Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Шнурков, А. В. Иванов, Анализ дискретной полумарковской модели управления запасом непрерывного продукта при периодическом прекращении потребления, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 1, 143–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:42:55

Анализ дискретной полумарковской модели управления запасом непрерывного продукта при периодическом прекращении потребления

© 2014 г. П. В. Шнурков¹, А. В. Иванов²

В работе рассматривается дискретная стохастическая модель управления запасом некоторого продукта, основанная на использовании управляемого полумарковского процесса. Определены вероятностные характеристики полумарковского процесса, а также характеристики стационарного стоимостного функционала, связанного с этим процессом. Установлено, что оптимальной стратегией управления запасом является детерминированная. Получены явные аналитические представления для стационарного функционала, характеризующего качество управления. Задача оптимального управления сведена к поиску экстремума функции нескольких вещественных переменных.

Ключевые слова: управление запасами, полумарковский процесс, оптимальное управление.

Введение

В работах П. В. Шнуркова и Р. В. Мельникова [1], [2] была разработана и исследована стохастическая модель управления запасом непрерывного продукта, в которой моментами регенерации являлись моменты пополнения запаса до максимально возможного уровня $\tau > 0$. Параметром управления являлось случайное время от момента очередного пополнения запаса до момента, в который производится заказ на следующее пополнение. Было показано, что распределения случайного параметра управления, доставляющие экстремум некоторым функционалам – показателям качества управления – являются вырожденными. Для различных вариантов проблемы оптимального управления запасом в стохастической модели регенерации были определены оптимальные детерминированные значения параметра управления.

В настоящей работе рассматривается более сложная полумарковская модель управления запасом непрерывного продукта. Потребление продукта происходит с постоянной скоростью, параметром управления является время от момента пополнения запаса до момента заказа на следующее пополнение. Пополнение запаса происходит по схеме, в которой учитываются состояния системы до пополнения, а также возможные случайные отклонения от планируемого объема поставки. Структура

^{1,2} Место работы: МИЭМ НИУ ВШЭ

e-mail: pshnurkov@hse.ru, a.i.valerevich@gmail.com

рассматриваемой системы позволяет применить теорию управления полумарковскими процессами с конечным множеством состояний. Показателем качества управления является стационарный стоимостной функционал средней удельной прибыли (по отношению к единице времени). Как было указано В.А. Каштановым ([3], [4], гл. 13), он представляет собой дробно-линейный функционал от вероятностных распределений, определяющих управляющие воздействия. В работе устанавливается, что оптимальной стратегией управления является детерминированная, которая зависит от состояния введённого полумарковского процесса. Набор оптимальных значений параметра управления представляет собой точку глобального экстремума функции нескольких переменных, для которой указано явное представление.

Отметим, что стохастические полумарковские модели редко используются в теории управления запасами. Например, в издании [5], содержащем в себе ряд фундаментальных результатов по классическим моделям теории запасов, полумарковские модели не рассматриваются. В зарубежной научной литературе имеется довольно много работ, посвященных общим проблемам управления полумарковскими процессами [6], [7], [8], результаты которых могут быть использованы и для решения задач управления запасами. В этих работах исследуются задачи управления полумарковскими процессами при весьма общих предположениях о характере множеств состояний и управлений. Целевые функционалы, по отношению к которым рассматриваются задачи управления, имеют стационарный характер и представляют собой предельные значения стоимостных аддитивных функционалов, отнесенные к единице времени. Доказывается, что оптимальная стратегия управления в таких задачах является стационарной и детерминированной. Результаты нашего исследования согласуются с этими общими утверждениями и позволяют получить конкретное численное решение для рассматриваемой модели. Из исследований, непосредственно посвященных анализу полумарковских моделей управления запасом, отметим работу украинских математиков [9], в которой рассматривается модель управления запасом с непрерывным и ограниченным множеством состояний и доказывается оптимальность пороговых стратегий управления.

1. Описание модели

1.1. Характеристики системы

Рассматривается система, предназначенная для хранения определенного вида продукта и поставки его потребителю. Величина запаса продукта описывается случайным процессом $x(t)$, $t \geq 0$, принимающим значения в множестве $(-\infty, \tau]$, $\tau > 0$ (τ – максимальная вместимость хранилища). Как принято в классических моделях теории запасов [5], [10], [11], отрицательная величина запаса означает наличие неудовлетворенного спроса (дефицита продукта), который компенсируется после очередной поставки. В рассматриваемой модели потребление происходит с постоянной скоростью $\alpha > 0$, а в определенные периоды времени не происходит вообще. Без ограничения общности можно положить $\alpha = 1$.

