Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Н. Ромакина, Ковры на простых 4-контурах гиперболической плоскостиположительной кривизны, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 1, 118–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1272>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:34:25

Ковры на простых 4-контурах гиперболической плоскости положительной кривизны

© 2014 г. Л. Н. Ромакина¹

Описаны свойства простого 4-контура гиперболической плоскости положительной кривизны (в частности, доказана основная теорема о разбиении простого 4-контура его диссектрисами), на основе которых введены новые объекты: простые ковры и ковры. Показано, что процесс диссекториального разбиения простого 4-контура можно описать взвешенным ориентированным двоичным деревом Γ . Доказано, что веса одного яруса дерева Γ строго упорядочены, получен способ сравнения весов вершин дерева Γ . Приведены примеры ковров на простых 4-контурах.

Ключевые слова: гиперболическая плоскость положительной кривизны, простой 4-контур, диссекториальное разбиение, ковер на простом 4-контуре, простой ковер на простом 4-контуре.

Введение

Гиперболическую плоскость $\hat{H}$ положительной кривизны [1], [2] рассматриваем в проективной интерпретации Кэли – Клейна как внешнюю относительно овальной линии γ (называемой *абсолютом*) область проективной плоскости P_2 . На $\hat{H}$ в качестве прямых приняты: а) *эллиптические* прямые, пересекающие абсолют в двух мнимо сопряженных точках; б) расположенные вне линии γ части *гиперболических* прямых, пересекающих γ в двух действительных точках; в) касающиеся абсолюта *параболические* прямые с выколотой несобственной точкой на абсолюте. Параболические прямые являются изотропными на плоскости $\hat{H}$. На внутренней относительно овальной линии области плоскости P_2 реализуется полная плоскость Лобачевского. Подгруппа G группы проективных преобразований плоскости P_2 , состоящая из всех автоморфизмов овальной линии γ , является общей для $\hat{H}$ и плоскости Лобачевского фундаментальной группой преобразований.

Плоскость $\hat{H}$ является проективной моделью плоскости де Ситтера [3], [4], поскольку допускает реализацию на сфере действительного радиуса ρ с отождествленными диаметрально противоположными точками в псевдоевклидовом пространстве R_1^3 . Число ρ называют *радиусом кривизны*, а число $\frac{1}{\rho^2}$ — *кривизной* плоскости $\hat{H}$.

¹Место работы: Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
e-mail: romakinaln@mail.ru

В работах [5], [6] исследованы не имеющие аналогов в классических пространствах постоянной кривизны конечные замкнутые n -контуры (кратко: n -контуры) плоскости $\hat{H}$. Под n -контуром понимаем совокупность n точек и n циклически соединяющих эти точки отрезков, каждый из которых принадлежит параболической прямой. Доказано [5], что на $\hat{H}$ существует два типа 4-контуров (простые и составные), определенные различными положениями на абсолютной линии несобственных точек последовательно взятых сторон 4-контура.

Простым 4-контуром назван 4-контур, не имеющий точек самопересечения. Простой 4-контур обладает внутренностью и является выпуклым, причем он является наименьшим по размерности n -контуром, обладающим этими свойствами (3-контур плоскости $\hat{H}$ не имеет внутренних точек [5]). В работах [7]–[10] построены первые разбиения плоскости $\hat{H}$, где в качестве ячейки разбиения принят простой 4-контур. Интересными оказываются объекты плоскости $\hat{H}$, полученные в результате особых разбиений простого 4-контура на простые 4-контуры. В данной работе докажем геометрические факты, составляющие основу построения некоторых из этих объектов, и опишем процесс (диссекториальное разбиение), позволяющий на простых 4-контурах построить ковры и простые ковры, приведем примеры ковров. Более подробное исследование введенных объектов проведем в следующих работах.

В доказательствах будем использовать проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ плоскости $\hat{H}$, называемый *каноническим репером второго типа*, первые две вершины A_1, A_2 и единичная точка E которого принадлежат абсолюту, а третья вершина A_3 является полюсом прямой A_1A_2 относительно абсолюта. В репере R уравнение абсолютной овальной линии γ имеет вид $x_1x_2 - x_3^2 = 0$.

Если точки A, B гиперболической (эллиптической) прямой имеют координаты $A(a_i), B(b_i), i = 1, 2, 3$, то расстояние σ между ними в репере R можно выразить формулой

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{\sigma}{\rho} &= \pm \frac{a_1b_2 + a_2b_1 - 2a_3b_3}{2\sqrt{a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{b_1b_2 - b_3^2}} \\ \left(\cos \frac{\sigma}{\rho} &= \pm \frac{a_1b_2 + a_2b_1 - 2a_3b_3}{2\sqrt{a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{b_1b_2 - b_3^2}} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

1. Свойства простого 4-контура

В работах [5], [8] доказаны необходимые для дальнейших рассуждений свойства простого 4-контура плоскости $\hat{H}$. Приведем эти свойства без доказательств.

