Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов, Оценка точности аппроксимации в предельной теореме Б. А. Севастьянова и ее применение в задаче о случайных включениях, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 1, 75–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:49:20

Оценка точности аппроксимации в предельной теореме Б. А. Севастьянова и ее применение в задаче о случайных включениях

© 2014 г. В. А. Копытцев¹, В. Г. Михайлов²

Получена оценка точности пуассоновской аппроксимации в известной теореме Б. А. Севастьянова об условиях сходимости распределения суммы случайных индикаторов к распределению Пуассона. Этот результат применяется для оценки скорости сходимости к предельному пуассоновскому распределению в одной из теорем для числа решений систем случайных включений.

Ключевые слова: суммы случайных индикаторов, пуассоновская аппроксимация, системы случайных включений над конечным полем.

1. Введение

Теорема Б. А. Севастьянова о достаточных условиях сходимости распределения суммы независимых случайных индикаторов к распределению Пуассона была опубликована им в работе [1] и имеет следующий вид.

Пусть $W = \xi_1 + \dots + \xi_n$ — сумма независимых индикаторов, совместное распределение которых зависит от n как от параметра. Введем обозначения

$$p_{i_1, \dots, i_r} = \mathbf{P}\{\xi_{i_1} = \dots = \xi_{i_r} = 1\}, \quad \lambda_n = \sum_{i=1}^n p_i, \quad p = \max_i p_i.$$

При каждом $n = 2, 3, \dots$ и каждом $k = 2, 3, \dots$ рассмотрим множество $J_k(n) = \{(i_1, \dots, i_r) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ и выделим в нем некоторое подмножество $I_k(n)$, называемое исключительным множеством. Введем обозначения

$$A^{(k)} = \sum_{I_k(n)} p_{i_1} \dots p_{i_k}, \quad B^{(k)} = \sum_{I_k(n)} p_{i_1, \dots, i_k},$$

$$D^{(k)} = \max_{(i_1, \dots, i_k) \in J_k(n) \setminus I_k(n)} \left| \frac{p_{i_1, \dots, i_k}}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} - 1 \right|.$$

¹ Место работы: Академия криптографии Российской Федерации
e-mail: kopytcev2012@mail.ru

² Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
e-mail: mikhail@mi.ras.ru

Теорема Севастьянова. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\lambda_n \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$, $p \rightarrow 0$ и $A^{(k)} + B^{(k)} + D^{(k)} \rightarrow 0$ при всех $k = 2, 3, \dots$. Тогда распределение случайной величины W при $n \rightarrow \infty$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Эта теорема дает простой рецепт доказательства предельной теоремы Пуассона с помощью метода моментов. С ее помощью удалось описать условия пуассоновской сходимости в целом ряде задач вероятностной комбинаторики, в том числе, для числа μ_r ячеек, содержащих по r частиц каждая, в различных схемах случайных размещений (см., например, [2], [3]), для числа повторений длинных цепочек в последовательности независимых испытаний ([4], [5]), для числа пар эквивалентных цепочек ([6], [7]), для статистик критериев проверки качества псевдослучайных чисел ([8], [9]) и т. д. В работах [10], [11], [12] были предложены обобщенные версии теоремы Севастьянова для совместных распределений сумм случайных индикаторов, также нашедшие свое применение в задачах вероятностной комбинаторики.

С появлением известного метода Чена – Стейна для оценивания точности пуассоновской аппроксимации интерес к теореме Севастьянова значительно ослабел. Оказалось, что в большинстве случаев, когда применимы оба метода, использовать метод Чена – Стейна проще. Кроме того, он позволяет получить явные оценки точности аппроксимации сопровождающим пуассоновским распределением.

Тем не менее, имеется круг задач, в котором метод Чена – Стейна пока применить успешно не удалось. Это задачи о числе таких решений систем случайных линейных или полиномиальных уравнений над конечным полем, которые удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям. Такие задачи впервые были систематически рассмотрены в работах [13] и [14]. Немного позже эта тематика расширилась за счет систем случайных включений ([15] – [18]). Все основные результаты этих работ доказаны с помощью обычной и обобщенной версий теоремы Севастьянова.

