Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степанов, К проблеме дискретного логарифма, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 1, 133–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 18:15:48

К проблеме дискретного логарифма

© 2014 г. С. А. Степанов¹

Пусть $\mathbb{F}_q$ – конечное поле характеристики p , состоящее из $q = p^\nu$ элементов, g – примитивный элемент, $a \neq 0$ – произвольный элемент поля $\mathbb{F}_q$ и $x = \log_g a$ – дискретный логарифм элемента a по основанию g . В работе рассматривается проблема дискретного логарифма в поле $\mathbb{F}_q$, $q \equiv 1 \pmod{4}$, и указывается полиномиальный относительно q детерминистический алгоритм вычисления первых $k \leq c \log n$ знаков $x_0, x_1, \dots, x_k$, $k < n$, бинарного представления $x = x_0 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots + x_n 2^n$ числа x .

Ключевые слова: конечное поле, примитивный элемент, дискретный логарифм, расширение конечной степени, норма элемента, полиномиальное уравнение диагонального вида.

1. Введение

Пусть p – простое число $\mathbb{F}_q$ – конечное поле, состоящее из $q = p^\nu$ элементов. Мультипликативная группа $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ поля $\mathbb{F}_q$ является циклической группой порядка $q - 1$. Порождающий элемент g группы $\mathbb{F}_q^*$ называется *примитивным элементом* поля $\mathbb{F}_q$. Если s – произвольное целое число, взаимно простое с $q - 1$ и удовлетворяющее условию $1 \leq s \leq q - 1$, то g^s также является примитивным элементом поля $\mathbb{F}_q$. Отсюда следует, что поле $\mathbb{F}_q$ имеет в точности $\varphi(q - 1)$ примитивных элементов, где $\varphi(n)$ – функция Эйлера. Каждый элемент $a \in \mathbb{F}_q^*$ единственным образом представим (см. [10, Глава 2], [22, Глава 1]) в виде

$$g^x = a \tag{1}$$

при некотором $x \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x \leq q - 2$. Целое число x в указанном представлении называется *дискретным логарифмом* (или же *индексом*) элемента a по основанию g и обозначается через $\log a = \log_g a$ (или же через $\text{ind } a = \text{ind}_g a$). Далее, *проблема дискретного логарифма* состоит в нахождении единственным образом определенного целого числа x , $0 \leq x \leq q - 2$, удовлетворяющего соотношению (1) при заданных g и a .

С помощью повторного возведения в квадрат функция $y = g^x$ может быть весьма быстро вычислена для любого $x = 0, 1, \dots, q - 2$. В самом деле, если $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ – двоичные знаки числа x , т. е.

$$x = x_0 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots + x_n 2^n, \quad n \leq \lceil \log(q - 2) / \log 2 \rceil,$$

¹Место работы: Институт проблем передачи информации РАН
e-mail: sa-stepanov@iitp.ru

то мы имеем

$$g^x = \prod_{\substack{i=0 \\ x_i=1}}^n g^{2^i}.$$

Отсюда следует, что для вычисления g^x требуется не более $2n + 1$ умножений в поле $\mathbb{F}_q$. Стало быть, если поле $\mathbb{F}_q$ задано, то время работы алгоритма, основанного на повторном возведении в квадрат, оценивается величиной $O(\log x \log^3 q)$ (детали см. в [8], стр. 22).

С другой стороны, нахождение обратной функции $x = \log_g y$ для больших значений q рассматривается как весьма трудная задача (см. [2], [5], [6], [14], [21], [25]). Среди известных к настоящему времени быстрых алгоритмов вычисления дискретного логарифма в конечных полях можно выделить следующие четыре категории:

- (i) Быстрые эвристические алгоритмы (LaMacchia, Odlyzko [9], McCurley [13]);
- (ii) Субэкспоненциальные вероятностные алгоритмы, использующие случайные выборки параметров (Adleman [1], Coppersmith [3], Coppersmith, Odlyzko, Schroepel [4], Hellman, Reyneri [7], Odlyzko [15], Pollard [17], Pomerance [18], Semaev [19]); в большинстве случаев эти алгоритмы работают эффективно лишь в случае, когда характеристика p поля $\mathbb{F}_q$ мала;
- (iii) Общие детерминистические алгоритмы, которые работают в произвольной конечной группе G и вычисляют дискретный логарифм за $|G|^{1/2+\varepsilon}$ шагов (Massey [11], Shanks [20]);
- (iv) Детерминистические алгоритмы, которые работают хорошо лишь когда все простые делители числа $q - 1$ малы (McCurley [12], Pohlig, Hellman [16]).