¹*0. Конечный замкнутый 4-контур плоскости $\hat{H}$ является простым (составным), если в четверке несобственных точек последовательно взятых сторон 4-контура существует (не существует) разделенная на абсолютной овальной линии γ пара соседних точек [2], [6].*

Прямые, соединяющие противоположные вершины конечного замкнутого 4-контура, назовем *диагональными прямыми*, а пересекающиеся отрезки, соединяющие противоположные вершины, — *диагоналями* данного контура.

²*0. Диагонали простого 4-контура пересекаются в их середине и принадлежат неизотропным взаимно ортогональным прямым различных типов.*

Диагональ простого 4-контура, принадлежащую эллиптической (гиперболической) прямой, назовем *эллиптической (гиперболической) диагональю*.

Длина эллиптической прямой равна $\pi\rho$. Если длина d_e эллиптической диагонали простого 4-контура меньше (больше) $\frac{\pi}{2}\rho$, контур назовем *узким* (*широким*). Если $d_e = \frac{\pi}{2}\rho$, контур назовем *прямым*.

Из свойства 2⁰ следует, что точка пересечения диагоналей простого 4-контура является его центром симметрии. Далее эту точку будем называть *центром* простого 4-контура.

3⁰. Каждая прямая, не содержащая вершину простого 4-контура, либо не имеет с этим контуром общих точек, либо пересекает точно два ребра контура.

4⁰. Если параболическая прямая пересекает ребро простого 4-контура, то она пересекает и противоположное ему ребро.

5⁰. Простой 4-контур обладает внутренностью и является выпуклым.

В данной работе под простым 4-контуром будем понимать его замыкание. Будем использовать обозначение $\text{int } F$ для внутренности, а обозначение $\overline{F}$ — для замыкания контура F .

6⁰. Пусть AC (BD) — эллиптическая (гиперболическая) диагональ контура $F = ABCD$. Тогда

$$\text{int } F = W_A \cap W_C \cap \widehat{W}_B = W_A \cap W_C \cap \widehat{W}_D,$$

$$\text{int } F = \widehat{W}_B \cap \widehat{W}_D \cap W_A = \widehat{W}_B \cap \widehat{W}_D \cap W_C,$$

где W_X ($\widehat{W}_X$) — валиана (ковалиана) точки X . Напомним, что валианой точки X плоскости $\widehat{H}$ называем множество всех точек M этой плоскости, для которых прямая MX является эллиптической. Ковалианой точки X называем дополнение валианы этой точки до плоскости $\widehat{H}$ [2], [5].

7⁰. Каждая точка на ребре простого 4-контура F однозначно определяет два простых 4-контура F_1, F_2 так, что

$$\text{int } F_1 \cap \text{int } F_2 = \emptyset, \quad \overline{F} = \overline{F}_1 \cup \overline{F}_2.$$

8⁰. Каждый простой 4-контур имеет один независимый инвариант Δ ($-1 < \Delta < 0$) относительно действий группы G , равный простому отношению, в котором точки пересечения противоположных сторон контура делят его ребра, принадлежащие данным сторонам. Простые 4-контуры с равными инвариантами Δ являются конгруэнтными, или G -эквивалентными, т. е. для любых двух простых 4-контуров с равными инвариантами Δ существует преобразование группы G , переводящее один из контуров в другой.

Число Δ назовем *основным инвариантом* простого 4-контура плоскости $\widehat{H}$.

Для обозначения конгруэнтности фигур на $\widehat{H}$ будем использовать символ $\cong$.

9⁰. Если простые 4-контуры $F_1, F_2, \dots, F_n$, $n \in \mathbb{N}$, с основными инвариантами соответственно $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ образуют разбиение простого 4-контура F с основным инвариантом Δ , то

$$|\Delta| = \prod_{i=1}^n |\Delta_i|. \quad (2)$$

10⁰. На $\widehat{H}$ не существует четырех G -эквивалентных простых 4-контуров, сходящихся в общей вершине и смежных по целому ребру.

Докажем новые свойства простого 4-контура.

$$\Delta = -\frac{1 + \cos \frac{d_x}{\rho}}{2}, \quad \Delta = -\frac{2}{1 + \operatorname{ch} \frac{d_h}{\rho}}, \quad (3)$$
$$\cos \frac{|OA|}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{4+b^2}}. \quad (6)$$

Согласно геометрическому смыслу основного инварианта простого 4-контура (свойство 8⁰) вычислим значение основного инварианта Δ контура F :

$$\Delta = (AB, N) = -(ABNA_1) = -\frac{4}{4+b^2}. \quad (7)$$

При вычислении инварианта Δ первой точкой в простом отношении трех точек условились указывать вершину эллиптической диагонали [5].

Из равенств (6), (7) получаем $\cos \frac{|OA|}{\rho} = \sqrt{-\Delta}$. Откуда

$$\cos \frac{d_e}{\rho} = -(2\Delta + 1). \quad (8)$$

Следовательно, справедливо первое равенство из (3).

По первой формуле из (1) выразим через параметр b длину d_h гиперболической диагонали BD :

$$\operatorname{ch} \frac{d_h}{\rho} = \frac{2+b^2}{2}. \quad (9)$$

Из равенств (7), (9), исключая параметр b , находим:

$$\operatorname{ch} \frac{d_h}{\rho} = \frac{2+\Delta}{-\Delta}.$$

Отсюда следует второе равенство в (3). Теорема доказана.

