Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Дергач, Об однозначности алфавитного декодирования общерегулярных сверхязыков, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 1, 32–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:49:52

Об однозначности алфавитного декодирования общерегулярных сверхязыков

© 2014 г. П. С. Дергач¹

Целью работы является установление алгоритмической разрешимости проблемы однозначности алфавитного декодирования общерегулярных сверхязыков.

Ключевые слова: однозначное декодирование, общерегулярный сверхязык, алфавитное кодирование.

1. Введение

Александром Александровичем Марковым было показано, что проблема однозначности алфавитного декодирования языка A^* над заданным конечным алфавитом A алгоритмически разрешима. Он построил также конструктивный алгоритм, доставляющий решение этой проблемы. Доказательство этих фактов можно прочитать, например, в [2].

Автор статьи в своей дипломной работе доказал, что этот результат можно обобщить на случай, когда кодируемое множество слов является регулярным множеством в конечном алфавите A . Именно, было показано, что проблема однозначности алфавитного декодирования произвольных регулярных языков над алфавитом A алгоритмически разрешима. Также удалось построить конструктивный алгоритм, доставляющий решение этой проблемы. Доказательство этих фактов можно прочитать в [3].

Здесь продолжается исследование этого направления и рассматривается случай, когда кодируемое множество слов является общерегулярным множеством в конечном алфавите A . Тем самым, удастся обобщить результат с конечного (по длине рассматриваемых слов) случая на бесконечный. Не ограничивая общности, можно считать, что множество общерегулярных сверхязыков является достаточно широким классом сверхязыков, и именно в нем следует рассматривать проблему однозначности алфавитного декодирования сверхязыков. В статье описывается конструктивный алгоритм, доставляющий решение этой проблемы. Показано также, что проблему однозначности алфавитного декодирования общерегулярных сверхязыков нельзя тривиально свести к проблеме однозначности алфавитного декодирования регулярных языков.

¹Место работы: МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: dergachees@mail.ru

2. Основные понятия и результаты

Абстрактным конечным автоматом называется набор $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, где A, Q, B — конечные множества, φ — функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая значения из Q , ψ — функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая значения из B . Множества A, Q, B называются соответственно *входным алфавитом*, *алфавитом состояний* и *выходным алфавитом* автомата V . Функция φ называется *функцией переходов*, а функция ψ — *функцией выходов* автомата V . *Входными словами* автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ называем произвольные конечные последовательности символов алфавита A . Для удобства рассматриваем при этом также «пустое» слово, не имеющее ни одного символа и обозначаемое Λ . *Выходными словами* алфавита V называем конечные последовательности символов алфавита B , *словами состояний* — конечные последовательности символов алфавита Q (в обоих случаях допускается и пустое слово Λ). Для каждого состояния автомата V можно рассмотреть набор $(A, Q, B, \varphi, \psi, q)$, определяющий автомат V с выделенным начальным состоянием q . Такие наборы $(A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ называются *инициальными абстрактными конечными автоматами*; для них используется обозначение V_q .

Введем ряд понятий, связанных со словами. Пусть A — некоторое конечное множество. Если $\alpha = a(1) \dots a(n)$ — конечная последовательность символов $a(1), \dots, a(n)$ алфавита A , то говорим, что α есть *слово в алфавите A* . Число n называем *длиной* слова α и обозначаем через $|\alpha|$. Длина пустого слова равна 0. Если α и β — слова, причем $\alpha = \beta\beta'$ для некоторого слова β' , то говорим, что β — *начало* слова α , β' — *окончание* слова α . Множество всех слов в алфавите A обозначаем A^* . Начало слова α , имеющее длину l , обозначаем ${}_l(\alpha)$; окончание слова α , имеющее длину l , обозначаем через ${}_l(\alpha)$. Обозначим через $\gamma_{l,m}$ слово ${}_{m-l}([{}_m(\gamma))$, где $|\gamma| \geq m > l \geq 1$. Также через $\lim(\alpha)$ будем обозначать множество всех букв слова α .

Если $\tilde{\alpha} = a(1)a(2)a(3) \dots$ — бесконечная последовательность символов алфавита A , то говорим, что $\tilde{\alpha}$ есть *сверхслово в алфавите A* . Введем ряд понятий, связанных со сверхсловами. Пусть α — конечное слово в алфавите A и $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'$ — сверхслова в алфавите A . Если при этом $\tilde{\alpha} = \alpha\tilde{\alpha}'$, то говорим, что α — *начало* сверхслова $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}'$ — *окончание* сверхслова $\tilde{\alpha}$. Множество всех сверхслов в алфавите A обозначаем A^∞ . Начало сверхслова $\tilde{\alpha}$, имеющее длину l , обозначаем ${}_l(\tilde{\alpha})$. Окончание сверхслова $\tilde{\alpha}$, полученное отбрасыванием ${}_{l-1}(\tilde{\alpha})$, будем обозначать через ${}_l(\tilde{\alpha})$. Также вводим обозначение $\tilde{\alpha}_{l,m}$ для слова ${}_{m-l}([{}_m(\tilde{\alpha}))$, где $m > l \geq 1$. Будем называть *пределом сверхслова $\tilde{\alpha}$* , $\tilde{\alpha} \in A^\infty$, $\tilde{\alpha} = a(1)a(2) \dots$, множество таких символов $a \in A$, что $a(i_j) = a, j = 1, 2, 3, \dots$, для некоторой возрастающей последовательности $i_1, i_2, i_3, \dots$. Предел сверхслова $\tilde{\alpha}$ будем обозначать $\lim(\tilde{\alpha})$.

Доопределим функции переходов и функции выходов автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ на множество $Q \times A^*$ (сохраним за ними те же обозначения). А именно, полагаем по определению

$$\varphi(q, \Lambda) = q, \quad \varphi(q, \alpha a) = \varphi(\varphi(q, \alpha), a),$$

где $q \in Q$, $\alpha \in A^*$, $a \in A$. Аналогично,

$$\psi(q, \Lambda) = \Lambda, \quad \psi(q, \alpha a) = \psi(\varphi(q, \alpha), a).$$

Через $\bar{\psi} : A^* \rightarrow B^*$ будем обозначать функцию

$$\bar{\psi}(q, \alpha) = \psi(q, {}_1(\alpha))\psi(q, {}_2(\alpha)) \dots \psi(q, \alpha).$$

Пусть $V_q = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ — инициальный абстрактный конечный автомат, $B' \subseteq B$. Множество $M = \{\alpha \mid \alpha \in A^*, \psi(q, \alpha) \in B'\}$ называем *представимым в абстрактном конечном автомате V_q с помощью подмножества B' выходных символов*. Говорим также, что автомат V_q *представляет M посредством B'* . Если $\psi(q, \alpha) \in B'$, то говорим, что слово α *распознается автоматом V_q по B'* . Пусть $M \subseteq A^* \setminus \{\Lambda\}$. Если существует конечный автомат V_q , представляющий событие M посредством некоторого подмножества $B' \subseteq B$, то событие M называем *представимым*. Если $B = \{0, 1\}$, $B' = \{1\}$, то пишем $M \leftrightarrow V_q$.