В настоящей работе мы выводим оценку точности пуассоновской аппроксимации в теореме Севастьянова (раздел 2) и применяем ее при оценке скорости сходимости к предельному пуассоновскому распределению в одной из теорем для числа решений систем случайных полиномиальных включений (раздел 3).

Заметим, что попытка построения оценки точности пуассоновской аппроксимации в теореме Севастьянова уже предпринималась ранее в работе [19], но она осталась не до конца реализованной.

2. Оценка точности в предельной теореме Севастьянова

Пусть F_W и F_Y — функции распределения случайных величин W и Y , Po_λ — функция распределения Пуассона с параметром λ , а

$$d(F_W, F_Y) = \sup_x |F_W(x) - F_Y(x)|.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия теоремы Севастьянова. Тогда при любом натуральном числе K , $13\lambda_n + 1 \leq K < \lambda_n p^{-1}$, и достаточно большом n

$$\begin{aligned} d(F_W, \text{Po}_\lambda) \leq & \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\} |\lambda_n - \lambda| + p + 2e^{-(K-1+\lambda_n)/4} + \\ & + \frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1 \leq k \leq K} \frac{k! (|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)} \lambda_n^k)}{\lambda_n^k (1 - kp\lambda_n^{-1})}. \end{aligned} \quad (1)$$

Доказательство. Мы используем подход, описанный в параграфе 3 работы [19], лемму 3 из работы [20] и свойства распределений, описанные в теореме 1.С и замечании 1.1.4 книги [21].

Начнем с построения оценки расстояния между распределением случайной величины W и сопровождающим пуассоновским распределением с параметром λ_n . Рассмотрим случайную величину $V = \zeta_1 + \dots + \zeta_n$, где $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — независимые случайные индикаторы и $\mathbf{P}\{\zeta_i = 1\} = p_i$, $i = 1, \dots, n$.

Из определений следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}C_W^k &= \sum_{J_k(n)} p_{i_1, \dots, i_k} = B^{(k)} + \sum_{J_k(n) \setminus I_k(n)} p_{i_1, \dots, i_k}, \\ \mathbf{E}C_V^k &= \sum_{J_k(n)} p_{i_1} \dots p_{i_k} = A^{(k)} + \sum_{J_k(n) \setminus I_k(n)} p_{i_1} \dots p_{i_k}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{E}C_W^k - \mathbf{E}C_V^k = B^{(k)} - A^{(k)} + \sum_{J_k(n) \setminus I_k(n)} (p_{i_1, \dots, i_k} - p_{i_1} \dots p_{i_k}).$$

Из определения величины $D^{(k)}$ и этого равенства следует, что

$$|\mathbf{E}C_W^k - \mathbf{E}C_V^k| \leq |A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)} \lambda_n^k. \quad (2)$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{E}C_V^k = \frac{1}{k!} \left(\lambda_n^k - \sum_{|\{i_1, \dots, i_k\}| < k} p_{i_1} \dots p_{i_k} \right) \geq \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{kp}{\lambda_n} \right). \quad (3)$$

При условии $\lambda_n > kp$ из (2.2) и (2.3) следует, что

$$\left| \frac{\mathbf{E}C_W^k}{\mathbf{E}C_V^k} - 1 \right| \leq \frac{k!}{\lambda_n^k} \cdot \frac{|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)} \lambda_n^k}{1 - kp \lambda_n^{-1}}. \quad (4)$$

Согласно лемме 3 работы Зубкова [20] (см. также [19])

$$d(F_W, F_V) \leq \frac{\varepsilon(1 + [H\lambda_n])e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} + 2e^{-(H+1)\lambda_n/4}, \quad (5)$$

где $H \geq 13$,

$$\varepsilon(T) = \max_{1 \leq k \leq T} \left| \frac{\mathbf{E}C_W^k}{\mathbf{E}C_V^k} - 1 \right|. \quad (6)$$