Замечание 1. Равенство (8) определяет условия на инвариант Δ узкого (широкого) простого 4-контура: $-1 < \Delta < -0,5$ ($-0,5 < \Delta < 0$). Инвариант Δ прямого простого 4-контура равен $-0,5$.

Параболические прямые, проходящие через центр простого 4-контура, назовем *диссектрисами* контура. Каждая из диссектрис разбивает простой 4-контур, в силу его симметричности относительно центра, на два конгруэнтных 4-контура. Докажем основную теорему о разбиении простого 4-контура его диссектрисами.

Теорема 2. *Диссектрисы разбивают простой 4-контур F на две пары конгруэнтных в каждой паре простых 4-контуров. Основной инвариант Δ_1 (Δ_0) контуров разбиения, эллиптические (гиперболические) диагонали которых принадлежат эллиптической (гиперболической) диагонали контура F , равен*

$$\Delta_1 = -\frac{1+\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \left(\Delta_0 = -\frac{2\sqrt{-\Delta}}{1+\sqrt{-\Delta}} \right), \quad (10)$$

где Δ — основной инвариант контура F .

Доказательство. Пусть A, B, C, D — последовательно взятые вершины простого 4-контура F , причем A, C (B, D) — вершины эллиптической (гиперболической) диагонали (см. рис. 1). Центр контура F обозначим O . Так как O — середина отрезков AC и BD , то по свойству 6⁰ она принадлежит внутренности контура F , т. е. каждая проходящая через точку O прямая пересекает контур F не менее, чем в двух точках. По свойствам 3⁰, 4⁰ каждая параболическая прямая k_i , $i = 0, 1$, проходящая через точку O , пересекает два противоположных ребра контура F . Пусть

$$k_1 \cap AB = P_1, \quad k_1 \cap CD = Q_1, \quad k_0 \cap BC = P_0, \quad k_0 \cap AD = Q_0.$$

По свойству 7^0 4-контур

$$F_1^1 = AP_1OQ_0, F_1^2 = CQ_1OP_0, F_0^1 = BP_0OP_1, F_0^2 = DQ_0OQ_1$$

являются простыми, не имеют общих внутренних точек, и их внутренности вместе с отрезками P_0Q_0, P_1Q_1 составляют внутренность контура F :

$$\text{int } F = \text{int } F_0^1 \cup \text{int } F_0^2 \cup \text{int } F_1^1 \cup \text{int } F_1^2 \cup P_0Q_0 \cup P_1Q_1.$$

По свойству 10^0 в четверке контуров $F_1^1, F_1^2, F_0^1, F_0^2$ найдется по крайней мере одна пара неконгруэнтных контуров. При симметрии относительно точки O простой 4-контур F_1^1 (F_0^1) переходит в простой 4-контур F_1^2 (F_0^2), поэтому $F_1^1 \cong F_1^2$, $F_0^1 \cong F_0^2$. Следовательно, контуры F_1^1, F_1^2 (F_0^1, F_0^2), эллиптические (гиперболические) диагональные прямые которых совпадают с эллиптической (гиперболической) диагональной прямой контура F , имеют равные основные инварианты Δ_1 (Δ_0), причем $\Delta_1 \neq \Delta_0$.

Найдем выражение инварианта Δ_1 (Δ_0) через инвариант Δ контура F .

Запишем для контуров F, F_1^1, F_0^1 формулы (3):

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1 + \cos \frac{|AC|}{\rho}}{2}, & \Delta &= -\frac{2}{1 + \text{ch} \frac{|BD|}{\rho}}, \\ \Delta_1 &= -\frac{1 + \cos \frac{|OA|}{\rho}}{2}, & \Delta_0 &= -\frac{2}{1 + \text{ch} \frac{|OB|}{\rho}}. \end{aligned}$$

Полученные равенства при справедливых для контура F соотношениях $|AC| = 2|OA|, |BD| = 2|OB|$ приводят к формулам (10). Теорема доказана.

В следующей теореме докажем, что диссектриса пересекает ребра контура в точках, расположенных «ближе» к вершинам эллиптических диагональных прямых. Параболические прямые на $\hat{H}$ являются изотропными, поэтому смысл слова «ближе» в данном случае не является метрическим.

Теорема 3. Пусть P — точка пересечения диссектрисы простого 4-контура $ABCD$ с ребром AB , вершина A которого принадлежит эллиптической диагонали, а точка M — середина отрезка AB . Тогда точка P принадлежит отрезку AM .

Доказательство. Присоединим к контуру $ABCD$ канонический репер R второго типа так, как при доказательстве теоремы 1. Тогда вершины контура и его центр O в репере R будут заданы координатами (4), (5).