В данной работе предлагается новый подход к проблеме дискретного логарифма и получен следующий результат.

Теорема. Пусть $p \geq 3$ – простое число, ν – положительное целое число и $\mathbb{F}_q$ – конечное поле, состоящее из $q = p^\nu$ элементов. Если $q \equiv 1 \pmod{4}$, то существует детерминистический алгоритм, который для заданного поля $\mathbb{F}_q$, состоящего из $q = p^\nu$ элементов, заданного примитивного элемента g поля $\mathbb{F}_q$ и произвольного ненулевого элемента $a \in \mathbb{F}_q$ определяет первые $k \leq n$ знаков $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ двоичного представления

$$x = x_0 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots + x_n 2^n, \quad n \leq \lfloor \log(q-2)/\log 2 \rfloor,$$

числа $x = \log_g a$ за $O(2^{2k} \log^2 q)$ арифметических операций в поле $\mathbb{F}_{q^{2k}}$.

Следствие. Пусть s и $\delta = \delta(\alpha)$ – положительные константы. Упомянутый выше алгоритм определяет $k \leq s \log n$ первых знаков бинарного представления

$$x = x_0 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots + x_n 2^n$$

числа $x = \log_g a$ за $O(\log^\delta q)$ операций в поле $\mathbb{F}_{q^{2k}}$.

2. Описание алгоритма

Для дальнейших рассмотрений нам удобно положить

$$g = g_0, \quad a = a_0, \quad x = x_0 + x_1 2 + x_2 2^2 + \cdots + x_n 2^n,$$

$$0 \leq x_0 + x_1 2 + x_2 2^2 + \cdots + x_n 2^n \leq q - 2,$$

где $x_i \in \{0, 1\}$, $0 \leq i \leq n$, и затем переписать соотношение (1) в виде

$$g_0^{x_0 + x_1 2 + x_2 2^2 + \cdots + x_n 2^n} = a_0. \quad (2)$$

Возводя обе части последнего соотношения в степень $(q-1)/2$ и учитывая, что

$$g_0^{\frac{q-1}{2}(x_0 + x_1 2 + x_2 2^2 + \cdots + x_n 2^n)} = g_0^{(q-1)(x_0 + x_1 2 + \cdots + x_n 2^{n-1})} = 1$$

в поле $\mathbb{F}_q$, мы приходим к равенству

$$g_0^{x_0 \frac{q-1}{2}} = a_0^{\frac{q-1}{2}}.$$

Затем, учитывая, что $g_0^{(q-1)/2} = -1$, получаем соотношение

$$(-1)^{x_0} = a_0^{\frac{q-1}{2}},$$

которое дает возможность единственным образом определить x_0 :

$$x_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } a_0 - \text{квадрат в } \mathbb{F}_q, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

После этого уравнение (2) может быть переписано в виде

$$g_0^{2(x_1 + x_2 2 + \cdots + x_n 2^{n-1})} = \tilde{a}_0, \quad (3)$$

где $\tilde{a}_0 = a_0 g^{-x_0}$.

Обозначим через g_1 такой примитивный элемент квадратичного расширения $\mathbb{F}_{q^2}$ поля $\mathbb{F}_q$, что

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q} g_1 = g_1^{1+q} = g_0,$$

а через $a_1 = \alpha_1^2$ обозначим такой элемент поля $\mathbb{F}_{q^2}$, что

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q} a_1 = a_1^{1+q} = \tilde{a}_0.$$