Из формул (4) – (6) следует неравенство

$$\begin{aligned} d(F_W, F_V) &\leq 2e^{-(H+1)\lambda_n/4} + \\ &+ \frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1 \leq k \leq 1 + [H\lambda_n]} \frac{k! (|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)} \lambda_n^k)}{\lambda_n^k (1 - kp \lambda_n^{-1})}, \end{aligned}$$

где $13 \leq H < p^{-1} - \lambda_n^{-1}$. Нам удобно задать натуральное число K и взять $H = (K - 1)\lambda_n^{-1}$. Тогда эта оценка запишется в следующем виде:

$$d(F_W, F_V) \leq 2e^{-(K-1+\lambda_n)/4} + \frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1 \leq k \leq K} \frac{k!(|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k)}{\lambda_n^k(1 - kp\lambda_n^{-1})}, \quad (7)$$

где

$$13\lambda_n + 1 \leq K < \lambda_n p^{-1}. \quad (8)$$

Используем обозначение $\rho(F, G)$ для расстояния по вариации между распределениями, определяемыми функциями F и G . Согласно оценке метода Чена – Стейна (см. формулу (1.1.23) в [21])

$$\rho(F_V, \text{Po}_{\lambda_n}) \leq \frac{1 - e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

Так как $d(F, G) \leq \rho(F, G)$, $\sum_{i=1}^n p_i^2 \leq \lambda_n p$, то из этой оценки следует неравенство

$$d(F_V, \text{Po}_{\lambda_n}) \leq p. \quad (9)$$

Из (7), (9) и неравенства треугольника получаем оценку расстояния до сопровождающего пуассоновского распределения (при условии (8)):

$$d(F_W, \text{Po}_{\lambda_n}) \leq p + 2e^{-(K-1+\lambda_n)/4} + \frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1 \leq k \leq K} \frac{k!(|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k)}{\lambda_n^k(1 - kp\lambda_n^{-1})}. \quad (10)$$

Воспользуемся теперь теоремой 1.С и замечанием 1.1.4 книги [21], из которых следует, что

$$d(\text{Po}_{\lambda_n}, \text{Po}_{\lambda}) \leq \rho(\text{Po}_{\lambda_n}, \text{Po}_{\lambda}) \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\} |\lambda_n - \lambda|. \quad (11)$$

Из (10) и (11) (при условии (8)) получаем (1). Теорема 1 доказана.

3. Оценка скорости сходимости в предельной теореме для числа решений системы случайных включений

Пусть $\xi(D, A + S, B)$ — число решений системы включений

$$x \in D, \quad Ax + S(x) \in B, \quad (12)$$

где A — случайная матрица из элементов поля $K = GF(q)$ размера $T \times n$, $D \subseteq V^n$ и $B \subset V^T$ — некоторые множества n -мерных и T -мерных векторов над этим полем, $S(x)$ — произвольное отображение V^n в V^T .

Исследованию условий сходимости при $n, T \rightarrow \infty$ распределения случайной величины $\xi(D, A + S, B)$ к распределениям пуассоновского типа были посвящены работы [15-18]. Как и в них, будем предполагать, что элементы случайной матрицы $A = (a_{t,j})$ независимы в совокупности и

$$\mathbf{P}\{a_{i,j} = k\} = \frac{1 + \Delta_{i,j}(k)}{2}, \quad k \in K,$$

где $K = GF(q)$, $\sum_{k \in K} \Delta_{i,j}(k) = 0$, $i = 1, \dots, T$, $j = 1, \dots, n$. Пусть

$$\Delta = \max_{i,j,k} |\Delta_{i,j}(k)| < 1. \quad (13)$$

Обозначим через $N(k_1, k_2, k_3, c, D)$ число решений уравнения

$$k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3 = c$$

относительно тройки векторов $(u^1, u^2, u^3) \in D^3$, где $k_1, k_2, k_3 \in K \setminus \{0\}$, $c \in V^n$. Пусть

$$N(D) = \max_{k_1, k_2, k_3, c} N(k_1, k_2, k_3, c, D),$$

$$\rho(D) = N(D)/|D|^2. \quad (14)$$

Аналогично определим величину $\rho(B)$.