Диссектрисы $k_i, i = 0, 1$, контура $ABCD$ имеют в репере R координаты

$$k_i \left(\left(-2 \pm \sqrt{4 + b^2} \right)^2 : b^2 : 2b \left(-2 \pm \sqrt{4 + b^2} \right) \right).$$

Учитывая, что точка P принадлежит отрезку AB , т.е. $(ABPA_1) < 0$, находим координаты точки P в репере R :

$$P \left(4b + 2b\sqrt{4 + b^2} : 0 : 8 + b^2 + 4\sqrt{4 + b^2} \right). \quad (11)$$

С учетом выражения (6) получаем:

$$(AB, P) = -(ABPA_1) = \frac{2}{\sqrt{4+b^2}} = \cos \frac{|OA|}{\rho} = \sqrt{-\Delta}. \quad (12)$$

Таким образом, положение точки P на ребре однозначно определено основным инвариантом контура, и для неконгруэнтных контуров это положение различно.

Из выражения (12) при условии $\Delta \in (-1; 0)$ получаем неравенство $(AB, P) < 1$, согласно которому точка P принадлежит отрезку AM , что и требовалось доказать.

Если простые 4-контур F_1 и F_0 смежны по ребру AB , то в одном из этих контуров эллиптической диагонали принадлежит вершина A , в другом — вершина B . Применяя теорему 3 к контурам F_1, F_0 , получаем, что точки пересечения ребра AB с диссектрисами контуров принадлежат различным отрезкам, образованным сечением отрезка AB его серединой M (рис. 2).

Рис. 2. Смежные по ребру AB простые 4-контур

2. Деревья на простых 4-контурах

Каждому простому 4-контур $\hat{H}$ плоскости поставим в соответствие взвешенный граф, двоичное ориентированное дерево.

На первом шаге разобьем диссектрисами простой 4-контур F на четыре простых контура $F_0^1, F_0^2, F_1^1, F_1^2$. По теореме 2 четверка контуров $F_i^j, i = 0, 1, j = 1, 2$, состоит из двух пар конгруэнтных контуров; пусть $F_i^1 \cong F_i^2$. Условимся, что нижний индекс 1 (0) соответствует 4-контур разбирования, эллиптическая (гиперболическая) диагональ которого принадлежит эллиптической (гиперболической) диагонали разбиваемого 4-контура.

На втором шаге аналогичным образом разобьем простые 4-контур F_i^j . Получим 16 простых 4-контуров $F_{ik}^{jl}, l = 1, 2, k = 0, 1$ (рис. 3, а), четверки которых образуют четыре группы конгруэнтных между собой контуров:

$$F_{ik}^{11} \cong F_{ik}^{12} \cong F_{ik}^{21} \cong F_{ik}^{22}, (\forall i, k).$$

Продолжим процесс последовательного разбиения диссектрисами образовавшихся простых 4-контуров. На шаге m получим 4^m простых 4-контуров $F_{k_1 \dots k_m}^{l_1 \dots l_m}, l_t = 1, 2, k_t = 0, 1, t = 1, \dots, m$, содержащих по 2^m конгруэнтных контуров в 2^m группах:

$$F_{k_1 \dots k_m}^{l_1 \dots l_m} \cong F_{p_1 \dots p_m}^{q_1 \dots q_m}, \text{ если } (k_1 \dots k_m) = (p_1 \dots p_m).$$

Рис. 3. Диссекториальное разбиение контура F : второй шаг (а); шаг $m + 1$ (б)

Разбиение диссектрисами контура $F_{k_1 \dots k_m}^{l_1 \dots l_m}$ на шаге $m + 1$ итерации в разбиении контура F представлено на рис. 3, б.

Описанный процесс назовем *диссекториальным разбиением* простого 4-контура F . Контуры $F_{k_1 \dots k_m}^{l_1 \dots l_m}$ назовем *контурами уровня m* контура F .

Инварианты контуров $F_{k_1 \dots k_m}^{l_1 \dots l_m}$ обозначим $\Delta_{k_1 \dots k_m}$, а их модули — $a_{k_1 \dots k_m}$ соответственно. По свойствам $8^0, 9^0$

$$0 < a_{k_1 \dots k_m} < 1, \quad (a_{k_1 \dots k_{m-1}1} a_{k_1 \dots k_{m-1}0})^2 = a_{k_1 \dots k_{m-1}}. \quad (13)$$

Сопоставим m -му шагу диссекториального разбиения контура F соответствующий m -й ярус ориентированного двоичного дерева Γ , присваивая каждой вершине графа вес — действительное число $a_{k_1 \dots k_m}$, являющееся модулем основного инварианта $\Delta_{k_1 \dots k_m}$. Корню дерева поставим в соответствие число a , равное модулю инварианта разбиваемого контура F (рис. 4). Равенства (10) определяют формулы рекурсивного задания весов вершин графа Γ :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1 + \sqrt{a}}{2}, & a_{k_1 \dots k_m 1} &= \frac{1 + \sqrt{a_{k_1 \dots k_m}}}{2}, \\ a_0 &= \frac{2\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}, & a_{k_1 \dots k_m 0} &= \frac{2\sqrt{a_{k_1 \dots k_m}}}{1 + \sqrt{a_{k_1 \dots k_m}}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Рис. 4. Дерево простого 4-контура

Любые два простых 4-контура имеют равные инварианты тогда и только тогда, когда они конгруэнтны. Следовательно, каждый простой 4-контур F плоскости $\hat{H}$,

заданный с точностью до движения, по формулам (14) однозначно определяет соответствующий ему граф Γ , который назовем *деревом* контура F . С другой стороны, каждая вершина ориентированного двоичного дерева, веса вершин которого определены условиями (13), (14), с точностью до движения определяет простой 4-контур F плоскости $\hat{H}$ и, следовательно, любой контур каждого уровня в диссекториальном разбиении контура F . Формулы (14) назовем *законом диссекториального разбиения* простого 4-контура.