Затем рассмотрим в поле $\mathbb{F}_{q^2}$ уравнение

$$g_1^{2(x_1 + x_2 2 + \cdots + x_n 2^{n-1})} = a_1, \quad (4)$$

которое получается поднятием уравнения (3) из $\mathbb{F}_q$ в поле $\mathbb{F}_{q^2}$. Возводя обе части последнего уравнения в степень $(q^2-1)/2^2$ и принимая во внимание, что

$$g_1^{\frac{q^2-1}{2}} = -1,$$

мы приходим к равенству

$$(-1)^{x_1} = a_1^{\frac{(q^2-1)}{2^2}} = \alpha_1^{\frac{q^2-1}{2}} ,$$

которое дает

$$x_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha - \text{квадрат в } \mathbb{F}_{q^2}, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем теперь, что указанное выше значение x_1 не зависит от конкретного выбора определенного выше поднятия. Зафиксируем элемент g_1 и вместо уравнения (4) рассмотрим уравнение

$$g_1^{2(x_1+x_22+\dots+x_n2^{n-1})} = b_1$$

с такой правой частью $b_1 = a_1 g_1^{(q-1)t_1} \in \mathbb{F}_{q^2}$, $t_1 \in \mathbb{Z}$, что

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q} b_1 = b_1^{1+q} = \tilde{a}_0 .$$

Возводя обе части последнего уравнения в степень $(q^2-1)/2^2$ и принимая затем во внимание, что

$$g_1^{\frac{q^2-1}{2}} = -1, \quad q-1 \equiv 0 \pmod{2^2} ,$$

мы приходим к соотношению

$$(-1)^{x_1} = a_1^{\frac{q^2-1}{2^2}} \left(g_1^{\frac{(q-1)t_1}{2^2}} \right)^{(q^2-1)} = \alpha_1^{\frac{q^2-1}{2}} ,$$

которое задает в точности то же самое, что и прежде, значение для $x_1 \in \{0, 1\}$. В результате мы можем предположить без уменьшения общности, что $t_1 = 0$, и затем переписать уравнение (4) в виде

$$g_1^{2^2(x_2+x_32+\dots+x_n2^{n-2})} = \tilde{a}_1 , \tag{5}$$

где $\tilde{a}_1 = a_1 g_1^{-2x_1}$.

На втором шаге выберем некоторый примитивный элемент g_2 квадратичного расширения $\mathbb{F}_{q^{2^2}}$ поля $\mathbb{F}_{q^2}$, удовлетворяющий условию

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^2}}/\mathbb{F}_{q^2}} g_2 = g_2^{1+q^2} = g_1 ,$$

и обозначим через $a_2 = \alpha_2^{2^2}$ такой элемент поля $\mathbb{F}_{q^{2^2}}$, что

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^2}}/\mathbb{F}_{q^2}} a_2 = a_2^{1+q^2} = \tilde{a}_1 .$$

Далее, рассмотрим в поле $\mathbb{F}_{q^{2^2}}$ соотношение

$$g_2^{2^2(x_2+x_32+\dots+x_n2^{n-2})} = a_2 , \tag{6}$$

получаемое поднятием уравнения (5) из поля $\mathbb{F}_{q^2}$ в поле $\mathbb{F}_{q^{2^2}}$. Возводя обе части последнего уравнения в степень $(q^{2^2}-1)/2^3$ и принимая во внимание, что

$$g_2^{\frac{q^{2^2}-1}{2}} = -1 ,$$

получаем равенство

$$(-1)^{x_2} = a_2^{\frac{q^{2^2}-1}{2^3}} = \alpha_2^{\frac{q^{2^2}-1}{2}},$$

которое приводит к соотношению

$$x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_2 \text{ — квадрат в } \mathbb{F}_{q^{2^2}}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь мы покажем снова, что значение величины x_2 не зависит от конкретного выбора определенного выше поднятия. Зафиксируем примитивный элемент g_2 поля $\mathbb{F}_{q^{2^2}}$ и рассмотрим уравнение

$$g_2^{2^2(x_2+x_3 2+\dots+x_n 2^{n-2})} = b_2$$

с такой правой частью $b_2 = a_2 g_2^{(q^2-1)t_2} \in \mathbb{F}_{q^{2^2}}$, $t_2 \in \mathbb{Z}$, что

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^2}}/\mathbb{F}_{q^2}} b_2 = b_2^{1+q^2} = \tilde{a}_1.$$