В модели используется дискретизация. Разобьем множество возможных значений величины запаса $(-\infty, \tau]$ на конечное число подмножеств:

$$(\tau_k, \tau_{k+1}], \quad k = \{-N_1, \dots, N_0\}; \quad \tau_{-N_1} = -\infty, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_{N_0+1} = \tau,$$

где N_0, N_1 – заданные целые положительные числа.

Предполагается, что непосредственное пополнение запаса происходит мгновенно. Обозначим через $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательность случайных моментов времени, в которые осуществляется пополнение запаса, а через $\{t'_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность случайных моментов времени, в которые производится заказ на пополнение запаса. Сделанный заказ на пополнение выполняется с некоторой задержкой. Таким образом, с вероятностью, равной единице, выполняются соотношения $t_n < t'_n < t_{n+1}$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $t_0 = 0$.

Приведем описание процедуры пополнения запаса. В начальный момент функционирования системы или в момент окончания очередного пополнения планируется время, через которое будет сделан заказ на следующее пополнение запаса. Такое планирование заключается в нахождении реализации случайной величины – времени от момента очередного пополнения запаса до момента, в который производится следующий заказ на пополнение. Именно, если в некоторый фиксированный момент времени t_n произошло пополнение запаса и в результате этого пополнения запас принял значение $x(t_n) = x \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$, то заказ планируется через время ξ_i , где ξ_i – случайная величина с функцией распределения $G_i(t)$, $i \in \{0, \dots, N_0\}$. При таких условиях с вероятностью, равной единице, имеет место стохастическое соотношение $t'_n = t_n + \xi_i$.

В запланированный момент времени производится заказ на пополнение запаса и начинается период задержки (период подготовки выполнения очередного заказа). В течение периода задержки потребление запаса не происходит. Предполагается, что если состояние системы в момент заказа t'_n принимает значение $x(t'_n) = x - \xi_i \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \in \{-N_1, \dots, N_0\}$, а в результате последующего пополнения объем запаса становится равным $x(t_{n+1}) \in (\tau_l, \tau_{l+1}]$, $l \in \{\max(0, k), \dots, N_0\}$, то длительность задержки – случайная величина η_{kl} – зависит от номеров k, l и имеет математическое ожидание $\mu_{kl} = M\eta_{kl} < \infty$, $l \in \{\max(0, k), \dots, N_0\}$, $k \in \{-N_1, \dots, N_0\}$. Параметры μ_{kl} предполагаются заданными. В рамках развиваемой в дальнейшем теории задание функции распределения случайной длительности периода задержки не является необходимым.

При выполнении указанных условий с вероятностью, равной единице, имеет место равенство $t_{n+1} = t'_n + \eta_{kl}$, и в момент t_{n+1} осуществляется запланированное пополнение запаса.

Объем непосредственного пополнения запаса определяется следующим образом. Если в момент заказа значение процесса $x(t'_n) \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \in \{-N_1, \dots, N_0\}$, то в результате пополнения процесс переходит в подмножество $(\tau_l, \tau_{l+1}]$ с заданной вероятностью β_{kl} , $l \in \{\max(0, k), \dots, N_0\}$, $\sum_l \beta_{kl} = 1$, и состояние внутри этого подмножества (точный уровень запаса) определяется в соответствии с известной функцией распределения $B_l(x)$, $l \in \{0, \dots, N_0\}$: $B_l(\tau_l) = 0$, $B_l(\tau_{l+1}) = 1$. Вероятностные распределения $B_l(x)$ описывают отклонения от заданных фиксированных значений уровней запаса внутри каждого подмножества с номером l (например, от середины соответствующего интервала). Таким образом, после пополнения запас всегда является положительным и дефицит продукта ликвидируется.

Эволюция процесса $x(t)$ после момента очередного заказа зависит только от номера подмножества состояний, в котором оказался этот процесс в момент заказа. Эволюция процесса $x(t)$ после момента очередного пополнения также происходит независимо от прошлого и зависит только от номера подмножества состояний, в котором оказался этот процесс в результате пополнения запаса. В этом смысле случайный процесс $x(t)$, описывающий объем запаса в системе, в моменты заказа и в моменты непосредственного пополнения запаса обладает марковским свойством.

Данные особенности рассматриваемой модели будут существенно использоваться в дальнейшем.