В [18] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $K = GF(q)$, множество D не содержит подобных векторов, отображение $S(x)$ не зависит от матрицы A , распределение элементов матрицы A удовлетворяет условию (13), $0^n \notin D$, и при $n, T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$|D| \rightarrow \infty, \quad T\Delta \rightarrow 0, \quad \rho(D)\rho(B) \rightarrow 0, \quad q^{-T}|D||B| \rightarrow \lambda \in (0, \infty). \quad (15)$$

Тогда $F_{\xi(D, A+S, B)} \rightarrow \text{Po}_\lambda$, причем эта сходимость равномерна относительно отображения $S(x)$.

Наша цель — оценить скорость сходимости в этой теореме.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при любом $0 < \delta < 1$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \sup_x |F_{\xi(D, A+S, B)}(x) - \text{Po}_\lambda(x)| = \\ & = O(|\mathbf{E}\xi(D, A + S, B) - \lambda| + \left(\frac{1}{|D|}\right)^{(1-\delta)/(4 \ln q + 1)} + \\ & + (\rho(D)\rho(B))^{(1-\delta)/(1+4 \ln \max\{1, \lambda_*^{-1}\})} + \exp \left\{ \frac{(1-\delta) \ln(\Delta T)}{4 \ln |\ln(\Delta T)|} \right\} \Bigg). \end{aligned} \quad (16)$$

Если $\Delta = 0$, то последнее слагаемое в правой части оценки (16) отсутствует.

Перейдем к доказательству теоремы 3, используя для этого теорему 1. Вместо λ_n используем обозначение $\lambda_{n,T}$. Согласно нашим определениям

$$\lambda_{n,T} = \sum_{x \in D, b \in B} \mathbf{P}\{Ax = b\}, \quad p = \max_{x \in D, b \in B} \mathbf{P}\{Ax = b\}, \quad (17)$$

$$A^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \prod_{i=1}^k \mathbf{P} \{Ax^i = b^i\}, \quad (18)$$

$$B^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \mathbf{P} \{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\}, \quad (19)$$

$$D^{(k)} = \max_{(v^1, \dots, v^k) \in \bar{J}_k \setminus I_k} \left| \frac{\mathbf{P} \{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\}}{\mathbf{P} \{Ax^1 = b^1\} \cdot \dots \cdot \mathbf{P} \{Ax^k = b^k\}} - 1 \right|. \quad (20)$$

Кроме этого, положим $\lambda_* = |D||B|q^{-T}$.

Согласно лемме 1 из [18]

$$\left(\frac{1 - \Delta}{q} \right)^T \leq p \leq \left(\frac{1 + \Delta}{q} \right)^T, \quad \lambda_* (1 - \Delta)^T \leq \lambda_{n,T} \leq \lambda_* (1 + \Delta)^T.$$

Поэтому в предположениях теоремы 3

$$p = q^{-T}(1 + o(1)), \quad \lambda_{n,T} = \lambda_*(1 + o(1)). \quad (21)$$

Выражение в правой части (18) оценим с помощью оценки (2.13) из [18]. Применительно к теореме 3, когда $\bar{J} = J = D \times B$ и $C(n) = 1$, равенство (18) и оценка (2.13) из [18] дают следующее:

$$\begin{aligned} \frac{k!}{\lambda_{n,T}^k} A^{(k)} &\leq \left(\frac{\lambda_*(1 + \Delta)^T}{\lambda_{n,T}} \right)^k \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j q^{j(k-j)} |D|^{j-k} < \\ &< L_A^k \left(\left(1 + \frac{q^k}{|D|} \right)^k - 1 \right) \end{aligned} \quad (22)$$

при некотором $0 < L_A < \infty$, причем $L_A = 1 + o(1)$.