Возводя обе части последнего уравнения в степень $(q^2-1)/2^3$ и принимая во внимание, что

$$g_2^{\frac{q^{2^2}-1}{2}} = -1, \quad q^{2^2} - 1 \equiv 0 \pmod{2^3},$$

приходим к соотношению

$$(-1)^{x_2} = a_2^{\frac{q^{2^2}-1}{2^3}} \left(g_2^{\frac{(q^2-1)t_2}{2^3}} \right)^{(q^2-1)} = \alpha_2^{\frac{q^{2^2}-1}{2}},$$

которое единственным образом определяет в точности то же самое значение $x_2 \in \{0, 1\}$, что и найденное ранее. Теперь мы снова можем считать без уменьшения общности, что $t_2 = 0$, а затем переписать уравнение (6) в виде

$$g_2^{2^3(x_3+x_4 2+\dots+x_n 2^{n-3})} = \tilde{a}_2,$$

где $\tilde{a}_2 = a_2 g_2^{-2^2 x_2}$.

Повторяя описанный выше процесс i раз, где $0 \leq i \leq n-1$, мы приходим к соотношению

$$g_i^{2^{i+1}(x_{i+1}+x_{i+2} 2+\dots+x_n 2^{n-i-1})} = \tilde{a}_i, \quad (7)$$

где g_i — некоторый примитивный элемент поля $\mathbb{F}_{q^{2^i}}$ и $\tilde{a}_i$ — некоторый элемент этого поля, полученный из исходного элемента $a \in \mathbb{F}_q$ на предыдущем шаге. Пусть g_{i+1} — некоторый примитивный элемент квадратичного расширения $\mathbb{F}_{q^{2^{i+1}}}$ поля $\mathbb{F}_{q^{2^i}}$ удовлетворяющий условию

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^{i+1}}}/\mathbb{F}_{q^{2^i}}} g_{i+1} = g_{i+1}^{1+q^{2^i}} = g_i,$$

а $a_{i+1} = \alpha_{i+1}^{2^{i+1}}$ — некоторый элемент поля $\mathbb{F}_{q^{2^{i+1}}}$ удовлетворяющий условию

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^{i+1}}}/\mathbb{F}_{q^{2^i}}} a_{i+1} = a_{i+1}^{1+q^{2^i}} = \tilde{a}_i.$$

Рассмотрим в поле $\mathbb{F}_{q^{2^{i+1}}}$ уравнение

$$g_{i+1}^{2^{i+1}(x_{i+1}+x_{i+2}2+\dots+x_n2^{n-i-1})} = a_{i+1}, \quad (8)$$

получаемое поднятием уравнения (7) из поля $\mathbb{F}_{q^{2^i}}$ в расширенное поле $\mathbb{F}_{q^{2^{i+1}}}$. Возводя обе части последнего уравнения в степень $(q^{2^{i+1}}-1)/2^{i+2}$ и принимая во внимание, что

$$g_{i+1}^{\frac{(q^{2^{i+1}}-1)}{2}} = -1,$$

мы приходим к уравнению

$$(-1)^{x_{i+1}} = a_{i+1}^{\frac{q^{2^{i+1}}-1}{2^{i+2}}} = \alpha_{i+1}^{\frac{q^{2^{i+1}}-1}{2}},$$

которое дает

$$x_{i+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_{i+1} \text{ квадрат в } \mathbb{F}_{q^{2^{i+1}}}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь мы покажем снова, что значение величины x_{i+1} не зависит от конкретного выбора указанного выше поднятия уравнения (7). Зафиксируем примитивный элемент g_{i+1} поля $\mathbb{F}_{q^{2^{i+1}}}$ и рассмотрим уравнение

$$g_{i+1}^{2^{i+1}(x_{i+1}+x_{i+2}2+\dots+x_n2^{n-i-1})} = b_{i+1}$$

с некоторым другим членом $b_{i+1} = a_{i+1}g_{i+1}^{(q^{2^{i+1}}-1)t_{i+1}} \in \mathbb{F}_{q^{2^{i+1}}}$, $t_{i+1} \in \mathbb{Z}$, в правой части, удовлетворяющим соотношению