Замечание 1. Будем называть интервал времени между последовательными моментами непосредственного пополнения запаса интервалом (периодом) эволюции системы (основного процесса). Каждый период эволюции можно разбить на две части: первая часть – от момента непосредственного пополнения запаса до момента заказа на следующую поставку; вторая – от момента заказа до момента следующего непосредственного пополнения. Очевидно, что вторая часть периода эволюции системы совпадает с длительностью задержки поставки.

Предположим, что функционирование рассматриваемой системы хранения и поставки продукта потребителю связано с доходами от реализации продукта, расходами на хранение и штрафами, возникающими из-за дефицита продукта. Введем следующие обозначения:

$c_1(x)$ – затраты на хранение продукта объема $x > 0$ в единицу времени,

$c_2(x)$ – затраты, связанные с дефицитом величины x , $x < 0$, в единицу времени (штрафы),

$g_1(x)$ – цена единицы продукта при условии, что объем имеющегося в системе (оставшегося) продукта равен x , $x > 0$ (имеется положительный запас),

$g_2(x)$ – цена единицы продукта при условии, что объем продукта в системе равен x , $x < 0$ (имеется дефицит объема x).

Указанные стоимостные характеристики предполагаются заданными.

1.2. Введение вспомогательного полумарковского процесса

Для математического описания рассматриваемой системы, кроме основного случайного процесса $x(t)$, $t \geq 0$, непосредственно описывающего уровень запаса в произвольный момент времени, введем вспомогательный (сопровождающий) полумарковский случайный процесс $\zeta(t)$, $t \geq 0$, с конечным множеством состояний, определяемый при помощи вложенной цепи Маркова.

Предполагается, что объем запаса $x(0) = x_0$ в начальный момент времени является заданной величиной, принадлежащей одному из возможных интервалов разбиения: $x_0 \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \in \{0, \dots, N_0\}$. В частности, возможно, что $x_0 = \tau$.

Пусть ζ_n – номер подмножества состояний, в котором оказался процесс $x(t)$ в момент времени t_n (непосредственно после очередного пополнения запаса). Другими словами, $\zeta_n = k$, если $x(t_n + 0) = x(t_n) \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \in \{0, \dots, N_0\}$. Согласно сделанному выше предположению, в моменты пополнения запаса t_n , $n \in \{0, 1, \dots\}$, случайный процесс $x(t)$ обладает марковским свойством. Отсюда следует, что последовательность случайных величин $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует цепь Маркова. Определим случайный процесс $\zeta(t)$, связанный с последовательностью $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$, при помощи соотношения

$$\zeta(t) = \zeta_n, \quad t \in [t_n, t_{n+1}), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Случайный процесс $\zeta(t)$, $t \geq 0$, представляет собой управляемый полумарковский процесс с конечным множеством состояний $E = \{0, 1, \dots, N_0\}$. В дальнейшем этот процесс будет называться сопровождающим полумарковским процессом. Последовательность $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$ является цепью Маркова, вложенной в этот полумарковский процесс. Управление процессом $\zeta(t)$ производится в моменты t_n (после определения значения процесса $x(t_n)$).

Параметр управления u_n представляет собой случайную длительность периода времени до момента следующего заказа на пополнение запаса. Именно, $u_n = \xi_k$, если $\zeta_n = k$ (равенство случайных величин понимается в смысле совпадения законов распределения). Множество допустимых значений параметра управления $U = [0, \infty)$.

Задача оптимизации управления запасом в данной стохастической модели или задача управления построенным полумарковским процессом заключается в выборе управляющих вероятностных распределений $G_k(t) = \mathbf{P}(\xi_k < t), k \in \{0, \dots, N_0\}$, доставляющих экстремум некоторому показателю качества управления $I(G_0(\cdot), G_1(\cdot), \dots, G_{N_0}(\cdot))$.