Недетерминированным конечным автоматом называется набор $V = (A, Q, B, \gamma)$, где A, Q, B — конечные множества, γ — функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая в качестве своих значений подмножества множества $Q \times B$. Если для каждой пары (q, a) , где $q \in Q$ и $a \in A$, значение $\gamma(q, a)$ есть одноэлементное множество (q', b) , то можно определить функции $\varphi, \psi : \varphi(q, a) = q', \psi(q, a) = b$. При этом возникает некоторый абстрактный конечный автомат $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$. В указанном смысле абстрактный конечный автомат можно рассматривать как частный случай недетерминированного конечного автомата. Понятие *инициального недетерминированного конечного автомата*, аналогичное понятию инициального абстрактного конечного автомата, возникает, если выделено некоторое подмножество $Q' \subseteq Q$ начальных состояний автомата. Пусть Q' — такое выделенное подмножество и $\alpha = a(1) \dots a(s)$ — слово в алфавите A . Определим класс $\tilde{\gamma}(Q', \alpha)$ последовательностей $(q(1), b(1)), \dots, (q(s), b(s))$. Каждая последовательность этого класса удовлетворяет следующим условиям:

$$1) q(1) \in Q';$$

$$2) (q(i+1), b(i)) \in \gamma(q(i), a(i)), i = 1, \dots, s;$$

(в случае $i = s$ рассматривается значение $q(s+1)$, не включаемое в последовательность $\tilde{\gamma}(Q', \alpha)$).

Недетерминированный инициальный автомат $V = (A, Q, B, \gamma, Q')$ можно рассматривать как модель устройства, применяемого для распознавания входных последовательностей. Аналогично случаю обычного конечного автомата, при этом выделяется подмножество B' множества B выходных символов. Множество входных слов M , распознаваемых автоматом, состоит из тех и только тех слов $\alpha \in A^*$, для которых в $\tilde{\gamma}(Q', \alpha)$ существует последовательность $(q(1), b(1)), \dots, (q(s), b(s))$, удовлетворяющая условию $b(s) \in B'$. Говорим также, что множество M *представимо в недетерминированном конечном автомате V с помощью подмножества B' выходных символов*.

Пусть $V_q = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ — инициальный абстрактный конечный автомат. Для произвольного сверхслова $\tilde{\alpha} = a(1)a(2)a(3) \dots$ в алфавите A обозначаем через $\tilde{\psi}(q, \tilde{\alpha})$ такое сверхслово $\tilde{\beta} = b(1)b(2)b(3) \dots$, что $b(i) = \psi(q, a(1) \dots a(i))$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Пусть $B_1, \dots, B_k$ — некоторые попарно различные подмножества множества B . Множество

$$M = \{\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha} \in A^\infty, \lim(\tilde{\psi}(q, \tilde{\alpha})) \in \{B_1, B_2, \dots, B_k\}\}$$

называем *представимым в автомате V_q с помощью семейства $\{B_1, \dots, B_k\}$ подмножеств выходных символов*. Подмножества множества A^∞ называем *сверхсобытиями в алфавите A* . Сверхсобытие S называется *представимым*, если существует абстрактный конечный инициальный автомат $V_q = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$, в котором это сверхсобытие представимо с помощью некоторого семейства B' подмножеств выходных символов. Говорим в последнем случае, что автомат V_q *представляет сверхсобытие S посредством B'* . Пишем $S \xrightarrow{B'} V_q$.

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ — произвольный конечный непустой алфавит. Пусть P_1, P_2 — непустые множества слов в алфавите A . Здесь и далее для удобства пустое слово не считается элементом множества A^* . Определим следующие операции над P_1 и P_2 :

1) *произведение* множеств P_1 и P_2 (обозначаем $P_1 \cdot P_2$) есть множество всех слов вида $\alpha_1 \alpha_2$, где $\alpha_1 \in P_1$, $\alpha_2 \in P_2$;

2) *итерация* множества P_1 (обозначаем $(P_1)^*$) есть множество всех слов вида $\alpha_1 \dots \alpha_k$, где $\alpha_1 \in P_1$, $\dots, \alpha_k \in P_1$, $k \geq 1$.

Введем понятие регулярного множества в алфавите A . Множество $P \subseteq A^*$ называем *регулярным в алфавите A* , если его можно получить из множеств вида $\{a\}$, $a \in A$, применением конечного числа операций $\cup, \cdot, ()^*$. Более подробно, определение регулярных множеств таково:

1) $\{a\}$, где a — произвольная буква алфавита A , — регулярное множество в алфавите A ;

2) если P_1, P_2 — регулярные множества в алфавите A , то $P_1 \cup P_2$, $P_1 \cdot P_2$, $(P_1)^*$ — регулярные множества в алфавите A ;

3) регулярность произвольного множества в алфавите A устанавливается в соответствии с пп. 1), 2) за конечное число шагов.

Рассмотрим следующие две операции, позволяющие получать сверхсобытия:

1) произведение события M_1 в алфавите A и сверхсобытия M_2 в этом же алфавите (обозначается $M_1 \cdot M_2$) есть сверхсобытие в алфавите A , состоящее из всех таких сверхслов $\tilde{a} = a(1)a(2)\dots$, что при некотором $i \in \{1, 2, \dots\}$ слово $a(1)\dots a(i)$ принадлежит M_1 , а сверхслово $a(i+1)a(i+2)\dots$ принадлежит M_2 .

2) Сверхитерация события M в алфавите A (обозначается M^∞) есть сверхсобытие в алфавите A , состоящее из всех таких сверхслов $\tilde{a} = a(1)a(2)\dots$, что $a(i_j)a(i_j+1)\dots a(i_{j+1}-1) \in M$, $j = 1, 2, \dots$, для некоторой возрастающей последовательности $i_1 = 1, i_2, i_3, \dots$ натуральных чисел.

