Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Круглов, О свойстве разложимости функций k -значной логики, связанном с суммированием n -зависимых случайных величин в конечной абелевой группе, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 4, 29–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:07:14

О свойстве разложимости функций k -значной логики, связанном с суммированием n -зависимых случайных величин в конечной абелевой группе

© 2005 г. И. А. Круглов

Исследуется предельное поведение последовательности распределений случайных величин с значениями в конечной абелевой группе $(\Omega, \oplus)$, $\Omega = \{0, 1, \dots, k-1\}$, представимых в виде

$$\eta^{(N)} = f(\xi_1, \dots, \xi_n) \oplus f(\xi_2, \dots, \xi_{n+1}) \oplus \dots \oplus f(\xi_N, \dots, \xi_{N+n-1}),$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — исходная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с множеством значений Ω , f — k -значная функция от n переменных, принимающая значения в Ω . Показано, что предельное поведение последовательности распределений $\eta^{(N)}$ при $N \rightarrow \infty$ определяется минимальной подгруппой H группы $(\Omega, \oplus)$, для которой при всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$ имеет место разложение

$$f(x_1, \dots, x_n) \ominus f(0, \dots, 0) \oplus H = g(x_1, \dots, x_{n-1}) \ominus g(x_2, \dots, x_n) \oplus H$$

при некоторой k -значной функции g от $n-1$ переменного, где $\ominus$ — операция вычитания в группе $(\Omega, \oplus)$. В терминах подгруппы H и соответствующей ей функции g описаны предельные точки последовательности распределений случайных величин $\eta^{(N)}$ и сходящиеся к ним последовательности.

Работа выполнена при поддержке программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ-2358.2003.9.

В настоящей работе рассмотрено одно свойство k -значных функций, связанное со следующей схемой суммирования случайных величин с значениями в конечной абелевой группе.

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, \dots \quad (1)$$

— исходная последовательность элементов множества $\Omega = \{0, 1, \dots, k-1\}$, и пусть $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — k -значная функция от n переменных,

$$y_N = f(\xi_N, \xi_{N+1}, \dots, \xi_{N+n-1}), \quad y_N \in \Omega, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Будем предполагать, что (1) есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с значениями в множестве Ω и $\mathbf{P}(\xi_1 = t) > 0$ для $t \in \Omega$. Пусть Ω относительно бинарной операции $\oplus$ является абелевой группой. Положим

$$\eta^{(N)} = y_1 \oplus y_2 \oplus \dots \oplus y_N, \quad N \in \mathbf{N}. \quad (3)$$

Для произвольной пары $\alpha, \beta \in \Omega^n$ будем рассматривать последовательность случайных величин

$$\eta_{\alpha, \beta}^{(N)}, \quad N \in \mathbf{N}, \quad (4)$$

где $\eta_{\alpha, \beta}^{(N)}$ имеет распределение, совпадающее с условным распределением случайной величины $\eta^{(N)}$ при условии, что $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \alpha$ и $(\xi_N, \xi_{N+1}, \dots, \xi_{N+n-1}) = \beta$.

В работе найдены предельные точки последовательностей распределений случайных величин (3) и (4) при $N \rightarrow \infty$, в частности, необходимые и достаточные условия предельной равномерности этих последовательностей на множестве Ω .

Данная задача для случая $k = 2$ была решена В. В. Яценко (устное сообщение), результаты настоящей работы обобщают этот результат на случай произвольного k и произвольного задания групповой операции конечной абелевой группы $(\Omega, \oplus)$.

Введем необходимые обозначения. Пусть для всех $s \in \Omega$ элемент $\ominus s$ — обратный элемент к s в группе $(\Omega, \oplus)$, θ — нуль группы $(\Omega, \oplus)$, $s \ominus t = s \oplus (\ominus t)$ для $s, t \in \Omega$. В дальнейшем символы $\oplus$ и $\ominus$ мы будем также использовать для обозначения операций сложения и вычитания элементов фактор-группы $(\Omega, \oplus)$ по ее подгруппам. Абелеву группу $(\Omega, \oplus)$ будем рассматривать как левый модуль над кольцом $\mathbf{Z}$ целых чисел, полагая для $m \in \mathbf{Z}$, $s \in \Omega$

$$ms = \begin{cases} s \oplus s \oplus \dots \oplus s, & m > 0, \\ \theta, & m = 0, \\ \ominus(s \oplus s \oplus \dots \oplus s), & m < 0, \end{cases}$$