В следующей теореме получим неравенства для сравнения весов вершин различных ярусов дерева Γ простого 4-контура и докажем, что ветви дерева Γ «не переплетаются».

Теорема 4. *Веса вершин различных ярусов дерева простого 4-контура связаны условиями*

$$\begin{aligned} a < a_{v_1 \dots v_s}, & \quad a_{k_1 \dots k_m} < a_{k_1 \dots k_m v_1 \dots v_s}, \\ a_{d_1 \dots d_r} < a_{v_1 \dots v_s d_1 \dots d_r}, & \quad a_{k_1 \dots k_m d_1 \dots d_r} < a_{k_1 \dots k_m v_1 \dots v_s d_1 \dots d_r}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$v_1, \dots, v_s, k_1, \dots, k_m, d_1, \dots, d_r = 0, 1, \quad s, m, r \in \mathbb{N}.$$

Веса вершин одного яруса строго упорядочены:

$$a_{d_1 \dots d_m} < a_{k_1 \dots k_m} \iff (\exists p \in \{1, \dots, m\}) :$$

$$d_t = k_t, \text{ если } t < p, \text{ где } t \in \mathbb{N}; \quad d_t < k_t, \text{ если } t = p.$$

Доказательство. Функции

$$f_1(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{2}, \quad f_0(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}},$$

рекурсивно определяющие по закону (14) диссекториального разбиения веса вершин графа Γ простого 4-контура F , непрерывно возрастают на промежутке $I = (0; 1)$ и принимают значения из того же промежутка. Непосредственная проверка показывает, что $x < f_0(x) < f_1(x)$ для всех $x \in I$, следовательно, для всех $a \in I$ выполняются условия:

$$a < a_0 < a_1,$$

$$a < f_{v_1}(a) < f_{v_2}(f_{v_1}(a)) < \dots < f_{v_s}(\dots f_{v_1}(a)) = a_{v_1 \dots v_s}.$$

Таким образом, первое неравенство из (15) доказано. Записывая это неравенство для дерева Γ' с корневой вершиной веса $a_{k_1 \dots k_m}$, содержащегося в Γ , докажем второе неравенство из (15).

Действуя последовательно на обе части первого и второго неравенств из (15) функциями одинаковых наборов, состоящих из r функций f_0, f_1 , получим третье и соответственно четвертое неравенства из (15):

$$a_{d_1 \dots d_r} = f_{d_r}(\dots f_{d_1}(a)) < f_{d_r}(\dots f_{d_1}(a_{v_1 \dots v_s})) = a_{v_1 \dots v_s d_1 \dots d_r},$$

$$a_{k_1 \dots k_m d_1 \dots d_r} = f_{d_r}(\dots f_{d_1}(a_{k_1 \dots k_m})) < f_{d_r}(\dots f_{d_1}(a_{k_1 \dots k_m v_1 \dots v_s})) = a_{k_1 \dots k_m v_1 \dots v_s d_1 \dots d_r}.$$

Первая часть теоремы доказана.

Доказательство второй части теоремы проведем в три этапа.

I. Методом математической индукции докажем, что для любого $a \in I$ выполняется неравенство

$$a_0 \underbrace{1 \dots 1}_{n-1} < a_1 \underbrace{0 \dots 0}_{n-1}. \quad (16)$$

Непосредственная проверка показывает, что при $n = 2$ неравенство (16) справедливо. Полагая, что неравенство (16) справедливо при $n = k$:

$$a_0 \underbrace{1 \dots 1}_{k-1} < a_1 \underbrace{0 \dots 0}_{k-1}, \quad (17)$$

докажем его выполнение при $n = k + 1$:

$$a_0 \underbrace{1 \dots 1}_k < a_1 \underbrace{0 \dots 0}_k. \quad (18)$$

Обозначим p_e, p_h (q_e, q_h) длины соответственно эллиптической и гиперболической диагоналей 4-контура

$$\underbrace{F_0^{1\dots 1}}_{k-1} \left(\underbrace{F_1^{1\dots 1}}_{k-1} \right). \quad (19)$$

По построению эллиптическая (гиперболическая) диагональ первого (второго) контура (19), полученного на k -м шаге диссекториального разбиения, принадлежит эллиптической (гиперболической) диагонали контура F_0^1 (F_1^1) и составляет одну (2^{k-1}) -ю часть от этой диагонали (на рис. 5 эллиптические диагонали контуров изображены горизонтальными отрезками).