Определим класс *общерегулярных сверхсобытий* в алфавите A :

1) если R — регулярное событие в алфавите A , то R^∞ есть общерегулярное сверхсобытие в алфавите A ;

2) если R_1 — регулярное событие в алфавите A и R_2 — общерегулярное сверхсобытие в алфавите A , то $R_1 \cdot R_2$ есть общерегулярное сверхсобытие в алфавите A ;

3) если R_1 и R_2 — общерегулярные сверхсобытия в алфавите A , то $R_1 \cup R_2$ — общерегулярное сверхсобытие в алфавите A ;

4) общерегулярность произвольного сверхсобытия в алфавите A устанавливается в соответствии с пп. 1), 2), 3) за конечное число шагов.

Зафиксируем два конечных непустых алфавита $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ и B . Пусть $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ — слова в алфавите B . Некоторые из этих слов (и даже все) могут совпадать. Рассмотрим отображение $f : A \rightarrow B^*$:

$$f(a_1) = \beta_1, f(a_2) = \beta_2, \dots, f(a_r) = \beta_r.$$

Это соотношение называется *схемой кодирования*. Доопределим отображение f до отображения $\tilde{f} : A^\infty \rightarrow B^\infty$ следующим образом:

$$\tilde{f}(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} \dots) = \beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_n} \dots$$

Отображение $\tilde{f}$ будем называть *алфавитным кодированием из алфавита A в алфавит B* .

Пусть есть некоторое свехрегулярное множество $\tilde{P}$ в алфавите A и некоторое алфавитное кодирование $\tilde{f}$. Пусть $\tilde{\beta} \in \tilde{f}(\tilde{P})$. Тогда $\tilde{\alpha} \in \tilde{P}$ называется *расшифровкой* $\tilde{\beta}$ при алфавитном кодировании $\tilde{f}$ на свехрегулярном множестве $\tilde{P}$ или *расшифровкой* $\tilde{\beta}$, если $\tilde{f}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\beta}$. Таких расшифровок может быть несколько. Если $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_1) \neq \tilde{f}(\tilde{\alpha}_2)$ для любых различных $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in \tilde{P}$, то говорим, что *декодирование* однозначно на $\tilde{P}$ по $\tilde{f}$.

Теорема 1. *Существует алгоритм, определяющий по произвольной паре $(\tilde{f}, \tilde{R})$, где $\tilde{f}$ — алфавитное кодирование из алфавита A в алфавит B , а $\tilde{R}$ — свехрегулярное множество в алфавите A , однозначно ли декодирование на $\tilde{R}$ по $\tilde{f}$.*

3. Доказательства вспомогательных утверждений

Теорема Клини. *Множество слов является представимым тогда и только тогда, когда оно регулярно.*

Теорема Мак-Ноттона. *Множество свехслов является представимым тогда и только тогда, когда оно общерегулярно.*

Лемма о детерминизации. *Любой недетерминированный конечный автомат V с q состояниями может быть преобразован в абстрактный конечный автомат V' с не более чем 2^q состояниями так, что представляемые этими автоматами по $\{1\}$ множества совпадают.*

Доказательства этих утверждений можно найти в [1].

Лемма об алфавитной детерминизации. *Пусть $V_q = (A, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi, q)$ — инициальный абстрактный конечный автомат, представляющий событие M посредством $\{1\}$. Пусть $\tilde{f}$ — алфавитное кодирование из алфавита $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ в алфавит B , $|f| = \max_{i=1, \dots, r} |\tilde{f}(a_i)|$. Тогда событие*

$$\tilde{f}(M) := \{\beta \in B \mid \exists \alpha \in M : \tilde{f}(\alpha) = \beta\}$$

представимо посредством $\{1\}$ некоторым инициальным абстрактным конечным автоматом $V'_q = (B, Q', \{0, 1\}, \varphi', \psi', q')$ с не более чем $2^{|Q|+r}|Q|(|f|-1)$ состояниями.

Доказательство. Заменяем в автомате V_q входной алфавит A алфавитом $\tilde{f}(A) := \bigcup_{i=1}^r \{\tilde{f}(a_i)\}$ и соответственно поправим функции перехода и выхода, заменив в них все a_i на $\tilde{f}(a_i)$. Выходной алфавит, алфавит состояний и начальное состояние оставим теми же. Полученный автомат V'_q может оказаться недетерминированным, так как некоторые буквы нового входного алфавита в функциях перехода и выхода могут встречаться больше одного раза для одного и того же состояния. Тем не менее, V'_q представляет событие $\tilde{f}(M)$ посредством $\{1\}$.

Теперь заменим для каждой пары состояний q_l, q_m и каждого слова $\tilde{f}(a_i)$ имеющиеся в V'_q переходы из состояния q_l в состояние q_m по слову $\tilde{f}(a_i) = \beta_1 \dots \beta_s$ последовательностью состояний с побуквенными переходами $\beta_1, \dots, \beta_s$ так, как это изображено на рисунке 1:

рис. 1

Полученный недетерминированный конечный автомат V_q'' по-прежнему представляет событие $\tilde{f}(M)$ посредством $\{1\}$, имеет входной алфавит B , выходной алфавит $\{0, 1\}$ и множество состояний Q' , по мощности не превосходящее $|Q| + r|Q|(|f| - 1)$. В самом деле, общее количество переходов в автомате V_q' равно $r|Q|$ и каждый из них добавляет к общему числу состояний автомата V_q'' не более $|f| - 1$ состояний.

Осталось применить лемму о детерминизации к автомату V_q'' . Полученный абстрактный конечный автомат $\tilde{V}_q$ имеет входной алфавит B , выходной алфавит $\{0, 1\}$, представляет событие $\tilde{f}(M)$ посредством $\{1\}$ и имеет не более $2^{|Q|+r|Q|(|f|-1)}$ состояний. Утверждение леммы доказано.

Лемма о сверхсобытии. Пусть R — общерегулярное сверхсобытие в алфавите A . Тогда существуют такие регулярные события $S_1, M_1, \dots, S_k, M_k$ в алфавите A , что $R = \bigcup_{i=1}^k S_i \cdot (M_i)^\infty$.

Доказательство. Каждое общерегулярное сверхсобытие можно получить за конечное число шагов используя три следующих правила:

- 1) если R — регулярное событие в алфавите A , то R^∞ есть общерегулярное сверхсобытие в алфавите A ;
- 2) если R_1 — регулярное событие в алфавите A и R_2 — общерегулярное сверхсобытие в алфавите A , то $R_1 \cdot R_2$ есть общерегулярное сверхсобытие в алфавите A ;
- 3) если R_1 и R_2 — общерегулярные сверхсобытия в алфавите A , то $R_1 \cup R_2$ — общерегулярное сверхсобытие в алфавите A .

