omega_2, \omega_6, \omega_{10}, \dots)$.

Нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Omega_1) &= \frac{1-\lambda}{1-\lambda^4}, \quad \mathbf{P}(\Omega_2) = \frac{(1-\lambda)\lambda^3}{1-\lambda^4}, \\ \mathbf{P}(\Omega_3) &= \frac{(1-\lambda)\lambda}{1-\lambda^4}, \quad \mathbf{P}(\Omega_4) = \frac{(1-\lambda)\lambda^2}{1-\lambda^4} \end{aligned}$$

и, как легко проверить, для всех $0 < \lambda < 1$ справедливо равенство (3).

Существуют и другие семейства распределений степенного ряда, отличные от геометрических распределений, обладающие независимыми относительно них событиями.

Пример 4. Пусть для $0 < \lambda < 1$ имеют место равенства

$$p_0(\lambda) = c(\lambda), \quad p_1(\lambda) = c(\lambda)\lambda^2, \quad p_k(\lambda) = c(\lambda)\lambda^{k+2} \quad (k \geq 2),$$

где функция $c(\lambda) > 0$ и находится из условия $1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)$. Это семейство распределений обладает независимыми относительно него событиями.

Выберем $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_1(\omega_0, \omega_2, \omega_6, \omega_{10}, \dots), \quad \Omega_2 = \Omega_2(\omega_5, \omega_9, \omega_{13}, \omega_{17}, \dots), \\ \Omega_3 &= \Omega_3(\omega_3, \omega_7, \omega_{11}, \omega_{15}, \dots), \quad \Omega_4 = \Omega_4(\omega_1, \omega_4, \omega_8, \omega_{12}, \dots). \end{aligned}$$

Нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Omega_1) &= \frac{c(\lambda)}{1-\lambda^4}, \quad \mathbf{P}(\Omega_2) = \frac{c(\lambda)\lambda^7}{1-\lambda^4}, \\ \mathbf{P}(\Omega_3) &= \frac{c(\lambda)\lambda^5}{1-\lambda^4}, \quad \mathbf{P}(\Omega_4) = \frac{c(\lambda)\lambda^2}{1-\lambda^4} \end{aligned}$$

и, как легко проверить, для всех $0 < \lambda < 1$ справедливо равенство (3).

Приведем пример семейства без независимых событий.

Пример 5. Семейство $p_0(\lambda) = 2\frac{1-\lambda}{2-\lambda}$, $p_k(\lambda) = \frac{1-\lambda}{2-\lambda}\lambda^k$ ($k \geq 1$), ($0 < \lambda < 1$) не имеет независимых событий при любом $\lambda \in \left(0, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Доказательство. Это распределение является распределением степенного ряда. В этом случае ненормированная мера имеет вид $x_0 = 2$, $x_k = \lambda^k$ ($k \geq 1$).

Покажем, что для произвольного разбиения $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$ равенство (3) невозможно, если $0 < \lambda < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следуя доказательству леммы 3, запишем Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 в виде

$$Q_1 = x_0 + \sum_{i \in N_1} x_i = 2 + \sum_{i \in N_1} \lambda^i = 2 + \varepsilon_1, \quad Q_2 = x_k + \sum_{i \in N_2} x_i = \lambda^k + \sum_{i \in N_2} \lambda^i,$$

$$Q_3 = x_l + \sum_{i \in N_3} x_i = \lambda^l + \sum_{i \in N_3} \lambda^i, \quad Q_4 = x_m + \sum_{i \in N_4} x_i = \lambda^m + \sum_{i \in N_4} \lambda^i,$$

где N_1, N_2, N_3, N_4 – некоторые непересекающиеся подмножества натуральных чисел N , такие, что их объединение совпадает с множеством всех натуральных чисел за исключением чисел k, l, m , причем $m \neq k \neq l$, причем минимальный индекс слагаемых в Q_2 равен k , минимальный индекс слагаемых в Q_3 равен l и минимальный индекс слагаемых в Q_4 равен m .

Очевидно, что $\varepsilon_1 = \sum_{k \in N_1} \lambda^k < \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k = \frac{\lambda}{1-\lambda}$.

Заметим, что минимальное число, входящее в N_2 , больше числа k . Поэтому $\sum_{i \in N_2} \lambda^i < \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda^i = \frac{\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$ и, значит, $Q_2 = \lambda^k + \sum_{i \in N_2} \lambda^i = \lambda^k(1 + \varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2 < \frac{\lambda}{1-\lambda}$.

Аналогично $Q_3 = \lambda^l(1 + \varepsilon_3)$, $Q_4 = \lambda^m(1 + \varepsilon_4)$, где $\varepsilon_i < \frac{\lambda}{1-\lambda}$ ($i = 3, 4$).

Покажем, что при $0 < \lambda < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ равенство (3) невозможно. Если (3) выполнено, то из предыдущих равенств вытекает равенство

$$(2 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)\lambda^k = (1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_4)\lambda^{m+l}.$$

Запишем его в виде

$$\lambda^{m+l-k} = \frac{(2 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_4)}. \quad (8)$$

Так как $0 \leq \varepsilon_i < \frac{\lambda}{1-\lambda}$, $i = 1, 2, 3, 4$, и $0 < \lambda < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$, то

$$1 < 2(1 - \lambda)^2 < \frac{(2 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_4)} < \frac{2 - \lambda}{(1 - \lambda)^2} < 2. \quad (9)$$

Отсюда и из (8) следует, что $p = m + l - k < 0$, но при любом целом $p \leq -1$

$$\lambda^p \geq \frac{1}{\lambda} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} > 3 \quad \text{при} \quad 0 < \lambda < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

что противоречит (9).

Список литературы

1. Виноградов О. П., Простые числа и независимость. Современные проблемы математики и механики. Том VII. Математика. Механика. Выпуск 1. К 190-летию П. Л. Чебышева (2011) 16–21.
2. Shiflett R. C., Shultz H. S., An approach to independent sets. *Mathematical Spectrum* (1979/80) **12**, 11–16.
3. Eisenberg B., Ghosh B. K., Independent events in a discrete uniform probability space. *Amer. Statist.* (1987) **41**, 52–56.
4. Baryshnikov Y. M., Eisenberg B., Independent events and independent experiments. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1993) **118**(2), 615–617.
5. Chen Z., Rubin H., Vitale R. A., Independence and determination of probabilities. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1997) **125**, №12, 3721–3723.
6. Ionascu E. J., Stancu A. A., On independent sets in purely atomic probability spaces with geometric distribution. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae* (1999) **LXVIII**, №2,.

7. Baryshnikov Y. M., Eisenberg B., Addendum to "Independence and determination of probabilities". *Proc. Amer. Math. Soc.* (2001) **129**, №9, 2817.
8. Skekely G. J., Mori T. F., Independence and atoms. *Proc. Amer. Math. Soc.* (2001) **130**, №1, 213–216.
9. Edwards W., Shiflett R., Shultz H., Dependent probability spaces. *College Mathematics Journal* (2008) **39**, №3, 221–226.
10. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., *Введение в математическую статистику*. Изд. ЛКИ, 2009.
11. Шабат Б. В., *Введение в комплексный анализ, ч.1*. Изд. "Наука", 1976.
12. Маркушевич А. И., *Теория аналитических функций, 1*. Изд. "Наука", 1967.

Статья поступила 19.02.2013.