Рис. 5. Контур $F_{01\dots 1}^{1\dots 1}$, $F_{10\dots 0}^{1\dots 1}$

Для модулей инвариантов контуров (19) в силу формул (10) справедливы равенства

$$a_0 \underbrace{1 \dots 1}_{k-1} = \frac{1 + \cos \frac{p_e}{\rho}}{2}, \quad a_1 \underbrace{0 \dots 0}_{k-1} = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} \frac{q_h}{\rho}}. \quad (20)$$

Исключая из равенств (10) значение инварианта Δ и применяя полученную формулу к первому контуру из (19), находим следующую зависимость между длинами p_e и p_h его эллиптической и гиперболической диагоналей:

$$\cos \frac{p_e}{\rho} = \frac{3 - \operatorname{ch} \frac{p_h}{\rho}}{1 + \operatorname{ch} \frac{p_h}{\rho}}. \quad (21)$$

Подставляя значение $\cos \frac{p_e}{\rho}$ из (21) в (20), неравенство (17) запишем в виде

$$\operatorname{ch} \frac{q_h}{\rho} < \operatorname{ch} \frac{p_h}{\rho}. \quad (22)$$

На $(k+1)$ -м шаге диссекториального разбиения возникнут контуры

$$F_{0\underbrace{1\dots 1}_k}^{1\dots 1} \text{ и } F_{1\underbrace{0\dots 0}_k}^{1\dots 1},$$

модули инвариантов которых определены равенствами

$$a_{0\underbrace{1\dots 1}_k} = \frac{1+\cos \frac{p_e}{2\rho}}{2} \text{ и } a_{1\underbrace{0\dots 0}_k} = \frac{2}{1+\operatorname{ch} \frac{q_h}{2\rho}}.$$

Соответствующее этому шагу итерации неравенство (18) можно записать в виде

$$\operatorname{ch} \frac{q_h}{2\rho} < \operatorname{ch} \frac{p_h}{2\rho}. \quad (23)$$

Длины p_h, q_h отрезков гиперболических прямых — действительные положительные числа, поэтому неравенства (22), (23) равносильны. Таким образом, при выполнении неравенства (17) выполняется неравенство (18).

По индукции справедливо неравенство (16).

II. При всех $x \in I$ выполняется неравенство $f_0(x) < f_1(x)$, поэтому в силу неравенства (16) получаем:

$$a_{0u_1\dots u_n} \leq a_{0\underbrace{1\dots 1}_n} < a_{1\underbrace{0\dots 0}_n} \leq a_{1v_1\dots v_n}.$$

Записывая неравенство $a_{0u_1\dots u_n} < a_{1v_1\dots v_n}$ для произвольного дерева с корневой вершиной веса $a_{c_1\dots c_{m-n-1}}$, содержащегося в Γ , получим неравенство

$$a_{c_1\dots c_{m-n-1}0u_1\dots u_n} < a_{c_1\dots c_{m-n-1}1v_1\dots v_n}. \quad (24)$$

Итак, для каждого числа $a \in I$ справедливо неравенство (24).

III. Предположим, что для наборов чисел $d_1, \dots, d_m, k_1, \dots, k_m$, состоящих из нулей и единиц, выполняется неравенство

$$a_{d_1\dots d_m} < a_{k_1\dots k_m}. \quad (25)$$

Пусть $t_1, \dots, t_z$ — набор натуральных чисел, для которых выполняются условия: $d_{t_i} \neq k_{t_i}$, $i = 1, \dots, z$. Данный набор содержит по крайней мере одно число. Действительно, если $d_t = k_t$ при всех $t = 1, \dots, m$, то $a_{d_1\dots d_m} = f_{k_m}(\dots f_{k_1}(a))$ и $a_{k_1\dots k_m} = f_{k_m}(\dots f_{k_1}(a))$, следовательно, неравенство (25) не выполняется. Наименьшее из чисел $t_1, \dots, t_z$ обозначим p . Так как $d_p \neq k_p$, то либо $d_p < k_p$, либо $d_p > k_p$. Если $d_p > k_p$, то $d_p = 1, k_p = 0$, и неравенство (25) можно записать в виде

$$a_{k_1\dots k_{p-1}1d_{p+1}\dots d_m} < a_{k_1\dots k_{p-1}0k_{p+1}\dots k_m}. \quad (26)$$

Неравенство (26) противоречит неравенству (24), следовательно, случай $d_p > k_p$ невозможен.

Таким образом, если выполняется неравенство (25), то существует такое число $p \in \{1, \dots, m\}$, что $d_t = k_t$ при $t < p$ и $d_t < k_t$ при $t = p$.

Обратно. Пусть для наборов чисел $d_1, \dots, d_m$ и $k_1, \dots, k_m$, состоящих из нулей и единиц, существует такое число $p \in \{1, \dots, m\}$, что $d_t = k_t$ при $t < p$ и $d_t < k_t$ при $t = p$. Тогда числа $a_{d_1 \dots d_m}$, $a_{k_1 \dots k_m}$ можно записать в виде

$$a_{d_1 \dots d_m} = a_{k_1 \dots k_{p-1} 0 d_{p+1} \dots d_m}, \quad a_{k_1 \dots k_m} = a_{k_1 \dots k_{p-1} 1 k_{p+1} \dots k_m}.$$

На основании неравенства (24) $a_{d_1 \dots d_m} < a_{k_1 \dots k_m}$.

Теорема доказана.