Докажем утверждение леммы индукцией по длине минимального вывода из правил 1), 2), 3) общерегулярного сверхсобытия R .

База индукции. Если минимальная длина вывода равна 1, то общерегулярное сверхсобытие R получено по правилу 1) и имеет вид R^∞ для некоторого регулярного события R в алфавите A .

Индуктивный переход. Пусть утверждение справедливо для всех общерегулярных сверхсобытий с минимальной длиной вывода не больше n . Рассмотрим общерегулярное сверхсобытие R с минимальной длиной вывода $n + 1$. Если бы последним правилом в этом выводе было правило 1), то длина вывода была бы равна 1, что невозможно. Если последним правилом было правило 2), то $R = R_1 \cdot R_2$ для некоторого регулярного события R_1 и общерегулярного сверхсобытия R_2 с минимальной длиной вывода n . По предположению индукции, существуют такие регулярные со-

бытия $S_1, M_1, \dots, S_k, M_k$, что $R_2 = \bigcup_{i=1}^k S_i \cdot (M_i)^\infty$. Поэтому

$$R = R_1 \cdot R_2 = R_1 \cdot \left(\bigcup_{i=1}^k S_i \cdot (M_i)^\infty \right) = \bigcup_{i=1}^k (R_1 \cdot S_i) \cdot (M_i)^\infty.$$

Так как для всех $i = 1, \dots, k$ множества $R_1 \cdot S_i$ регулярны, то это — искомое представление. Если же последним правилом было правило 3), то $R = R_1 \cup R_2$ для некоторых общерегулярных сверхсобытий R_1 и R_2 с минимальной длиной вывода не больше n . По предположению индукции существуют такие регулярные события $S_1, M_1, \dots, S_k, M_k, P_1, T_1, \dots, P_m, T_m$, что

$$R_1 = \bigcup_{i=1}^k S_i \cdot (M_i)^\infty \quad \text{и} \quad R_2 = \bigcup_{i=1}^m P_i \cdot (T_i)^\infty.$$

Поэтому

$$R = R_1 \cup R_2 = \left(\bigcup_{i=1}^k S_i \cdot (M_i)^\infty \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^m P_i \cdot (T_i)^\infty \right).$$

Это искомое представление. Утверждение леммы доказано.

Лемма о сокращении. Пусть A — конечный алфавит, $\delta_1, \delta_2, \xi_1, \xi_2, \beta$ — слова (возможно, пустые) в алфавите A , пусть P_1, P_2 — регулярные множества в алфавите A и $\delta_1\beta\delta_2 \in P_1$, $\xi_1\beta\xi_2 \in P_2$, пусть $V_1 = (A, Q_1, \{0, 1\}, \varphi_1, \psi_1, q_1)$, $V_2 = (A, Q_2, \{0, 1\}, \varphi_2, \psi_2, q_2)$ — инициальные абстрактные конечные автоматы, представляющие по множеству $\{1\}$ множества P_1, P_2 соответственно. Тогда существует такое слово β' в алфавите A , $|\beta'| \leq |Q_1||Q_2|$, что $\delta_1\beta'\delta_2 \in P_1$, $\xi_1\beta'\xi_2 \in P_2$.

Доказательство. Допустим, что $|\beta| > |Q_1||Q_2|$. Рассмотрим такое множество T пар состояний автоматов V_1, V_2 , что $T = \{(\varphi_1(q_1, \delta_1[l(\beta))), \varphi_2(q_2, \xi_1[l(\beta))), 1 \leq l \leq |\beta|\}$. Так как $|T| < |Q_1||Q_2| + 1$, то существуют такие $1 \leq l_1 < l_2 \leq |Q_1||Q_2| + 1$, что $\varphi_1(q_1, \delta_1[l_1(\beta)]) = \varphi_1(q_1, \delta_1[l_2(\beta)])$, $\varphi_2(q_2, \xi_1[l_1(\beta)]) = \varphi_2(q_2, \xi_1[l_2(\beta)])$. Пусть β_1 и β_2 определяются равенствами $\beta_1 = [l_1(\beta)$, $\beta = [l_2(\beta)\beta_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_1(q_1, \alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_2) &= \psi_1(\varphi_1(q_1, \alpha_1\beta_1), \beta_2\alpha_2) = \psi_1(\varphi_1(q_1, \alpha_1[l_2(\beta)]), \beta_2\alpha_2) = \\ &= \psi_1(\varphi_1(q_1, \delta_1[l_2(\beta)\beta_2]), \delta_2) = \psi_1(\varphi_1(q_1, \delta_1\beta), \delta_2) = \psi_1(q_1, \delta_1\beta\delta_2) = 1. \end{aligned}$$

Аналогично $\psi_2(q_2, \xi_1\beta_1\beta_2\xi_2) = 1$. Таким образом, существует такое $\beta'' = \beta_1\beta_2$, что $\delta_1\beta''\delta_2 \in P_1$, $\xi_1\beta''\xi_2 \in P_2$ и $|\beta''| < |\beta|$. Проведя конечное число раз процедуру сокращения β , получим такое β' длины не больше $|Q_1||Q_2|$, что $\delta_1\beta'\delta_2 \in P_1$, $\xi_1\beta'\xi_2 \in P_2$. Утверждение леммы доказано.

Лемма о разрезе. Пусть α — слово в алфавите A , P — регулярное множество в алфавите A , представимое с помощью инициального абстрактного конечного автомата $V_{q_0} = (A, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi, q_0)$ с помощью множества $\{1\}$, $\alpha \in P$, $1 \leq s < |\alpha|$. Тогда существуют регулярные множества P_1 и P_2 в алфавите A , представимые с помощью инициальных абстрактных конечных автоматов с входным алфавитом A , выходным алфавитом $\{0, 1\}$ и алфавитом состояний $|Q|$ с помощью множества $\{1\}$ удовлетворяющие условиям $P_1 \cdot P_2 \subseteq P$, $\alpha \in P_1 \cdot P_2$, $[_s(\alpha) \in P_1,]_{|\alpha|-s}(\alpha) \in P_2$.