2. Общие представления и основные соотношения для стоимостных аддитивных функционалов, связанных с полумарковским процессом

Следуя общей схеме ([4], глава 10), [12], рассмотрим аддитивный стоимостной функционал, связанный с построенной полумарковской моделью. Такой функционал обычно выражает некоторый экономический показатель функционирования системы, описываемой этой полумарковской моделью. В частности, аддитивными стоимостными функционалами являются случайные величины прибыли и затрат, связанные с эволюцией рассматриваемой системы на интервале времени $[0, t)$. Обозначим через $V(t)$ математическое ожидание величины прибыли, полученной в результате эволюции системы на указанном интервале времени. Как известно [6], [7], [12], для аддитивных стоимостных функционалов при достаточно общих условиях имеет место следующий результат:

$$I = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} = \frac{\sum_{i=0}^{N_0} d_i \pi_i}{\sum_{i=0}^{N_0} T_i \pi_i}, \quad (1)$$

где $\{\pi_i, i = 0, 1, \dots, N_0 - 1\}$ – стационарное распределение цепи Маркова $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$, вложенной в сопровождающий полумарковский процесс,

T_i – математическое ожидание времени пребывания процесса $\zeta(t)$ в состоянии i до следующего перехода, $i \in \{0, \dots, N_0\}$,

d_i – математическое ожидание приращения исходного аддитивного стоимостного функционала за время пребывания процесса $\zeta(t)$ в состоянии i , $i \in \{0, \dots, N_0\}$.

По своему прикладному содержанию величина I в (1) представляет среднюю удельную прибыль, связанную с эволюцией системы в стационарном режиме. Кроме того, величина I представляет собой функционал от набора вероятностных распределений $G_i(\cdot)$, $i \in \{0, \dots, N_0\}$, определяющих стратегию управления системой. В дальнейшем будем рассматривать стационарный стоимостной функционал $I = I(G_0(\cdot), G_1(\cdot), \dots, G_{N_0}(\cdot))$ как показатель качества управления системой и построенным полумарковским процессом $\zeta(t)$. Отметим, что аналогичным образом могут рассматриваться задачи управления и для других видов стационарных стоимостных функционалов, например, для средних удельных затрат.

Для определения вероятностных и стоимостных характеристик модели введем систему событий, связанных с состоянием системы в момент заказа на пополнение

продукта. Зафиксируем состояние сопровождающего полумарковского процесса $\zeta(t)$ в момент очередного пополнения запаса: $\zeta_n = \zeta(t_n) = i$. Рассмотрим некоторую систему несовместных событий:

$$A_k = (x(t'_n) \in (\tau_k, \tau_{k+1}]), \quad k \in \{-N_1, \dots, i\}, \quad (2)$$

реализация которых происходит при фиксированном условии $\zeta_n = i$, $i \in \{0, \dots, N_0\}$. Введем следующее обозначение:

$$\alpha_k(x) = x - \tau_k, \quad k \in \{-N_1, \dots, N_0\}. \quad (3)$$

Получим явные представления для условных вероятностей.

$$q_{ik} = \mathbf{P}(A_k | \zeta_n = i) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\int_{\alpha_{k+1}(x)}^{\alpha_k(x)} dG_i(t) \right) dB_i(x), \quad k \in \{-N_1, \dots, i\}. \quad (4)$$

Вероятности перехода цепи Маркова $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$, вложенной в сопровождающий полумарковский процесс, определяются следующими формулами:

$$p_{ij} = \sum_{k=-N_1}^i q_{ik} \beta_{kj}, \quad \sum_j p_{ij} = 1, \quad i, j \in \{0, \dots, N_0\}. \quad (5)$$

Теперь найдем представление для математического ожидания случайной длительности периода эволюции системы $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, определяемого по величине Δt_n и событию A_k

$$T_{ik} = \mathbf{M}[\Delta t_n; A_k | \zeta_n = i] = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left[\int_{\alpha_{k+1}(x)}^{\alpha_k(x)} (t + \mu_k) dG_i(t) \right] dB_i(x), \quad k \in \{-N_1, \dots, i\}. \quad (6)$$

Величина μ_k в формуле (6) представляет собой условное математическое ожидание длительности задержки при условии, что реализуется событие A_k , и определяется формулой

$$\mu_k = \sum_{l=\max(0,k)}^{N_0} \mu_{kl} \beta_{kl}.$$

Математическое ожидание времени пребывания процесса $\zeta(t)$ в состоянии i до следующего перехода имеет вид

$$T_i = \sum_{k=-N_1}^i T_{ik}, \quad i \in \{0, \dots, N_0\}. \quad (7)$$

Введем вспомогательную функцию $D_k(x, t)$, представляющую собой условное математическое ожидание величины прибыли при функционировании рассматриваемой системы на одном периоде ее эволюции, которое определяется при следующих условиях:

- в момент очередного пополнения запас продукта равен фиксированной величине $x(t_n) = x \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$; при этом выполняется условие $\zeta_n = i$;

- параметр управления принимает фиксированное значение $t > 0$;
- в момент заказа реализуется событие $A_k = (x(t'_n) \in (\tau_k, \tau_{k+1}])$.