3. Построение ковров

Пусть F — простой 4-контур плоскости $\hat{H}$, Δ — основной инвариант контура F и $|\Delta| = a$. По свойству основного инварианта простого 4-контура $a \in I = (0; 1)$. Определим на контуре F простые ковры и ковры.

3.1. Простые ковры

Рассмотрим m -й шаг диссекториального разбиения контура F .

Пару чисел (m, a) , где $m \in \mathbb{N}$, однозначно определяющую по закону (14) диссекториального разбиения набор чисел $a_{k_1 \dots k_m}$, назовем *простым ковром* на контуре F . Число m назовем *уровнем*, а число a — *инвариантом* простого ковра.

По некоторому взаимно однозначному закону каждому значению $a_{k_1 \dots k_m}$ поставим в соответствие некоторый цвет, в который окрасим все 2^m контуров $F_{k_1 \dots k_m}^{l_1 \dots l_m}$ с инвариантом $\Delta_{k_1 \dots k_m} = -a_{k_1 \dots k_m}$ (рис. 6). Полученную фигуру плоскости $\hat{H}$ назовем *изображением* простого ковра (m, a) .

Рис. 6. Изображения простых ковров уровня 1 (а), 2 (б) и 3 (в)

По теореме 4 веса вершин одного яруса дерева Γ простого 4-контура строго упорядочены. Следовательно, при любом исходном контуре F одинаково окрашенными на изображении ковра окажутся лишь 2^m конгруэнтных контуров $F_{k_1 \dots k_m}^{l_1 \dots l_m}$, каждые два из которых либо не имеют общих точек, либо имеют одну общую вершину.

3.2. Ковры

Тройку чисел (p, q, a) , где $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, назовем *ковром уровня p высоты $q - p$* на простом 4-контуре F с инвариантом $\Delta = -a$, если для диссекториального разбиения контура F выполняются следующие условия:

- 1) для некоторого контура уровня p существуют конгруэнтные ему контуры уровня q ;
- 2) для каждого $u < p$ и $v < q$ среди контуров уровня u нет контуров, конгруэнтных контурам уровня v .

Построим на F все $(2^p + 2^q)$ конгруэнтных контуров уровней p и q . Окрасим конгруэнтные контуры в один цвет, а оставшуюся часть контура F сохраним неокрашенной. Полученную фигуру назовем *изображением ковра (p, q, a)* .

Найдем все ковры для $p = 1, 2$, $q = 2, 3$ и построим их изображения.

1. Ковер уровня 1 высоты 1 ($p = 1$, $q = 2$).

Предположим, что существует ковер $(1, 2, a)$ на простом 4-контуре F с инвариантом $\Delta = -a$. Рассмотрим первый и второй ярусы дерева контура F . Для шести действительных чисел из промежутка I (весов вершин этих ярусов) согласно теореме 4 выполняются неравенства

$$a_0 < a_{00} < a_{01} < a_{10} < a_{11}, \quad a_0 < a_1 < a_{01}.$$

Следовательно, для данного набора шести чисел условиями (15) не определено отношение порядка только в паре a_1, a_{00} . Сравнивая значения a_1 и a_{00} , получаем $a_1 = a_{00} \iff a = 97 - 56\sqrt{3}$.

Таким образом, существует единственный простой 4-контур F с инвариантом $\Delta = 56\sqrt{3} - 97$, для которого в диссекториальном разбиении контуры F_1^1, F_1^2 первого шага разбиения конгруэнтны контурам $F_{00}^{11}, F_{00}^{12}, F_{00}^{21}, F_{00}^{22}$ второго шага разбиения.

Итак, тройка чисел $(1, 2, 97 - 56\sqrt{3})$ — единственно существующий ковер уровня 1 высоты 1. Так как $\Delta \in (-0, 5; 0)$, то контур F ковра $(1, 2, 97 - 56\sqrt{3})$ является широким.

Построим контуры $F_1^1, F_1^2, F_{00}^{11}, F_{00}^{12}, F_{00}^{21}, F_{00}^{22}$ на простом 4-контуре F с инвариантом $\Delta = 56\sqrt{3} - 97$. Окрасим эти конгруэнтные контуры в один цвет, оставшуюся часть контура F оставим неокрашенной. Полученная фигура — изображение ковра $(1, 2, 97 - 56\sqrt{3})$ (рис. 7, а).

Рис. 7. Изображения ковров уровня 1 высоты 1 (а) и 2 (б)

2. Ковер уровня 1 высоты 2 ($p = 1$, $q = 3$).

Рассмотрим веса вершин первого и третьего ярусов дерева простого 4-контура F . Согласно теореме 4 вес a_0 вершины первого яруса меньше веса любой верши-

ны третьего яруса, а для веса a_1 неравенства (15) определяют вес a_{001} как наименьший из весов, превосходящий a_1 при каждом значении a из промежутка I . Следовательно, ковер уровня 1 высоты 2 может существовать лишь при условии $a_1 = a_{000}$. По формулам (14) запишем равенство $a_1 = a_{000}$ как уравнение относительно переменной $\sqrt{a}$. На промежутке I данное уравнение имеет единственный корень ($x_1 \approx 0,001750340065548528$). Следовательно, существует единственный ковер уровня 1 высоты 2: $(1, 3, x_1^2)$.