где число элементов, связанных символом $\oplus$, равно m . Для произвольной подгруппы L группы $(\Omega, \oplus)$ и произвольной функции $\varphi: \Omega^m \rightarrow \Omega$, $m \in \mathbf{N}$, определим отображение $\varphi_L: \Omega^m \rightarrow \Omega/L$ соотношением

$$\varphi_L(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) \oplus L, \quad x_1, x_2, \dots, x_m \in \Omega.$$

Исходя из функции f , определим k -значную функцию F равенством

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_m) = & f(0, 0, \dots, 0, x_1) \oplus f(0, 0, \dots, 0, x_1, x_2) \oplus \dots \\ & \oplus f(0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \oplus f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & \oplus f(x_2, x_3, \dots, x_n, 0) \oplus f(x_3, \dots, x_n, 0, 0) \oplus \dots \\ & \oplus f(x_n, 0, \dots, 0) \ominus (2n - 1)f(0, 0, \dots, 0), \quad x_1, \dots, x_n \in \Omega. \end{aligned}$$

Пусть H — подгруппа группы $(\Omega, \oplus)$, порожденная множеством

$$\{F(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \Omega\}.$$

Рассмотрим множество B всех таких подгрупп L группы $(\Omega, \oplus)$, что функция f_L обладает следующим свойством разложимости: существует k -значная функция g от $n - 1$

переменного, возможно зависящая от L , которая при всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$ удовлетворяет соотношению

$$f_L(x_1, \dots, x_n) \ominus f_L(0, \dots, 0) = g_L(x_1, \dots, x_{n-1}) \ominus g_L(x_2, \dots, x_n).$$

Очевидно, Ω есть элемент B , так что множество B непусто. Для дальнейшего нам требуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Подгруппа H — минимальный элемент множества B , то есть $H \in B$ и $L \supset H$ для всех $L \in B$.*

Доказательство. Докажем, что $H \in B$. Введем обозначение

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \ominus f(0, \dots, 0), \quad x_i \in \Omega, \quad i = 1, \dots, n.$$

Достаточно доказать, что существует такое отображение $\bar{g}: \Omega^{n-1} \rightarrow \Omega/H$, что для всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$

$$f_{1,H}(x_1, \dots, x_n) = \bar{g}(x_1, \dots, x_{n-1}) \ominus \bar{g}(x_2, \dots, x_n). \quad (5)$$

Так как группа $(\Omega, \oplus)$ абелева, множество C всех функций $\psi: \Omega^n \rightarrow \Omega$, удовлетворяющих соотношению

$$\begin{aligned} \psi_H(0, \dots, 0, x_1) \oplus \psi_H(0, \dots, 0, x_1, x_2) \oplus \dots \\ \oplus \psi_H(0, x_1, \dots, x_{n-1}) \oplus \psi_H(x_1, \dots, x_n) \oplus \psi_H(x_2, \dots, x_n, 0) \oplus \dots \\ \oplus \psi_H(x_1, 0, \dots, 0) \oplus \psi_H(0, \dots, 0) = \theta \oplus H \end{aligned}$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$, есть абелева группа относительно бинарной операции сложения функций. Согласно определению подгруппы H , функция $f_1 \in C$. Кроме того, если

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \ominus \varphi(x_2, \dots, x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \Omega,$$

для некоторой функции $\varphi: \Omega^{n-1} \rightarrow \Omega$, то $\psi \in C$. Для всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$ положим

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \ominus f_1(x_2, \dots, x_n, 0) \\ &\quad \oplus f_1(x_2, \dots, x_{n-1}, 0, 0) \ominus f_1(x_3, \dots, x_n, 0, 0) \\ &\quad \oplus f_1(x_3, \dots, x_{n-1}, 0, 0, 0) \ominus f_1(x_4, \dots, x_n, 0, 0, 0) \\ &\quad \oplus f_1(x_{n-1}, 0, 0, \dots, 0) \ominus f_1(x_n, 0, 0, \dots, 0), \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \ominus f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, 0). \end{aligned}$$