Функция $D_k(x, t)$ аналитически выражается следующим образом:

$$D_k(x, t) = \begin{cases} \int_0^t [g_1(x-z) - c_1(x-z)]dz - c_1(x-t)\mu_k, & t \leq x, k \in \{0, \dots, N_0\}; \\ \int_0^x [g_1(x-z) - c_1(x-z)]dz + \int_x^t [g_2(x-z) - c_2(x-z)]dz - \\ - c_2(x-t)\mu_k, & t > x, k \in \{-N_1, \dots, -1\}. \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим через V_n^+ значение аддитивного стоимостного функционала прибыли в момент времени $t_n + 0$ (непосредственно после пополнения запаса), а через $\Delta V_n = V_{n+1}^+ - V_n^+$ — приращение значения данного функционала, образующееся на периоде эволюции $(t_n, t_{n+1}]$. Получим представление для математического ожидания случайной величины ΔV_n , определяемого по этой величине и событию A_k

$$d_{ik} = \mathbf{M}[\Delta V_n; A_k | \zeta_n = i] = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left[\int_{\alpha_{k+1}(x)}^{\alpha_k(x)} D_k(x, t) dG_i(t) \right] dB_i(x), k \in \{-N_1, \dots, i\}. \quad (9)$$

Математическое ожидание прибыли, полученной за время пребывания процесса $\zeta(t)$ в состоянии i до следующего перехода, определяется следующей формулой:

$$d_i = \sum_{k=-N_1}^i d_{ik}, i \in \{0, \dots, N_0\}. \quad (10)$$

Таким образом, получены явные представления для вероятностных и стоимостных характеристик рассматриваемой полумарковской модели (формулы (4) – (5), (6) – (7), (9) – (10)), имеющие аналитическую форму двойных интегралов по мерам, задаваемым вероятностными распределениями $G_i(t)$, $B_i(x)$, $i \in \{-N_1, \dots, N_0\}$.

3. Преобразование выражений для вероятностных и стоимостных характеристик модели

Как будет ясно из дальнейшего изложения, для решения экстремальной задачи по отношению к целевому функционалу (1) целесообразно изменить порядок интегрирования в полученных выше формулах для вероятностных и стоимостных характеристик модели. В итоге указанные характеристики будут представлены в виде интегралов по мерам, задаваемым вероятностными распределениями управлений $G_i(\cdot)$, $i \in \{0, \dots, N_0\}$, а подынтегральные функции в этих интегралах будут являться известными и не зависящими от $G_i(\cdot)$, $i \in \{0, \dots, N_0\}$.

Будем использовать функции $\alpha_k(x)$, определенные ранее, и связанные с ними параметры:

$$\alpha_{ik} = \alpha_k(\tau_i) = \tau_i - \tau_k, i \in \{0, \dots, N_0\}, k \in \{-N_1, \dots, i\} \quad (11)$$

Отметим, что дальнейшие преобразования будут зависеть от соотношений между параметрами, введенными при помощи равенств (11).

Для краткости изложения последующих результатов введем также вспомогательную функцию $L_k(x, t, v)$:

$$L_k(x, t, v) = \begin{cases} 1, & \text{при } v = 1; \\ t + \mu_k, & \text{при } v = 2; k \in \{-N_1, \dots, N_0\}; \\ D_k(x, t), & \text{при } v = 3; k \in \{-N_1, \dots, N_0\}. \end{cases} \quad (12)$$

Теорема 1. Пусть

$$\begin{aligned} R_{ik}(v) = & \int_{\alpha_{i,k+1}}^{\alpha_{ik}} \left[\int_{\tau_i}^{t+\tau_{k+1}} [L_k(x, t, v)] dB_i(x) \right] dG_i(t) + \\ & + \int_{\alpha_{ik}}^{\alpha_{i+1,k+1}} \left[\int_{t+\tau_k}^{t+\tau_{k+1}} [L_k(x, t, v)] dB_i(x) \right] dG_i(t) + \int_{\alpha_{i+1,k+1}}^{\alpha_{i+1,k}} \left[\int_{t+\tau_k}^{\tau_{i+1}} [L_k(x, t, v)] dB_i(x) \right] dG_i(t), \end{aligned} \quad (13)$$

если $\alpha_{ik} < \alpha_{i+1,k+1}$, $k \in \{-N_1, \dots, i\}$, $i \in \{0, \dots, N_0\}$.