Инвариант $\Delta = -x_1^2 \approx -0,000003063690345064$ контура F ковра $(1, 3, x_1^2)$ принадлежит промежутку $(-0, 5; 0)$, следовательно, контур F является широким. Изображение ковра $(1, 3, x_1^2)$ представлено на рис. 7, б.

3. Ковры уровня 2 высоты 1 ($p = 2, q = 3$).

Рассмотрим второй и третий ярусы дерева Γ простого 4-контура F . Вес a_{00} меньше всех весов вершин третьего яруса графа Γ . Поэтому ищем ковра, определенные равенствами весов a_{01}, a_{10}, a_{11} с весами вершин третьего яруса.

3.1. Для веса a_{01} на основании неравенств (15) имеем

$$a_{01} < a_{010} < a_{011} < a_{100} < a_{101} < a_{110} < a_{111}.$$

Если $a_{01} = a_{001}$, то согласно второй формуле из (14) $a_0 = a_{00}$, что невозможно в силу неравенств (15). Остается проверить равенство $a_{01} = a_{000}$.

Если $a_{01} = a_{000}$, то, повторяя вычисления пункта 1 для весов $a'_1 = a_{01}$ и $a'_{00} = a_{000}$ вершин дерева Γ' с корневой вершиной $a' = a_0$, содержащегося в Γ , получаем $a' = a_0 = 97 - 56\sqrt{3}$. Тогда по третьей формуле из (14) $a = \left(\frac{97-56\sqrt{3}}{56\sqrt{3}-95}\right)^2$.

Таким образом, существует ковер $\left(2, 3, \left(\frac{97-56\sqrt{3}}{56\sqrt{3}-95}\right)^2\right)$. Его изображение представлено на рис. 8, а. Контур данного ковра является широким.

Рис. 8. Изображения ковров уровня 2 высоты 1: $a_{01} = a_{000}$ (а), $a_{10} = a_{001}$ (б)

3.2. Так как для веса a_{10} на основании неравенств (15)

$$a_{10} < a_{010} < a_{011} < a_{100} < a_{101} < a_{110} < a_{111},$$

то остается проверить равенства $a_{10} = a_{000}$, $a_{10} = a_{001}$.

Если $a_{10} = a_{000}$, то $a_1 = a_{00}$. Второе требование в определении ковра на простом 4-контуре нарушено. Следовательно, равенство $a_{10} = a_{000}$ не определяет ковер на простом 4-контуре.

Равенство $a_{10} = a_{001}$ определяет единственный ковер, изображение которого представлено на рис. 8, б. Контур данного ковра является широким.

3.3. Сравниваем вес a_{11} с весами вершин третьего яруса графа Г. Учитывая неравенства (15)

$$a_{11} < a_{011} < a_{100} < a_{101} < a_{110} < a_{111},$$

поиск ковров проводим, проверяя равенства $a_{11} = a_{000}$, $a_{11} = a_{001}$, $a_{11} = a_{010}$.

Если $a_{11} = a_{001}$, то $a_1 = a_{00}$. Нарушено второе требование определения ковра на простом 4-контуре. Следовательно, равенство $a_{11} = a_{001}$ не определяет ковер на простом 4-контуре.

Каждое из равенств $a_{11} = a_{000}$, $a_{11} = a_{010}$ определяет единственный ковер. Изображения данных ковров представлены на рис. 9, а, б. Контур ковра широкий.

Итак, на плоскости $\hat{H}$ существуют четыре ковра уровня 2 высоты 1.

Рис. 9. Изображения ковров уровня 2 высоты 1: $a_{11} = a_{000}$ (а), $a_{11} = a_{010}$ (б)

Список литературы

1. Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства*. Наука, М., 1969.
2. Л. Н. Ромакина, *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 ч. Ч. 1: Тригонометрия*. Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 2013.
3. De Sitter W., On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis. *Proc. Royal Acad. Amsterdam* (1917) **19**, №2, 1217–1225.
4. H.S.M. Coxeter, A Geometrical Background for De Sitter's World. *Amer. Math. Mon.* (1943) **50**, №4, 217–228.
5. Л. Н. Ромакина, Конечные замкнутые 3(4)-контурные расширенной гиперболической плоскости. *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика* (2010) **10**, №3, 14–26.
6. Л. Н. Ромакина, Конечные замкнутые 5-контурные расширенной гиперболической плоскости. *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика* (2011) **11**, №1, 38–49.
7. Л. Н. Ромакина, Аналог мозаики на гиперболической плоскости положительной кривизны. В сб.: *Математика. Механика : сб. науч. тр. Вып. 12*. Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 2010, с. 69–72.
8. Л. Н. Ромакина, Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные правильным n -контуром. В сб.: *Теория относительности, гравитация и геометрия : тр. междунар. конф. «Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation»*. Казан. ун-т, Казань, 2010, с. 227–232.
9. Л. Н. Ромакина, Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны. *Sb. Math.* (2012) **203**, №9, 1310–1341.
10. Л. Н. Ромакина, Верные триангуляции гиперболической плоскости положительной кривизны. *Матем. тр.* (2013) **16**, №2, 142–168.

Статья поступила 04.07.2011.