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^{i+1}}}/\mathbb{F}_{q^{2^i}}} b_{i+1} = b_{i+1}^{1+q^{2^i}} = \tilde{a}_i.$$

Возводя обе части последнего уравнения в степень $(q^{2^{i+1}}-1)/2^{i+2}$ и принимая во внимание, что

$$g_{i+1}^{\frac{(q^{2^{i+1}}-1)}{2}} = -1, \quad q^{2^{i+1}}-1 \equiv 0 \pmod{2^{i+2}},$$

мы приходим к соотношению

$$(-1)^{x_{i+1}} = a_{i+1}^{\frac{q^{2^{i+1}}-1}{2^{i+2}}} \left(g_{i+1}^{\frac{(q^{2^{i+1}}-1)t_{i+1}}{2^{i+2}}} \right)^{(q^{2^{i+1}}-1)} = \alpha_{i+1}^{\frac{q^{2^{i+1}}-1}{2}},$$

которое единственным образом определяет то же самое значение $x_{i+1} \in \{0, 1\}$, что и указанное ранее. В результате, мы можем предположить без уменьшения общности, что $t_{i+1} = 0$, и затем переписать соотношение (8) в виде

$$g_{i+1}^{2^{i+2}(x_{i+2}+x_{i+3}2+\dots+x_n2^{n-i-2})} = \tilde{a}_{i+1},$$

где $\tilde{a}_{i+1} = a_{i+1}g_{i+1}^{-2^{i+1}x_{i+1}}$.

На заключительном $(n-1)$ -м шаге мы приходим к соотношению

$$g_{n-1}^{2^n x_n} = \tilde{a}_{n-1}, \quad (9)$$

где g_{n-1} – некоторый примитивный элемент поля $\mathbb{F}_{q^{2^{n-1}}}$ и $\tilde{a}_{n-1}$ – некоторый элемент того же поля. Рассмотрим примитивный элемент g_n поля $\mathbb{F}_{q^{2^n}}$, удовлетворяющий соотношению

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^n}}/\mathbb{F}_{q^{2^{n-1}}}} g_n = g_n^{1+q^{2^{n-1}}} = g_{n-1} ,$$

и обозначим через $a_n = \alpha_n^{2^n}$ некоторый элемент поля $\mathbb{F}_{q^{2^n}}$, удовлетворяющий соотношению

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^n}}/\mathbb{F}_{q^{2^{n-1}}}} a_n = a_n^{1+q^{2^{n-1}}} = \tilde{a}_{n-1} .$$

Далее, рассмотрим уравнение

$$g_n^{2^n x_n} = a_n , \quad (10)$$

получаемое поднятием соотношения (9) из поля $\mathbb{F}_{q^{2^{n-1}}}$ в поле $\mathbb{F}_{q^{2^n}}$, и заметим, что

$$q^{2^n} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{n+1}} .$$

Возводя обе части равенства (10) в степень $(q^{2^n} - 1)/2^{n+1}$ и принимая во внимание, что

$$g_n^{\frac{q^{2^n}-1}{2}} = -1 ,$$

мы приходим к соотношению

$$(-1)^{x_n} = a_n^{\frac{q^{2^n}-1}{2^{n+1}}} = \alpha_n^{\frac{q^{2^n}-1}{2}} ,$$

которое показывает, что

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_n \text{ квадрат в } \mathbb{F}_{q^{2^n}}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Наконец, покажем тем же образом, как и ранее, что полученное нами значение величины x_n не зависит от конкретного выбора указанного выше поднятия. В самом деле, зафиксируем g_n и рассмотрим уравнение

$$g_n^{2^n x_n} = b_n$$

с некоторым другим членом $b_n = a_n g_n^{(q^{2^n}-1)t_n}$, $t_n \in \mathbb{Z}$, в правой части, таким, что

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^n}}/\mathbb{F}_{q^{2^{n-1}}}} b_n = b_n^{1+q^{2^{n-1}}} = \tilde{a}_{n-1} .$$

Возводя теперь обе части последнего уравнения в степень $(q^{2^n} - 1)/2^{n+1}$ и принимая во внимание, что

$$g_n^{\frac{(q^{2^n}-1)}{2}} = -1, \quad q^{2^n} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{n+1}} ,$$