Тогда $f_1, f_2 \in C$, следовательно, для всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$

$$\begin{aligned} f_{3,H}(0, 0, \dots, 0, x_1) \oplus f_{3,H}(0, 0, \dots, 0, x_1, x_2) \oplus \dots \\ \oplus f_{3,H}(0, x_1, \dots, x_{n-1}) \oplus f_{3,H}(x_1, \dots, x_n) \\ \oplus f_{3,H}(x_2, \dots, x_n, 0) \oplus \dots \oplus f_{3,H}(x_1, 0, \dots, 0) \\ \oplus f_{3,H}(0, \dots, 0) = \theta \oplus H, \end{aligned} \quad (6)$$

Из соотношения (6) при $x_n = 0$ следует, что для всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$

$$\begin{aligned} f_{3,H}(0, \dots, 0, x_1) \oplus \dots \oplus f_{3,H}(0, x_1, \dots, x_{n-1}) \oplus f_{3,H}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \oplus \dots \\ \oplus f_{3,H}(x_{n-1}, 0, \dots, 0) \oplus f_{3,H}(0, \dots, 0) = \theta \oplus H. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того, нетрудно проверить справедливость равенств

$$f_3(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = f_1(0, \dots, 0, 0) = \theta, \quad x_1, \dots, x_{n-1} \in \Omega. \quad (8)$$

Из соотношений (6), (7), (8) легко следует, что для всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$

$$f_{3,H}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta \oplus H,$$

то есть

$$f_{1,H}(x_1, \dots, x_n) = f_{2,H}(x_1, \dots, x_n). \quad (9)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \bar{g}(x_1, \dots, x_{n-1}) = & f_{1,H}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \oplus f_{1,H}(x_2, \dots, x_{n-1}, 0, 0) \oplus \dots \\ & \oplus f_{1,H}(x_{n-1}, 0, \dots, 0), \quad x_1, \dots, x_{n-1} \in \Omega. \end{aligned}$$

Тогда из (9) следует (5).

Пусть теперь $L \in B$ — произвольная подгруппа, докажем, что $L \supset H$. По определению множества B существует такая k -значная функция g от $n-1$ переменного, что для всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$

$$f(x_1, \dots, x_n) \in f(0, \dots, 0) \oplus g(x_1, \dots, x_{n-1}) \ominus g(x_2, \dots, x_n) \oplus L.$$

Следовательно, для всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) \in & (2n-1)f(0, \dots, 0) \oplus g(0, \dots, 0) \ominus g(0, \dots, 0, x_1) \\ & \oplus g(0, \dots, 0, x_1) \ominus g(0, \dots, 0, x_1, x_2) \oplus \dots \\ & \oplus g(x_1, \dots, x_{n-1}) \ominus g(x_2, \dots, x_n) \\ & \oplus g(x_2, \dots, x_n) \ominus g(x_3, \dots, x_n, 0) \oplus \dots \\ & \oplus g(x_n, 0, \dots, 0) \ominus g(0, \dots, 0) \\ & \ominus (2n-1)f(0, \dots, 0) \oplus L = L, \end{aligned}$$

и по определению H справедливо соотношение $L \supset H$.

Лемма доказана.

Для каждой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ функция $g(x_1, \dots, x_{n-1})$ из формулировки леммы может быть выбрана не однозначно. Как видно из дальнейшего, все результаты работы не зависят от ее выбора. Обозначим через G_1 подгруппу группы $(\Omega, \oplus)$, порожденную множеством $f(0, \dots, 0) \oplus H$, тогда H — подгруппа G_1 , пусть $r = |G_1 : H|$ — индекс H в G_1 .

Теорема 1. Пусть

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Omega^n, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} k_N = \infty.$$

Последовательность распределений случайных величин

$$\eta_{\alpha, \beta}^{(k_N)}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

сходится при $N \rightarrow \infty$, если и только если существует $l \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ такое, что $k_N \equiv l \pmod{r}$ для всех достаточно больших N . При выполнении этого условия предел последовательности распределений случайных величин (10) есть равновероятное распределение на смежном классе

$$lf(0, 0, \dots, 0) \oplus H \oplus g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \ominus g(\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n).$$