Аналогичным образом с помощью соответствующей оценки из [18] для суммы совместных вероятностей в (19) получаем неравенство

$$\frac{k!}{\lambda_{n,T}^k} B^{(k)} \leq \frac{\rho(D)\rho(B)}{\lambda_{n,T}^k} \sum_{j=2}^{k-1} (1 + \Delta)^{jT} \lambda_*^j,$$

что в условиях теоремы 3 [18] влечет при достаточно больших n и T соотношение

$$\frac{k!}{\lambda_{n,T}^k} B^{(k)} \leq k L_B^k \rho(D) \rho(B), \quad (23)$$

где $L_B = \max\{1, \lambda_*^{-1}\}(1 + o(1))$.

Наконец, используя лемму 1 работы [18], из (20) получаем в условиях теоремы 3 соотношения

$$k! D^{(k)} \leq k! \left(\frac{(1 + \Delta)^{kT}}{(1 - \Delta)^{kT}} - 1 \right) = 2k! k \Delta T (1 + o(1)). \quad (24)$$

Ради упрощения вида оценок наложим на выбор параметра K в (1) дополнительное ограничение

$$K < \frac{\lambda_n}{2p}. \quad (25)$$

Тогда

$$1 - kp\lambda_n^{-1} \geq \frac{1}{2} \quad (26)$$

при всех $k \leq K$.

Теперь, заменив в (1) λ_n на $\lambda_{n,T}$, а $|A^{(k)} - B^{(k)}|$ на $A^{(k)} + B^{(k)}$ и подставив в полученное более грубое неравенство оценки (21) – (24) и (26), получим:

$$\begin{aligned} d(F_{\xi(D,A+S,B)}, \text{Po}_\lambda) &\leq \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\} |\lambda_{n,T} - \lambda| + p + 2e^{-(K-1+\lambda_{n,T})/4} + \\ &+ \frac{e^{2\lambda_{n,T}}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_{n,T} - 1\}}} \max_{1 \leq k \leq K} \frac{k!(A^{(k)} + B^{(k)} + D^{(k)}\lambda_{n,T}^k)}{\lambda_{n,T}^k(1 - kp\lambda_{n,T}^{-1})} < \\ &< \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\} |\lambda_{n,T} - \lambda| + 2q^{-T} + 2e^{-(K-1+\lambda_{n,T})/4} + \\ &+ 2e^{2\lambda_{n,T}} \max_{1 \leq k \leq K} \left(\frac{k!}{\lambda_{n,T}^k} (A^{(k)} + B^{(k)}) + k!D^{(k)} \right) < \\ &< \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\} |\lambda_{n,T} - \lambda| + 2q^{-T} + \\ &+ 2e^{2\lambda_{n,T}} (M_1(K_1) + M_2(K_2) + M_3(K_3)), \end{aligned} \quad (27)$$

при достаточно больших n, T , где

$$M_1(K_1) = \max_{1 \leq k \leq K_1} \frac{k!A^{(k)}}{\lambda_{n,T}^k} + e^{-(K_1-1+\lambda_{n,T})/4}, \quad (28)$$

$$M_2(K_2) = \max_{1 \leq k \leq K_2} \frac{k!B^{(k)}}{\lambda_{n,T}^k} + e^{-(K_2-1+\lambda_{n,T})/4}, \quad (29)$$

$$M_3(K_3) = \max_{1 \leq k \leq K_3} k!D^{(k)} + e^{-(K_3-1+\lambda_{n,T})/4}, \quad (30)$$

а $K = \min\{K_1, K_2, K_3\}$. Здесь (см. (2.8) и (3.14))

$$13\lambda_{n,T} + 1 \leq K_i < \frac{\lambda_{n,T}}{2p}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (31)$$

В случае $\Delta = 0$ полагаем $M_3(H_3) = 0$.