приходим к соотношению

$$(-1)^{x_n} = a_n^{\frac{q^{2^n}-1}{2^{n+1}}} (g_n^{\frac{(2^n-1)t_n}{2^{n+1}}})^{(q^{2^n}-1)} = \alpha_n^{\frac{q^{2^n}-1}{2}} ,$$

которое определяет то же самое значение величины $x_n \in \{0, 1\}$, что и указанное ранее. Предположив снова, что $t_n = 0$, и поделив затем обе части равенства (10) на $g_n^{2^n x_n}$, мы приходим к соотношению

$$1 = a_n g_n^{-2^n x_n} ,$$

которое завершает рассматриваемый процесс.

3. Вычислительная сложность алгоритма

Оценим время работы первых $k \leq n$ шагов описанного выше алгоритма. Наши аргументы существенно опираются на следующий результат ([23], Теорема 7.1).

Предложение. *Существует детерминистический алгоритм, который для заданного конечного поля $\mathbb{F}_q$, состоящего из q элементов, положительного целого m , делящего $q-1$, и ненулевых элементов $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbb{F}_q$, находит такие элементы $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{F}_q$, что*

$$\sum_{i=1}^m a_i x_i^m = b ,$$

или решает, что таких элементов не существует, используя

$$\tilde{O}(m^3 \log q + m^2 \log^2 q)$$

операций в поле $\mathbb{F}_q$.

Следует отметить, что граница сложности $\tilde{O}(m^3 \log q + m^2 \log^2 q)$, указанная в Предложении, является «мягкой» относительно m ; это означает, что логарифмические множители вида $\log^l m$ игнорируются (точное определение см. в [24, раздел 25.7]).

Напомним, что каждый из $k \leq n$ шагов нашего алгоритма состоит из некоторого подходящего поднятия обеих частей уравнения

$$g_{i-1}^{2^i(x_i + x_{i+1}2 + \dots + x_n 2^{n-i})} = \tilde{a}_i \quad (11)$$

из поля $\mathbb{F}_{q^{2^{i-1}}}$ в поле $\mathbb{F}_{q^{2^i}}$. Напомним также, что для того, чтобы поднять левую часть уравнения (11), мы должны указать такой примитивный элемент g_i поля $\mathbb{F}_{q^{2^i}}$, что

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^i}}/\mathbb{F}_{q^{2^{i-1}}}} g_i = g_{i-1} .$$

Пусть $\{1, \omega_i\}$ – некоторый базис поля $\mathbb{F}_{q^{2^i}}$ над $\mathbb{F}_{q^{2^{i-1}}}$ и

$$g_i = u_{i1} + u_{i2}\omega_i, \quad u_{i1}, u_{i2} \in \mathbb{F}_{q^{2^{i-1}}} .$$

Мы имеем

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^i}}/\mathbb{F}_{q^{2^{i-1}}}} g_i = (u_{i1} + u_{i2}\omega_i)(u_{i1} + u_{i2}\omega_i^{q^{2^{i-1}}}) = u_{i1}^2 + a_i u_{i2} + b_i u_{i2}^2,$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{F}_{q^{2^{i-1}}}$. Записывая теперь последнее соотношение в виде

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^i}}/\mathbb{F}_{q^{2^{i-1}}}} g_i = v_{i1}^2 + c_i v_{i2}^2,$$

где

$$v_{i1} = u_{i1} + \frac{\omega_i + \omega_i^{q^{2^{i-1}}}}{2} u_{i2}, \quad v_{i2} = u_{i2} ,$$

$$c_i = (\omega_i \omega_i^{q^{2^{i-1}}} - \frac{(\omega_i + \omega_i^{q^{2^{i-1}}})^2}{4}) \neq 0 ,$$

и принимая во внимание сформулированное выше Предложение, мы находим, что вычисление элемента g_i требует $O(2^i \log^2 q)$ арифметических операций в поле $\mathbb{F}_{q^{2^i}}$. Аналогично, построение такого элемента $a_i \in \mathbb{F}_{q^{2^i}}$, что

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}_{q^{2^i}}/\mathbb{F}_{q^{2^{i-1}}}} a_i = \tilde{a}_{i-1},$$

требует $O(2^i \log^2 q)$ операций в поле $\mathbb{F}_{q^{2^i}}$.