Доказательство. Пусть $\varphi(q_0, [s(\alpha)]) = q_1$. Рассмотрим два инициальных абстрактных конечных автомата $V_1 = (A, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi_1, q_0)$, $V_2 = (A, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi, q_1)$, где $\psi_1(q, a) = 1$ при $\varphi(q, a) = q_1$ и $\psi_1(q, a) = 0$ в противном случае. По теореме Клини эти два автомата по множеству $\{1\}$ представляют регулярные множества P_1 и P_2 . Так как $\varphi(q_0, [s(\alpha)]) = q_1$, то $\psi_1(q_0, [s(\alpha)]) = 1$, т. е. $[s(\alpha)] \in P_1$. Далее, так как $\alpha \in P$, то

$$1 = \psi(q_0, \alpha) = \psi(\varphi(q_0, [s(\alpha)]),]_{|\alpha|-s}(\alpha)) = \psi(q_1,]_{|\alpha|-s}(\alpha)),]_{|\alpha|-s}(\alpha) \in P_2.$$

Значит, $\alpha \in P_1 \cdot P_2$.

Пусть $\alpha_1 \in P_1, \alpha_2 \in P_2$. Тогда $\varphi(q_0, \alpha_1) = q_1$, $\psi(q_1, \alpha_2) = 1$. Значит, $\psi(q_0, \alpha_1 \alpha_2) = \psi(\varphi(q_0, \alpha_1), \alpha_2) = \psi(q_1, \alpha_2) = 1$, т. е. $\alpha_1 \alpha_2 \in P$. Поэтому $P_1 \cdot P_2 \subseteq P$. Утверждение леммы доказано.

Лемма о начале сверхсобытия. *Существует алгоритм, который по произвольному натуральному k и произвольному общерегулярному сверхсобытию $\tilde{R}$ в алфавите A строит множество*

$$M(k, \tilde{R}) := \{\alpha \in A^k \mid \exists \gamma \in A^\infty : \alpha\gamma \in \tilde{R}\}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное натуральное k и произвольное общерегулярное сверхсобытие $\tilde{R}$ в алфавите A . По теореме Мак-Ноттона $\tilde{R}$ представимо некоторым абстрактным конечным инициальным автоматом $V_{q_1} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_1)$ с помощью множества $B' \subseteq B$. Возьмем произвольное $\alpha \in A^k$ и проверим, верно ли, что $\alpha \in M(k, \tilde{R})$.

Пусть $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$. Пусть $1 \leq i \leq n$ и $\beta \in A^*$, $\varphi(q_i, \beta) = q_i$, $\lim(\bar{\psi}(q_i, \beta)) = B_0 \in B'$. Более точно, пусть

$$\psi(q_i, [p_1(\beta)]) \cup \psi(q_i, [p_2(\beta)]) \cup \dots \cup \psi(q_i, [p_s(\beta)]) = B_0,$$

где $s = |\lim(B_0)|$. Другими словами, мы берем минимальный по мощности набор букв слова β , во время подачи которых автомат V_{q_1} выдает те буквы, которые образуют B_0 . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi(q_i, [p_1(\beta)]) &:= q_1^{st}, & \varphi(q_i, [p_1(\beta)]) &:= q_1^{fi}, \\ \varphi(q_i, [p_2(\beta)]) &:= q_2^{st}, & \varphi(q_i, [p_2(\beta)]) &:= q_2^{fi}, \\ &\dots & & \\ \varphi(q_i, [p_s(\beta)]) &:= q_s^{st}, & \varphi(q_i, [p_s(\beta)]) &:= q_s^{fi}. \end{aligned}$$

рис. 2

Здесь $\{b_1, b_2, \dots, b_s\} = B_0$ и некоторые состояния могут повторяться. Так как $\varphi(q_i, [_{p_1-1}(\beta)) = q_1^{st}$, то, выкидывая из слова $[_{p_1-1}(\beta)$ все куски, образующие циклы в диаграмме переходов, получаем такое подслово β_1 слова $[_{p_1-1}(\beta)$, что $\varphi(q_i, \beta_1) = q_1^{st}$ и $|\beta_1| \leq n - 1$. Аналогично можно найти такое слово β_2 , что $\varphi(q_1^{fi}, \beta_2) = q_2^{st}$ и $|\beta_2| \leq n - 1$. Действуя таким образом и дальше, получаем слово $\gamma := \beta_1 a(1) \beta_2 a(2) \dots a(s) \beta_{s+1}$, для которого $\varphi(q_i, \gamma) = q_i$. При этом $|\gamma| \leq (s+1)(n-1) + s \leq (|B|+1)(n-1) + |B|$. Обозначим это число через L .

Теперь легко проверить, верно ли, что $\alpha \in M(k, \tilde{R})$. Это верно тогда и только тогда, когда в диаграмме переходов автомата V_{q_1} существует состояние $\tilde{q}$, достижимое из состояния $\varphi(q_1, \alpha)$, и для некоторого слова β в алфавите A имеем $\varphi(\tilde{q}, \beta) = \tilde{q}$, $\lim(\tilde{\psi}(\tilde{q}, \beta)) \in B'$. По доказанному выше, достаточно проверить слова $\beta \in A^L$, что можно сделать в силу конечности множества A^L .

Осталось для всех слов $\alpha \in A^k$ проверить, верно ли, что $\alpha \in M(k, \tilde{R})$. Таким образом мы узнаем все элементы множества $M(k, \tilde{R})$. Утверждение леммы доказано.

Главная лемма. Пусть $S_1, M_1, \dots, S_k, M_k$ — регулярные события в алфавите A , которые можно представить абстрактными конечными инициальными автоматами с входным алфавитом A , выходным алфавитом B и алфавитами состояний мощности не более Q . Пусть алфавитное кодирование $\tilde{f}$ из алфавита A в алфавит B не однозначно декодируемо на сверхсобытии $\tilde{R} = \bigcup_{i=1}^k S_i \cdot (M_i)^\infty$. Пусть $\tilde{Q} := 2^{Q+Q|A|(|f|-1)}$. Тогда для некоторых $1 \leq j \leq k, 1 \leq h \leq k$ существуют такие слова $\alpha_1 \in S_j, \alpha_2 \in S_h, \beta_1 \in M_j^*, \beta_2 \in M_h^*$, что:

- 1) $\alpha_1 \cdot (\beta_1)^\infty \neq \alpha_2 \cdot (\beta_2)^\infty$,
- 2) $\tilde{f}(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^\infty) = \tilde{f}(\alpha_2 \cdot (\beta_2)^\infty)$,
- 3) $\max(|\alpha_1| + |\beta_1|, |\alpha_2| + |\beta_2|) \leq 3Q^2 + 1 + \tilde{Q}^2(\tilde{Q} + 3) + 2\tilde{Q}^2(\tilde{Q} + 3) \left(\frac{|B|^{\tilde{Q}^2(\tilde{Q}+3)} - |B|}{|B|-1} \right)$.