Подставим в (28) оценку (22) и загрубим результат. Считая, что отношение $K_1 q^{K_1}/|D|$ достаточно мало, получим:

$$\begin{aligned} M_1(K_1) &< L_A^{K_1} \left(\left(1 + \frac{q^{K_1}}{|D|} \right)^{K_1} - 1 \right) + e^{-(K_1-1+\lambda_{n,T})/4} < \\ &< \frac{2K_1 L_A^{K_1}}{|D|} q^{K_1} + e^{-(K_1-1+\lambda_{n,T})/4}. \end{aligned} \quad (32)$$

Возьмем

$$K_1 = \left\lceil \frac{\ln |D|}{\ln(L_A q)} \frac{4 \ln q}{4 \ln q + 1} \right\rceil,$$

и получим, что первое слагаемое в правой части (32) имеет порядок

$$O\left(\frac{\ln |D|}{|D|^{1/(4 \ln q + 1)}}\right) = O\left(\ln |D| \exp\left\{-\frac{\ln |D|}{4 \ln q + 1}\right\}\right),$$

а второе слагаемое имеет порядок

$$O\left(\exp\left\{-\frac{\ln |D|}{\ln(L_A q)} \frac{\ln q}{4 \ln q + 1}\right\}\right) = O\left(\exp\left\{-\frac{\ln |D|}{4 \ln q + 1} \frac{\ln q}{\ln(L_A q)}\right\}\right).$$

С учетом соотношения $L_A = 1 + o(1)$ из этих оценок получаем, что при любом $0 < \delta < 1$

$$M_1(K_1) = O\left(\left(\frac{1}{|D|}\right)^{(1-\delta)/(4 \ln q + 1)}\right). \quad (33)$$

Оценим $M_2(K_2)$. Возьмем

$$K_2 = \left\lceil -\frac{4 \ln(\rho(D)\rho(B))}{1 + 4 \ln L_B} \right\rceil.$$

Тогда в силу (23)

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq K_2} \frac{k! B^{(k)}}{\lambda_{n,T}^k} &\leq K_2 L_B^{K_2} \rho(D) \rho(B) = \\ &= O\left(|\ln(\rho(D)\rho(B))| \exp\left\{-\frac{4 \ln L_B \ln(\rho(D)\rho(B))}{1 + 4 \ln L_B}\right\} \rho(D) \rho(B)\right) = \\ &= O\left(|\ln(\rho(D)\rho(B))| \exp\left\{\frac{\ln(\rho(D)\rho(B))}{1 + 4 \ln L_B}\right\}\right) = \\ &= O\left(|\ln(\rho(D)\rho(B))| (\rho(D)\rho(B))^{1/(1+4 \ln L_B)}\right). \end{aligned}$$

В свою очередь,

$$e^{-(K_2 - 1 + \lambda_{n,T})/4} = O\left(e^{-K_2/4}\right) = O\left((\rho(D)\rho(B))^{1/(1+4 \ln L_B)}\right).$$

Поэтому с учетом соотношения $L_B = \max\{1, \lambda_*^{-1}\}(1 + o(1))$ получаем оценку

$$M_2(K_2) = O\left((\rho(D)\rho(B))^{(1-\delta)/(1+4 \ln \max\{1, \lambda_*^{-1}\})}\right) \quad (34)$$

при любом $0 < \delta < 1$.

Наконец, возьмем произвольное $0 < \delta < 1$ и положим

$$K_3 = \left\lceil (\delta - 1) \frac{\ln(\Delta T)}{\ln |\ln(\Delta T)|} \right\rceil = O(\ln(\Delta T)).$$

Получим

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq K_3} k! D^{(k)} &= O(|\ln(\Delta T)| \exp\{K_3(\ln K_3 - 1) + O(\ln K_3)\} \Delta T) = \\ &= O(\exp\{K_3 \ln K_3\} \cdot \Delta T) = O(\exp\{\delta \ln(\Delta T)\}). \end{aligned}$$

Кроме этого,

$$e^{-(K_3-1+\lambda_{n,T})/4} = O\left(e^{-K_3/4}\right) = O\left(\exp\left\{\frac{(1-\delta)\ln(\Delta T)}{4\ln|\ln(\Delta T)|}\right\}\right).$$

Значит,

$$M_3(K_3) = O\left(\exp\left\{\frac{(1-\delta)\ln(\Delta T)}{4\ln|\ln(\Delta T)|}\right\}\right). \quad (35)$$

Заметим, что при переходе к пределу значения H_1, H_2, H_3 стремятся к бесконечности. Поэтому условие $H = \min\{H_1, H_2, H_3\} \geq 13$, начиная с некоторого момента, выполнено.