Таким образом, мы можем вычислить k первых бинарных знаков $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ двоичного представления

$$x = x_0 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots + x_n 2^n$$

числа $x = \log_g a$, используя $O(2^{2k} \log^2 q)$ арифметических операций в конечном поле $\mathbb{F}_{q^{2^k}}$.

Список литературы

1. Adleman L.M., A sub-exponential algorithm for the discrete logarithm problem with applications. *Proc. 20-th Annual IEEE Symp. on the Found. Comp. Sci.* (1979) 55–60.
2. Diffie W., Hellman M., New directions in cryptography. *IEEE Trans. Inf. Theory* (1976) **22**, 644–654.
3. Coppersmith D., Fast evaluation of discrete logarithms in fields of characteristic 2. *IEEE Trans. Inf. Theory* (1984) **30**, 587–594.
4. Coppersmith D., Odlyzko A.M., Schroepel R., Discrete logarithms in $GF(p)$. *Algoritmica* (1986) **1**, 1–15.
5. ElGamal T., A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms. *IEEE Trans. Inf. Theory* (1985) **31**, №4, 469–472.
6. ElGamal T., Computing logarithms over finite fields, *Lect. Notes in Comp. Sci.* (1986) **218**, 396–402.
7. Hellman M.E., Reyneri J.M., Fast computation of discrete logarithms in $GF(q)$. *Proc. of Crypto' 82* (1983) 3–13.
8. Koblitz N., *A Course in Number Theory and Cryptography*. Springer-Verlag, New York, 1987.
9. LaMacchia B.A., Odlyzko A.M., Computation of discrete logarithms in prime fields. *Designs, Codes and Cryptography* (1991) **1**, №1, 47–62.
10. Lidl R., Niederreiter G.L., *Finite Fields*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.
11. Massey J.L., Logarithms in finite cyclic groups – cryptographic issues. *Proc. 4-th Benelux Symp. on Inf. Theory* (1983) 17–25.
12. McCurley K.S., The discrete logarithm problem. *Proc. Symp. in Appl. Math.* (1990) **42**, 49–74.
13. McCurley K.S., Cryptographic key distribution and computation in class groups. *Proc. of the NATO Advanced Study Inst. on Number Theory and Appl. Kluwer, Boston* (1989) 459–479.
14. Menezes A., Okamoto T., Vanstone S., Reducing elliptic curve logarithms to logarithms in a finite field. *Proc. 22-th Annual ACM Symp. on Theory of Comp.* (1991) 80–89.
15. Odlyzko A.M., Discrete logarithms in finite fields and their cryptographic significance. *Proc. of Eurocrypt 84* (1985) 224–314.

16. Pohlig S., Hellman M., An improved algorithm for computing logarithms over $GF(p)$ and its cryptographic significance. *IEEE Trans. Inf. Theory* (1978) **24**, №1, 106–110.
17. Pollard J.M., Monte Carlo methods for index computation mod p . *Math. Comp.* (1978) **32**, 918–924.
18. Pomerance C., Fast, rigorous factorization and discrete logarithm algorithms. *Discrete Algorithms and Complexity* (1987) 119–143.
19. Semaev I.A., Computation of discrete logarithms in an arbitrary finite field. *Discrete Math. Appl.* (1995) **5**, №2, 107–116.
20. Shanks D., Class number, a theory of factorization and genera. *Proc. Symp. in Pure Math.* (1971) 415–440.
21. Shparlinski I.E., Computational and algorithmic problems in finite fields (1992).
22. Stepanov S.A., *Arithmetic of algebraic curves*. Plenum, New York - London, 1994.
23. Van de Woestijne C., Deterministic equation solving over finite fields. *ISSAC'05* (2005).
24. Von zur Gathen J., Gerhard J., *Modern computer algebra* (second, ed.). Cambridge University Press, 2003.
25. Washington L., *Elliptic curves: number theory and cryptography*. Chapman & Hall / CRC Press, 2003.

Статья поступила 02.07.2013.