Доказательство. Так как $\tilde{f}$ не однозначно декодируемо на $\tilde{R}$, то существуют такие $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in \tilde{R}$, что $\tilde{\alpha}_1 \neq \tilde{\alpha}_2$, $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_1) = \tilde{f}(\tilde{\alpha}_2)$. Без нарушения общности можно считать, что $\tilde{\alpha}_1 \in S_1 \cdot (M_1)^\infty, \tilde{\alpha}_2 \in S_2 \cdot (M_2)^\infty$. Случай, когда $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in S_1 \cdot (M_1)^\infty$, разбирается аналогично. Тогда существуют такие $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, m_1^i \in M_1, m_2^i \in M_2 (i = 1, \dots, \infty)$, что $\tilde{\alpha}_1 = s_1 \cdot m_1^1 \cdot m_1^2 \dots, \tilde{\alpha}_2 = s_2 \cdot m_2^1 \cdot m_2^2 \dots$. Введем обозначения:

$$l := \max_{s \in \mathbb{N}} \{s | [s(\alpha_1) = [s(\alpha_2)]\}, \alpha := [l(\alpha_1),$$

$$a_1 := (\alpha_1)_{l,l+1}, a_2 := (\alpha_1)_{l,l+1}, \tilde{\beta} :=]_{l+1}(\alpha_1), \tilde{\gamma} :=]_{l+1}(\alpha_2).$$

Рассмотрим 4 случая.

Случай 1.

$l+1 \leq |s_1|, l+1 \leq |s_2|$ (см. рис. 3).

$\tilde{\alpha}_1$	s_1			m_1^1	m_1^2	m_1^3	
	α	a_1	$\tilde{\beta}$				

$\tilde{\alpha}_2$	s_2				m_2^1	m_2^2	
	α	a_2	$\tilde{\gamma}$				

рис. 3

Применим лемму о разрезе для слов $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$ по местам $s := l$ и $s := l+1$ так, как это показано на рис. 4.

$\tilde{\alpha}_1$	s_1^1	s_1^2	s_1^3	m_1^1	m_1^2	m_1^3	
	α	a_1	$\tilde{\beta}$				

$\tilde{\alpha}_2$	s_2^1	s_2^2	s_2^3		m_2^1	m_2^2	
	α	a_2	$\tilde{\gamma}$				

рис. 4

Здесь $s_1^1 \in S_1^1$, $s_1^2 \in S_1^2$, $s_1^3 \in S_1^3$, $s_2^1 \in S_2^1$, $s_2^2 \in S_2^2$, $s_2^3 \in S_2^3$, $S_1^1 \cdot S_1^2 \cdot S_1^3 \subseteq S_1$, $S_2^1 \cdot S_2^2 \cdot S_2^3 \subseteq S_2$ и каждое из событий $S_1^1, S_1^2, S_1^3, S_2^1, S_2^2, S_2^3$ представимо абстрактными конечными инициальными автоматами с входным алфавитом A , выходным алфавитом B и алфавитами состояний мощности не более Q .

Применим лемму о сокращении для слов $s_1^1 = s_2^1 = \alpha$ с общей частью α . По ней существует $\alpha' \in S_1^1 \cap S_2^1 : |\alpha'| \leq Q^2$:

$\tilde{\alpha}_1$	α'	s_1^2	s_1^3	m_1^1	m_1^2	m_1^3	
	$\leq Q^2$	a_1	$\tilde{\beta}$				

$\tilde{\alpha}_2$	α'	s_2^2	s_2^3	m_2^1	m_2^2	
	$\leq Q^2$	a_2	$\tilde{\gamma}$			

рис. 5

В образе $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_1) = \tilde{f}(\tilde{\alpha}_2)$ получаем:

рис. 6

По лемме об алфавитной детерминизации слова $\tilde{f}(\alpha'), \tilde{f}(a_1), \tilde{f}(s_1^3), \tilde{f}(m_1^1), \dots, \tilde{f}(a_2), \tilde{f}(s_2^3), \tilde{f}(m_2^1), \dots$ из образа на рис. 6 распознаются абстрактными конечными инициальными автоматами с входным алфавитом B с не более чем $\tilde{Q}$ состояниями (для каждого слова своим).

Обозначим через β произвольное из слов верхнего разбиения (см. рис. 6). Оно распознается абстрактным конечным инициальным автоматом V с не более чем $\tilde{Q}$ состояниями (см. рис. 6). Обозначим через V^{-1} автомат с входным алфавитом A , из которого был получен автомат V при применении леммы об алфавитной детерминизации. Если слово β разбивается при измельчении нижним разбиением на более чем $\tilde{Q} + 3$ подслов, то три из них могут быть частями слов $\tilde{f}(\alpha'), \tilde{f}(a_2), \tilde{f}(s_2^3)$, а оставшиеся будут словами из множества $\{\tilde{f}(m_2^i) | i \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим состояния, в которых окажется автомат V при подаче на вход слова β во время прохождения граничных точек измельчения:

рис. 7

Здесь $t > \tilde{Q} + 2$. После как минимум $\tilde{Q} + 1$ состояний в нижнем разбиении начинаются куски из $\tilde{f}(m_2^i)$, $i \in \mathbb{N}$. Так как в автомате V не более $\tilde{Q}$ состояний, то по принципу Дирихле среди таких состояний найдется пара одинаковых. Если выкинуть подслово γ слова β между этими двумя позициями с совпадающими состояниями, то новое слово β' будет по-прежнему распознаваться автоматом V .

рис. 8

Обозначим слово, полученное после выкидывания из $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_1)$ подслова γ , через $\tilde{f}_n(\tilde{\alpha}_1)$ (см. рис. 8). Так как слово β' распознается автоматом V , то существует слово α' в алфавите A , распознаваемое автоматом V^{-1} . Из этого факта и леммы о разрезе следует, что слово $\tilde{f}_n(\tilde{\alpha}_1)$ лежит в $S_1 \cdot (M_1)^\infty$. При выкидывании подслова γ из нижнего разбиения выпадает несколько слов из множества $\{\tilde{f}(m_2^i) | i \in \mathbb{N}\}$. Значит, слово $\tilde{f}_n(\tilde{\alpha}_1)$ лежит и в $S_2 \cdot (M_2)^\infty$. Новые верхнее и нижнее разбиения гарантируют наличие двух расшифровок слова $\tilde{f}_n(\tilde{\alpha}_1)$ в алфавите A . Эти расшифровки различны, так как в них на одном и том же месте, как и в сверхсловах $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, стоят различные буквы a_1 и a_2 . Поэтому можно изначально считать, что слово β разбирается при измельчении нижним разбиением на не более чем $\tilde{Q} + 3$ подслов. Далее, несколько раз применяя лемму о сокращении, добиваемся, чтобы все подслова β' , являющиеся словами нижнего разбиения, имели длину не больше $\tilde{Q}^2$. Отсюда непосредственно получаем, что $|\beta| \leq \tilde{Q}^2 \cdot (\tilde{Q} + 3)$. Проведя аналогичные рассуждения для измельчения нижнего разбиения верхним, получаем, что и для произвольного слова β из нижнего разбиения выполняется неравенство $|\beta| \leq \tilde{Q}^2 \cdot (\tilde{Q} + 3)$. Обозначим это число через $L(\tilde{Q})$.