Оценим остальные слагаемые в правой части неравенства (35).

Заметим, что $\lambda_{n,T} = \mathbf{E}\xi(D, A + S, B)$, а в силу условия $q^{-T}|D||B| \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ имеем

$$q^{-T} = O\left(\frac{1}{|D|}\right).$$

Из этих соотношений, (33) – (35) и (27) следует оценка (16). Теорема 3 доказана.

Авторы признательны А. М. Зубкову за полезные замечания.

Список литературы

1. Севастьянов Б.А., Предельный закон Пуассона в схеме сумм независимых случайных величин. *Теория вероятн. и ее применен.* (1972) **17**, №4, 733–738.
2. Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
3. Михайлов В.Г., Предельная теорема Пуассона в схеме размещения частиц комплектами. *Теория вероятн. и ее примен.* (1977) **22**, №1, 155–159.
4. Зубков А. М., Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятн. и ее примен.* (1974) **19**, №1, 173–181.
5. Михайлов В.Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с многократными длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятн. и ее примен.* (1974) **19**, №1, 182–187.
6. Буравлев С. М., Повторения с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний. *Дискретная математика* (1999) **11**, №2, 53–75.
7. Буравлев С. М., Повторения с точностью до перестановок, образующих латинский прямоугольник. *Дискретная математика* (2000) **12**, №1, 21–46.
8. Клыкова Н.В., Предельное распределение числа совпадающих промежутков. *Теория вероятн. и ее примен.* (2002) **47**, №1, 147–152.
9. Круглов В.И., Предельные распределения числа наборов, удовлетворяющих линейному соотношению. *Дискретная математика* (2008) **20**, №4, 120–135.
10. Михайлов В. Г., *Некоторые предельные теоремы для сумм зависимых случайных величин*, Дисс. на соиск. уч. ст-ни канд. физ.-матем. наук, Москва, МИАН, 1974.
11. Михайлов В.Г., О предельной теореме Б.А.Севастьянова для сумм зависимых случайных индикаторов. *Обозр. прикл. и промышл. матем.* (2003) **10**, №3, 571–578.
12. Гаас В.В., Пуассоновские предельные совместные распределения в схеме случайного размещения частиц двух типов. *Теория вероятн. и ее примен.* (2007) **52**, №2, 351–358.

13. Копытцев В.А., О числе решений систем линейных булевых уравнений в множестве векторов, обладающих заданным числом единиц. *Дискретная математика* (2002) **14**, №4, 87–109.
14. Копытцев В.А., О числе решений системы случайных линейных уравнений. *Дискретная математика* (2006) **18**, №1, 40–62.
15. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения. *Дискретная математика* (2010) **22**, №2, 3–21.
16. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., Теоремы пуассоновского типа для числа решений случайных включений. *Математические вопросы криптографии* (2010) **1**, №4, 63–84.
17. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., О распределении чисел решений случайных включений. *Математические вопросы криптографии* (2011) **2**, №2, 55–80.
18. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., Предельные теоремы пуассоновского типа для обобщенного линейного включения. *Дискретная математика* (2012) **24**, №3, 108–121.
19. Михайлов В.Г., Явные оценки в предельных теоремах для сумм индикаторов. *Обозр. прикл. и промышл. матем.* (1994) **1**, №4, 580–617.
20. Зубков А.М., Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения. *Матем. сб.* (1979) **109(151)**, №4(8), 491–532.
21. Barbour A.D., Holst L., Janson S., Poisson Approximation (1992).

Статья поступила 01.10.2013.