Доказательство. Последовательность векторов $(\xi_N, \xi_{N+1}, \dots, \xi_{N+n-1})$, $N \in \mathbb{N}$, есть последовательность случайных величин, связанная в простую однородную цепь Маркова $\mathfrak{X}$ с множеством состояний Ω^n , начальными вероятностями

$$p_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \mathbf{P}(\xi = \alpha_1) \dots \mathbf{P}(\xi = \alpha_n), \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Omega^n,$$

и переходными вероятностями

$$p((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n)) = \begin{cases} \mathbf{P}(\xi_1 = \beta_n), & \text{если } \beta_1 = \alpha_2, \dots, \beta_{n-1} = \alpha_n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Omega^n$. Цепь Маркова $\mathfrak{X}$ положительно регулярна. Последовательность (2) есть последовательность случайных величин на конечной группе $(\Omega, \oplus)$, представляющая собой значения функции f от состояний этой цепи Маркова. Поэтому для изучения предельного поведения последовательностей (3), (4) мы можем применить математический аппарат §3 работы [1]. В соответствии с обозначениями статьи [1], определим элементы

$$\begin{aligned} x_1 &= f(0, \dots, 0), \\ \sigma_{0, \alpha} &= f(0, \dots, 0, \alpha_1) \oplus f(0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2) \oplus \dots \\ &\quad \oplus f(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \oplus f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \ominus nf(0, \dots, 0), \\ \sigma_{\alpha, 0} &= f(\alpha_2, \dots, \alpha_n, 0) \oplus f(\alpha_3, \dots, \alpha_n, 0, 0) \oplus \dots \\ &\quad \oplus f(\alpha_n, 0, \dots, 0) \oplus f(0, \dots, 0) \ominus nf(0, \dots, 0), \end{aligned}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Omega^n$, а также подгруппу H_1 группы $(\Omega, \oplus)$, которая в нашем случае определяется так: H_1 — минимальная подгруппа группы $(\Omega, \oplus)$ такая, что для любой последовательности $(x_0, x_1, \dots, x_N, \dots, x_{N+n-1})$ элементов Ω , удовлетворяющей условию

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_N, x_{N+1}, \dots, x_{N+n-1}), \quad (11)$$

выполнено включение

$$f(x_1, \dots, x_n) \oplus f(x_2, \dots, x_{n+1}) \oplus \dots \oplus f(x_N, \dots, x_{N+n-1}) \in nf(0, \dots, 0) \oplus H_1. \quad (12)$$

Докажем, что подгруппа H_1 совпадает с подгруппой H , введенной перед формулировкой леммы. Из условий (11), (12) вытекает, что H_1 содержит множество $\{F(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \Omega\}$. Поэтому $H \subseteq H_1$.

Обратно, пусть $x_0, x_1, \dots, x_N, \dots, x_{N+n-1} \in \Omega$, причем выполнено условие (11). Согласно определению H , для любого $k \in \{1, \dots, N\}$ справедливо включение

$$\begin{aligned} &f(0, 0, \dots, 0, x_k) \oplus f(0, 0, \dots, 0, x_k, x_{k+1}) \oplus \dots \oplus f(0, x_k, \dots, x_{k+n-2}) \\ &\quad \oplus f(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}) \oplus f(x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}, 0) \oplus \dots \\ &\quad \oplus f(x_{k+n-1}, 0, \dots, 0) \in (2n-1)f(0, \dots, 0) \oplus H, \end{aligned} \quad (13)$$

а также

$$f(0, 0, \dots, 0, x_k) \oplus \dots \oplus f(0, x_k, \dots, x_{k+n-2}) \oplus f(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-2}, 0) \\ \oplus f(x_{k+1}, \dots, x_{k+n-2}, 0, 0) \oplus f(x_{k+n-2}, 0, \dots, 0) \in (2n-2)f(0, \dots, 0) \oplus H. \quad (14)$$