Рассмотрим две окончания $\tilde{f}(m_1^1) \cdot \tilde{f}(m_1^2) \cdot \tilde{f}(m_1^3) \dots$ и $\tilde{f}(m_2^1) \cdot \tilde{f}(m_2^2) \cdot \tilde{f}(m_2^3) \dots$ сверхслова $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_1) = \tilde{f}(\tilde{\alpha}_2)$. По ним естественно строятся их разбиения на $\tilde{f}(m_1^1)$, $\tilde{f}(m_1^2)$, $\tilde{f}(m_1^3), \dots$ и $\tilde{f}(m_2^1)$, $\tilde{f}(m_2^2)$, $\tilde{f}(m_2^3), \dots$. Возьмем измельчение этих двух разбиений на их общей части. Слова измельчения разделим на 2 группы. К первой группе отнесем слова, являющиеся собственным началом слова одного из разбиений и собственным окончанием слова другого разбиения. Ко второй группе отнесем слова, являющиеся словами одного из разбиений:

рис. 9

Каждое слово из первой группы имеет длину не больше $L(\tilde{Q}) - 1$. Найдем количество различных слов в алфавите B , длина которых не превосходит $L(\tilde{Q}) - 1$:

$$|B| + |B|^2 + \dots + |B|^{L(\tilde{Q})-1} = \frac{|B|^{L(\tilde{Q})} - |B|}{|B| - 1}.$$

Обозначим это число через $L(B, \tilde{Q})$. Если слово из первой группы встречается хотя бы три раза, то среди них найдутся два слова одной ориентации:

рис. 10

Два слова левой ориентации позволяют построить периодическое сверхслово с двумя разными разбиениями:

рис. 11

Для двух слов правой ориентации периодическое сверхслово строится аналогично. Заметим, что это сверхслово будет по-прежнему иметь две различные расшивки из $S_1 \cdot (M_1)^\infty$ и $S_2 \cdot (M_2)^\infty$, так как в них на одном и том же месте, как и в сверхсловах $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, будут стоять различные буквы a_1 и a_2 .

В силу изложенного выше сумма длины предпериода и длины периода полученных таким образом слов в верхнем разбиении не превосходит

$$|\alpha'| + |a_1| + |s_1^3| + 2L(\tilde{Q})L(B, \tilde{Q}).$$

Для нижнего разбиения получаем аналогичную оценку:

$$|\alpha'| + |a_2| + |s_2^3| + 2L(\tilde{Q})L(B, \tilde{Q}).$$

Окончательная оценка для обоих разбиений равна:

$$Q^2 + 1 + L(\tilde{Q}) + 2L(\tilde{Q})L(B, \tilde{Q}).$$

Случай 2.

$l + 1 > |s_1|$, $l + 1 \leq |s_2|$ (см. рис. 12).

$\tilde{\alpha}_1$	s_1	m_1^1	m_1^2	m_1^3		
	α			a_1	$\tilde{\beta}$	

$\tilde{\alpha}_2$	s_2			m_2^1	m_2^2	
	α			a_2	$\tilde{\gamma}$	

рис. 12

Без ограничения общности можно считать, что $a_1 \in m_1^3$. Применим лемму о разрезе для слова $m_1^3 \in M_1$ по местам $s := l - |s_1| - |m_1^1| - |m_1^2|$ и $s := l - |s_1| - |m_1^1| - |m_1^2| + 1$ и для слова $s_2 \in S_2$ по местам $s := l$ и $s := l + 1$ так, как это показано на рисунке 13.

$\tilde{\alpha}_1$	s_1	m_1^1	m_1^2	$m_{1,1}^3$	a_1	$m_{1,3}^3$	
	α				a_1	$\tilde{\beta}$	

$\tilde{\alpha}_2$	s_2^1	s_2^2	s_2^3	m_2^1	m_2^2	
	α	a_2	$\tilde{\gamma}$			

рис. 13

Отличие рассуждений от случая 1 состоит в том, что к итоговой оценке добавляется оценка длины подслова $m_1^1 \cdot m_1^2 \cdot m_{1,1}^3$. Каждое из слов m_1^i распознается одним и тем же автоматом, задающим M_1 . Обозначим этот автомат через V_1 . Теперь применим идею леммы о сокращении к словам $m_1^1 \cdot m_1^2 \cdot m_{1,1}^3$ и s_2^1 . Тонкость состоит в том, что границы между m_1^1 и m_1^2 , равно как и границы между m_1^2 и $m_{1,1}^3$, ставятся в соответствие начальное состояние автомата V_1 . К общей оценке добавится Q^2 . Таким образом, итоговая оценка равна:

$$2Q^2 + 1 + L(\tilde{Q}) + 2L(\tilde{Q})L(B, \tilde{Q}).$$

Случай 3.

$$l + 1 \leq |s_1|, l + 1 > |s_2|.$$

Случай сводится к случаю 2 перестановкой сверхслов $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$.