Используя последовательно соотношения (14), (11), (13) и коммутативность группы $(\Omega, \oplus)$, получим, что

$$\begin{aligned} & H \oplus \left(\sum_{k=1}^N f(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N (f(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}) \oplus f(0, \dots, 0, x_k) \oplus \dots \oplus f(0, x_k, \dots, x_{k+n-2}) \\ &\quad \oplus f(x_k, \dots, x_{k+n-2}, 0) \oplus f(x_{k+1}, \dots, x_{k+n-2}, 0, 0) \oplus \dots \oplus f(x_{k+n-2}, 0, \dots, 0) \\ &\quad \ominus (2n-2)f(0, \dots, 0)) \oplus H \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (f(0, \dots, 0, x_k) \oplus \dots \oplus f(0, x_k, \dots, x_{k+n-2}) \oplus f(x_k, \dots, x_{k+n-1})) \\ &\quad \oplus \sum_{k=2}^N (f(x_k, \dots, x_{k+n-2}, 0) \oplus f(x_{k+1}, \dots, x_{k+n-2}, 0, 0) \oplus \dots \\ &\quad \oplus f(x_{k+n-2}, 0, \dots, 0) \ominus (2n-2)f(0, \dots, 0)) \oplus (f(0, \dots, 0, x_N) \oplus \dots \\ &\quad \oplus f(0, x_N, \dots, x_{N+n-2}) \oplus f(x_N, \dots, x_{N+n-1})) \oplus (f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \\ &\quad \oplus f(x_2, \dots, x_{n-1}, 0, 0) \oplus \dots \oplus f(x_{n-1}, 0, \dots, 0) \ominus (2n-2)f(0, \dots, 0)) \oplus H \\ &= \sum_{k=1}^N (f(0, \dots, 0, x_k) \oplus \dots \oplus f(0, x_k, \dots, x_{k+n-2}) \\ &\quad \oplus f(x_k, \dots, x_{k+n-1}) \oplus f(x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}, 0) \oplus \dots \oplus f(x_{k+n-1}, 0, \dots, 0)) \\ &\quad \ominus (2n-2)Nf(0, \dots, 0) \oplus H \\ &= (2n-1)Nf(0, \dots, 0) \ominus (2n-2)Nf(0, \dots, 0) \oplus H = Nf(0, \dots, 0) \oplus H, \end{aligned}$$

и соотношение (12) доказано.

Из определения подгруппы H_1 получаем, что $H_1 \subseteq H$, и равенство $H = H_1$ доказано.

Из основной теоремы §3 работы [1] следует, что для любых $\alpha, \beta \in \Omega^n$ и любого $l \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ последовательность распределений случайных величин $\eta_{\alpha, \beta}^{(l+Nr)}$ имеет своим пределом при $N \rightarrow \infty$ равномерное распределение на множестве

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \oplus \sigma_{\alpha, \bar{0}} \oplus (l-1)f(0, \dots, 0) \oplus H \oplus \sigma_{\bar{0}, \beta}. \quad (15)$$

Из доказанной выше леммы следует, что

$$H \oplus f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \oplus \sigma_{\alpha, \bar{0}} \oplus \sigma_{\bar{0}, \beta} = H \oplus f(0, \dots, 0) \oplus g(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \ominus g(\beta_2, \dots, \beta_n),$$

и тогда множество (15) совпадает с множеством

$$lf(0, \dots, 0) \oplus H \oplus g(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \ominus g(\beta_2, \dots, \beta_n).$$

Так как для любых $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ равенство

$$l_1 f(0, \dots, 0) \oplus H = l_2 f(0, \dots, 0) \oplus H$$

равносильно равенству $l_1 = l_2$, из предыдущих рассуждений следует утверждение теоремы.

Обозначим через $\omega(H)$ случайную величину на множестве Ω , распределенную равномерно на множестве H и независимую от случайных величин $\xi_N, N \in \mathbb{N}$. Пусть r_1 — минимальное число из множества $\{1, 2, \dots, r\}$, обладающее следующим свойством: распределение случайной величины

$$r_1 f(0, \dots, 0) \oplus \omega(H) \oplus g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \ominus g(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n-2})$$

совпадает с распределением случайной величины

$$\omega(H) \oplus g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \ominus g(\xi_n, \dots, \xi_{2n-2}).$$

Следствие 1. Пусть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} k_N = \infty.$$

Тогда последовательность распределений случайных величин $\eta^{(k_N)}, N \in \mathbb{N}$, сходится, если и только если существует $l \in \{0, 1, \dots, r_1-1\}$ такое, что $k_N \equiv l \pmod{r_1}$ для всех достаточно больших N . При выполнении этого условия предельное распределение последовательности $\eta^{(k_N)}$ совпадает с распределением случайной величины

$$l f(s_0, \dots, s_0) \oplus \omega(H) \oplus g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \ominus g(\xi_n, \dots, \xi_{2n-2}).$$