Случай 4.

$$l + 1 > |s_1|, l + 1 > |s_2|.$$

$\tilde{\alpha}_1$	s_1	m_1^1	m_1^2	m_1^3		
	α			a_1	$\tilde{\beta}$	

$\tilde{\alpha}_2$	s_2	m_2^1	m_2^2		
	α			a_2	$\tilde{\gamma}$

рис. 14

Без ограничения общности можно считать, что $|s_1| \leq |s_2|$, $a_1 \in m_1^3$ и $a_2 \in m_2^2$. После применения леммы о разрезе получаем:

$\tilde{\alpha}_1$	s_1	m_1^1	m_1^2	$m_{1,1}^3$	a_1	$m_{1,3}^3$	
	α				a_1	$\tilde{\beta}$	

$\tilde{\alpha}_2$	s_2	m_2^1	$m_{2,1}^2$	a_2	$m_{2,3}^2$	
	α			a_2	$\tilde{\gamma}$	

рис. 15

Отличие рассуждений от случая 1 состоит в том, что к итоговой оценке добавляются две оценки. Одна — оценка длины общей части слов $m_1^1 \cdot m_1^2 \cdot m_{1,1}^3$ и $|s_2|$. Вторая — длины общей части слов $m_1^1 \cdot m_1^2 \cdot m_{1,1}^3$ и $m_2^1 \cdot m_{2,1}^2$. Получение этих оценок повторяет получение оценки из случая 2. К общей оценке добавится $2Q^2$. Таким

образом, итоговая оценка имеет вид

$$3Q^2 + 1 + L(\tilde{Q}) + 2L(\tilde{Q})L(B, \tilde{Q}).$$

Разбор случаев закончен. Подставляя значения для $L(\tilde{Q})$ и $L(B, \tilde{Q})$, получаем требуемую оценку. Утверждение леммы доказано.

Заключительная лемма. *Существует алгоритм, определяющий по произвольной паре $(\tilde{f}, \tilde{R})$, где $\tilde{f}$ — алфавитное кодирование из алфавита A в алфавит B , а $\tilde{R}$ — общерегулярное сверхсобытие в алфавите A , существуют ли $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in \tilde{R}$, $\tilde{\alpha}_1 \neq \tilde{\alpha}_2$, для которых выполняется $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_1) = \tilde{f}(\tilde{\alpha}_2)$.*

Доказательство. По лемме о сверхсобытии существуют такие регулярные события $S_1, M_1, \dots, S_k, M_k$ в алфавите A , что $R = \bigcup_{i=1}^k S_i \cdot (M_i)^\infty$. По теореме Клини эти события представимы некоторыми абстрактными конечными инициальными автоматами с входным алфавитом A и выходным алфавитом B . Их количество конечно, поэтому существует такое натуральное число Q , что мощности алфавитов состояний этих автоматов не превосходят Q . Пусть

$$\tilde{Q} := 2^{Q+Q|A|(|f|-1)}, \quad L(B, \tilde{Q}) := \frac{|B|^{L(\tilde{Q})} - |B|}{|B| - 1},$$

$$L(B, Q, \tilde{Q}) := 3Q^2 + 1 + L(\tilde{Q}) + 2L(\tilde{Q})L(B, \tilde{Q}).$$

По лемме о начале сверхсобытия существует алгоритм, который строит множество $M(L(B, Q, \tilde{Q}), \tilde{R})$. По этому множеству можно конечным перебором определить, верно ли, что для некоторых $1 \leq j \leq k, 1 \leq h \leq k$ существуют слова $\alpha_1 \in S_j, \alpha_2 \in S_h, \beta_1 \in M_j^*, \beta_2 \in M_h^*$, удовлетворяющие условиям

- 1) $\alpha_1 \cdot (\beta_1)^\infty \neq \alpha_2 \cdot (\beta_2)^\infty$,
- 2) $\tilde{f}(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^\infty) = \tilde{f}(\alpha_2 \cdot (\beta_2)^\infty)$,
- 3) $\max(|\alpha_1| + |\beta_1|, |\alpha_2| + |\beta_2|) \leq L(B, Q, \tilde{Q})$.

Если такие слова есть, то $\tilde{f}$ не однозначно декодируемо на $\tilde{R}$. Если таких слов нет, то по главной лемме $\tilde{f}$ однозначно декодируемо на $\tilde{R}$. Алгоритм проверки однозначности алфавитного декодирования, определяющий по произвольной паре $(\tilde{f}, \tilde{R})$, однозначно ли декодируемо $\tilde{f}$ на $\tilde{R}$, построен. Утверждение леммы доказано.

Нетрудно видеть, что из заключительной леммы вытекает утверждение Теоремы 1.

4. Дополнение

Покажем, что проблему однозначности алфавитного декодирования общерегулярных сверхязыков нельзя тривиально свести к проблеме однозначности алфавитного декодирования регулярных языков.

Утверждение 1. *Существуют такие алфавиты A и B , алфавитное кодирование $\tilde{f}$ из алфавита A в алфавит B и общерегулярное сверхсобытие $\tilde{R}$ в алфавите A , что $\tilde{f}$ однозначно декодируемо на $\bigcup_{k=1}^\infty M(k, \tilde{R})$, но не однозначно декодируемо на $\tilde{R}$.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $\tilde{f}(a_1) := b_1$, $\tilde{f}(a_2) := b_1b_2$, $\tilde{f}(a_3) := b_2b_2$. В качестве $\tilde{R}$ возьмем произвольное общерегулярное сверхсобытие в алфавите A , содержащее сверхслова $a_1a_3^\infty$ и $a_2a_3^\infty$. Например, $\tilde{R} := \{a_1\} \cdot (\{a_3\})^\infty \cup \{a_2\} \cdot (\{a_3\})^\infty$. Тогда $\tilde{f}(a_1a_3^\infty) = \tilde{f}(a_2a_3^\infty) = a_1b_1^\infty$. Значит, $\tilde{f}$ не однозначно декодируемо на $\tilde{R}$.

Пусть $\tilde{f}(\alpha_1) = \tilde{f}(\alpha_2)$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in A^*$. Возможны 3 случая.

- 1) $]_1(\tilde{f}(\alpha_1)) =]_1(\tilde{f}(\alpha_2)) = b_1$. Тогда $]_1(\alpha_1) =]_1(\alpha_2) = a_1$.
- 2) $]_2(\tilde{f}(\alpha_1)) =]_2(\tilde{f}(\alpha_2)) = b_1b_2$. Тогда $]_1(\alpha_1) =]_1(\alpha_2) = a_2$.
- 3) $]_2(\tilde{f}(\alpha_1)) =]_2(\tilde{f}(\alpha_2)) = b_2b_2$. Тогда $]_1(\alpha_1) =]_1(\alpha_2) = a_3$.

Во всех случаях $]_1(\alpha_1) =]_1(\alpha_2)$. Повторяя рассуждение конечное число раз, получаем: $\alpha_1 = \alpha_2$. Значит, $\tilde{f}$ однозначно декодируемо на A^* , а значит, и на $\bigcup_{k=1}^\infty M(k, \tilde{R})$. Утверждение доказано.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
2. С. В. Яблонский, *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
3. Дергач П. С., Об однозначности алфавитного декодирования. *Интеллектуальные системы* (2011) **15**, №3, 349–360.

Статья поступила 19.02.2013.