Доказательство. Пусть $\Gamma(\Omega)$ есть группа характеров конечной абелевой группы $(\Omega, \oplus)$. В соответствии с §1 работы [1], для произвольной случайной величины ζ на Ω определим ее характеристическую функцию равенством

$$\Phi(\zeta, U) = \sum_{\sigma \in \Omega} \mathbf{P}(\zeta = \sigma) U(\sigma), \quad U \in \Gamma(\Omega).$$

Для $l \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ обозначим через ζ_l случайную величину с значениями в Ω , распределение которой совпадает с распределением случайной величины

$$l f(0, \dots, 0) \oplus \omega(H) \oplus g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \ominus g(\xi_n, \dots, \xi_{2n-2}),$$

и рассмотрим характеристическую функцию $\Phi(\zeta_l, U), U \in \Gamma(\Omega)$.

Так как случайные величины $\omega(H), g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), g(\xi_n, \dots, \xi_{2n-2})$ независимы, по теореме умножения для характеристических функций (см. [1], §1)

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta_l, U) &= U(f(0, \dots, 0))^l \Phi(\omega(H), U) \Phi(g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), U) \\ &\quad \times \Phi(\ominus g(\xi_n, \dots, \xi_{2n-2}), U), \quad U \in \Gamma(\Omega), \quad l = 0, 1, \dots, r-1. \end{aligned}$$

Случайные величины $g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ и $g(\xi_n, \dots, \xi_{2n-2})$ одинаково распределены и для произвольной случайной величины ζ с значениями в Ω верно равенство

$$\Phi(\ominus \zeta, U) = \overline{\Phi(\zeta, U)}, \quad U \in \Gamma(\Omega),$$

поэтому для всех $U \in \Gamma(\Omega)$ и $l = 0, 1, \dots, r-1$

$$\Phi(\zeta_l, U) = U(f(0, \dots, 0))^l \Phi(\omega(H), U) |\Phi(g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), U)|^2.$$

Пусть

$$\text{Ann } H = \{U \in \Gamma(\Omega) | U(h) = 1, \forall h \in H\}.$$

Тогда $\Phi(\omega(H), U) = 1$, если $U \in \text{Ann } H$, и $\Phi(\omega(H), U) = 0$, если $U \notin \text{Ann } H$. Таким образом, для всех $l = 0, 1, \dots, r-1$

$$\Phi(\zeta_l, U) = \begin{cases} 0, & \text{если } U \notin \text{Ann } H, \\ U(f(0, \dots, 0))^l |\Phi(g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), U)|^2, & \text{если } U \in \text{Ann } H. \end{cases} \quad (16)$$

Докажем, что для всех $l = 0, 1, \dots, r-1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi(\eta^{(l+Nr)}, U) = \Phi(\zeta_l, U), \quad U \in \Gamma(\Omega). \quad (17)$$

Для произвольного $N \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}(\eta^{(N)} = \sigma) = \sum_{\alpha, \beta \in \Omega^n} \mathbf{P}(\xi_l = \alpha_1, \dots, \xi_n = \alpha_n, \xi_N = \beta_1, \dots, \xi_{N+n-1} = \beta_n) \mathbf{P}(\eta_{\alpha, \beta}^{(N)} = \sigma).$$

Следовательно, для всех $U \in \Gamma(\Omega)$

$$\Phi(\eta^{(N)}, U) = \sum_{\alpha, \beta \in \Omega^n} \mathbf{P}(\xi_1 = \alpha_1, \dots, \xi_n = \alpha_n, \xi_N = \beta_1, \dots, \xi_{N+n-1} = \beta_n) \Phi(\eta_{\alpha, \beta}^{(N)}, U). \quad (18)$$

Пусть $U \notin \text{Ann } H$. Согласно доказанной теореме и теореме непрерывности для характеристических функций (см. [1], §1)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi(\eta_{\alpha, \beta}^{(l+Nr)}, U) = 0, \quad (19)$$

для всех $\alpha, \beta \in \Omega^n$. Из соотношений (16), (17) и (19) следует (17).

Пусть $U \in \text{Ann } H$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi(\eta^{(l+Nr)}, U) = U(f(0, \dots, 0))^l U(g(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})) \overline{U(g(\beta_2, \dots, \beta_n))} \quad (20)$$

для всех $\alpha, \beta \in \Omega^n$.

Из соотношений (16), (18) и (20) следует, что

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi(\eta^{(l+Nr)}, U) = U(f(0, \dots, 0))^l \\ & \times \left(\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \Omega} \mathbf{P}(\xi_1 = \alpha_1, \xi_2 = \alpha_2, \dots, \xi_{n-1} = \alpha_{n-1}) U(g(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})) \right) \\ & \times \left(\sum_{\beta_2, \dots, \beta_n \in \Omega} \mathbf{P}(\xi_1 = \beta_2, \dots, \xi_{n-1} = \beta_n) \overline{U(g(\beta_2, \dots, \beta_n))} \right) = \Phi(\zeta_l, U). \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (17) доказано полностью.

По теореме непрерывности для характеристических функций из (17) следует, что для каждого $l = 0, 1, \dots, r-1$ последовательность распределений случайных величин $\eta^{(l+Nr)}$ сходится при $N \rightarrow \infty$ к распределению ζ_l . Так как для любых $l, s \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ распределения ζ_l и ζ_s совпадают тогда и только тогда, когда $l \equiv s \pmod{r}$, тем самым утверждение следствия 1 доказано.

Следствие 2. Для того чтобы последовательность (3) имела предельное равновероятное распределение на множестве Ω при $N \rightarrow \infty$ необходимо и достаточно, чтобы случайная величина $g_H(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ была распределена равновероятно на множестве Ω/H .

Доказательство. По теореме непрерывности последовательность распределений случайных величин $\eta^{(N)}$ имеет своим пределом при $N \rightarrow \infty$ равновероятное распределение на Ω тогда и только тогда, когда $\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi(\eta^{(N)}, U) = 0$ для каждого неединичного характера U группы $(\Omega, \oplus)$. Согласно (16) и (17) последнее условие равносильно равенству $\Phi(g(\xi_1, \dots, \xi_n), U) = 0$ для каждого неединичного характера $U \in \text{Апп } H$, что, в свою очередь, равносильно условию равновероятности распределения $g_H(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ на множестве Ω/H .

В заключение рассмотрим подробнее случай, когда $k = |\Omega|$ есть простое число. Здесь $(\Omega, \oplus)$ есть циклическая группа, все подгруппы которой суть нулевая подгруппа и сама группа $(\Omega, \oplus)$. Следовательно, возможны два случая. В первом из них не существует такой k -значной функции от $n - 1$ переменного $g(x_1, \dots, x_{n-1})$, что выполнено соотношение

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(0, \dots, 0) \oplus g(x_1, \dots, x_{n-1}) \oplus g(x_2, \dots, x_n) \quad (21)$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$. В этом случае последовательности $\eta_{\alpha, \beta}^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}$, для произвольных $\alpha, \beta \in \Omega^n$, а с ними и последовательность $\eta^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}$, имеют при $N \rightarrow \infty$ равновероятное предельное распределение на Ω .

Во втором случае функция g , удовлетворяющая соотношению (21), существует. Тогда для любых фиксированных $\alpha, \beta \in \Omega^n$ случайная величина $\eta_{\alpha, \beta}^{(N)}$ принимает ровно одно значение $Nf(0, \dots, 0) \oplus g(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \oplus g(\beta_2, \dots, \beta_n)$. Распределение случайной величины $\eta^{(N)}$ для всех $N \geq 2n - 2$ совпадает с распределением случайной величины $Nf(0, \dots, 0) \oplus g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \oplus g(\xi_n, \dots, \xi_{2n-2})$. Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Следствие 3. Если $|\Omega|$ — простое число, то последовательность $\eta^{(N)}$ имеет равновероятное предельное распределение на множестве Ω при $N \rightarrow \infty$, если и только если не существует такой k -значной функции $g = g(x_1, \dots, x_{n-1})$, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(0, \dots, 0) \oplus g(x_1, \dots, x_{n-1}) \oplus g(x_2, \dots, x_n)$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in \Omega$, и случайная величина $g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ имеет неравновероятное распределение на множестве Ω .

Заметим, что проверка условия существования функции g , удовлетворяющей (21), может быть проведена следующим образом.

Фиксируем образующую циклической группы $(\Omega, \oplus)$, то есть произвольный ее элемент, не равный θ . Эта фиксация однозначно определяет на множестве Ω структуру поля вычетов по модулю k . Над этим полем функция f однозначно раскладывается в многочлен Жегалкина. Типом одночлена $sx_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \dots x_{i_m}^{j_m}$, $1 \leq i_1 < i_2, \dots, i_m \leq n$, $j_v \in \{1, \dots, k-1\}$, $v \in \{1, \dots, m\}$, назовем набор чисел $(i_2 - i_1, i_3 - i_1, \dots, i_m - i_1; j_1, j_2, \dots, j_m)$. Если $m \geq 1$, $1 \leq a_1, a_2, \dots, a_{m-1} < n$, $b_1, \dots, b_m \in \{1, \dots, k-1\}$, то k -значную функцию, не равную тождественно константе, назовем однородной функцией типа $(a_1, a_2, \dots, a_{m-1};$

$b_1, b_2, \dots, b_m$), если каждый одночлен, входящий в ее многочлен Жегалкина, имеет указанный тип. Будем считать, что f — не константа, тогда f можно однозначно представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\theta, \dots, \theta) \oplus \sum_{v=1}^t \varphi_v(x_1, \dots, x_n), \quad (22)$$

где φ_v , $v = 1, \dots, t$, — некоторые однородные функции попарно различных типов. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $k = |\Omega|$ — простое число. Для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ существует функция $g(x_1, \dots, x_{n-1})$, удовлетворяющая соотношению (21), если и только если у каждой функции φ_v , $v = 1, \dots, t$, из разложения (22) сумма в группе $(\Omega, \oplus)$ коэффициентов многочлена Жегалкина равна нулевому элементу θ .

Доказательство. Очевидно, что можно считать, что $f(\theta, \dots, \theta) = \theta$. Пусть для некоторой функции $g = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ имеет место соотношение

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{n-1}) \ominus g(x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \Omega. \quad (23)$$

Можно считать, что $g(\theta, \dots, \theta) = \theta$. Если разложение функции g в сумму однородных функций попарно различных типов имеет вид

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{\mu=1}^s \psi_{\mu}(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

то соответствующее разложение функции f имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mu=1}^s (\psi_{\mu}(x_1, \dots, x_{n-1}) \ominus \psi(x_2, \dots, x_n)).$$

Но очевидно, что для произвольного $\mu \in \{1, \dots, s\}$ в группе $(\Omega, \oplus)$ сумма коэффициентов многочлена Жегалкина функции $\psi_{\mu}(x_1, \dots, x_{n-1}) \ominus \psi_{\mu}(x_2, \dots, x_n)$ равна θ .

Обратно, пусть в разложении (22) у любой функции φ_v сумма коэффициентов Жегалкина равна θ . Рассмотрим, например, функцию φ_1 , пусть ее тип есть $(a_1, \dots, a_{m-1}; b_1, b_2, \dots, b_m)$. Если ее разложение в многочлен Жегалкина содержит член вида $c x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_{n-1}} x_n^0$, $\varepsilon_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, то прибавим к φ_1 функцию

$$\varphi_1(x_2, \dots, x_n, \theta) \ominus \varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, \theta), \quad (24)$$

получим функцию того же типа, что и φ_1 , с той же суммой коэффициентов многочлена Жегалкина. Проведем с ней ту же процедуру, и так далее. За конечное число шагов мы получим функцию

$$C x_{n-a_1}^{b_1} x_{n-a_{m-1}}^{b_{m-1}} x_n^{b_m},$$

где C — сумма коэффициентов многочленов Жегалкина функции φ_1 , то есть в результате указанной процедуры мы получим нулевую функцию. Однако, функция (24) есть функция, представимая в виде (23). Тем самым показано, что φ_1 представима в виде (23). Повторяя рассуждения для всех функций φ_v , $v = 1, \dots, t$, получаем соотношение (23) для некоторой функции $g(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Утверждение доказано.

Список литературы

1. Горчинский Ю. Н., Круглов И. А., Капитонов В. М., Вопросы теории распределений на конечных группах. *Труды по дискретной математике* (2000) 1, 85–112.

Статья поступила 15.02.2005.