Тогда справедливы следующие формулы для основных характеристик рассматриваемой модели:

$$q_{ik} = R_{ik}(1), \quad T_{ik} = R_{ik}(2), \quad d_{ik} = R_{ik}(3), \quad k \in \{-N_1, \dots, i\}; \quad i \in \{0, \dots, N_0\}. \quad (14)$$

Доказательство. Доказательство теоремы 1 основано на использовании классической теоремы Фубини [13] и заключается в проведении аналитических преобразований двойных интегралов, выражающих основные характеристики модели (см. формулы (4), (6), (9)).

Отметим, что аналогичное утверждение имеет место также для варианта, когда выполняются другие соотношения между параметрами модели, а именно: $\alpha_{ik} > \alpha_{i+1,k+1}$, $k \in \{-N_1, \dots, i\}$, $i \in \{0, \dots, N_0\}$.

4. Аналитическое представление стационарного функционала в дробно-линейной форме

В данном разделе будет приведено утверждение об аналитическом представлении стационарного стоимостного функционала (1), являющегося критерием качества управления в рассматриваемой задаче управления запасом. Идея представления стационарного стоимостного функционала в дробно-линейном виде была сформулирована В.А. Каштановым ([3]; [4], глава 13). Здесь дополнительно получены аналитические представления функций, полностью определяющих данный функционал.

Назовем распределение $G_u^*(x)$ вырожденным и сосредоточенным в точке u , если

$$G_u^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq u; \\ 1, & x > u. \end{cases} \quad (15)$$

Теорема 2. Стационарный функционал средней удельной прибыли, определяемый равенством (1), представляет собой дробно-линейный функционал от вероятностных распределений $G_i(u_i)$, $i \in \{0, \dots, N_0\}$. Данный функционал задается аналитически следующей формулой:

$$I = I(G_0(\cdot), \dots, G_{N_0}(\cdot)) = \frac{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty A_d(u_0, \dots, u_{N_0}) dG_0(u_0) \dots dG_{N_0}(u_{N_0})}{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty B_d(u_0, \dots, u_{N_0}) dG_0(u_0) \dots dG_{N_0}(u_{N_0})}, \quad (16)$$

где подынтегральные функции числителя и знаменателя выражаются соотношениями

$$A_d(u_0, \dots, u_{N_0}) = \sum_{i=0}^{N_0} d_i(u_i) \widehat{D}^{(i)}(u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{N_0}), \quad (17)$$

$$B_d(u_0, \dots, u_{N_0}) = \sum_{i=0}^{N_0} T_i(u_i) \widehat{D}^{(i)}(u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{N_0}), \quad (18)$$

а функции

$$\begin{aligned} & \widehat{D}^{(i)}(u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{N_0}) = \\ & = (-1)^{N_0+i+2} \sum_{\alpha^{(N_0),i}} (-1)^{\delta(\alpha^{(N_0),i})} \widehat{D}_0^{(i)}(\alpha^{(N_0),i}, u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{N_0}), \end{aligned} \quad (19)$$

$\alpha^{(N_0),i} = (\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{N_0})$ — произвольная перестановка чисел $(0, \dots, i-1, i+1, \dots, N_0)$, $\delta(\alpha^{(N_0),i})$ — число инверсий в перестановке $\alpha^{(N_0),i}$,

$$\begin{aligned} & \widehat{D}_0^{(i)}(\alpha^{(N_0),i}, u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{N_0}) = \\ & = \widetilde{p}_{0,\alpha_0}(u_0) \dots \widetilde{p}_{i-1,\alpha_{i-1}}(u_{i-1}) \widetilde{p}_{i+1,\alpha_{i+1}}(u_{i+1}) \dots \widetilde{p}_{N_0,\alpha_{N_0}}(u_{N_0}), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\widetilde{p}_{k,\alpha_k}(u_k) = \begin{cases} p_{kk}(u_k) - 1, & \alpha_k = k, \\ p_{k,\alpha_k}(u_k), & \alpha_k \neq k, \end{cases} \quad k = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, N_0. \quad (21)$$

Характеристики $T_i(u_i)$ и $d_i(u_i)$ определяются выражениями (7) и (10), в которых распределение $G_i(t) = G_{i,u_i}^*(t)$ является вырожденным и сосредоточено в точке $t = u_i$, $i \in \{0, \dots, N_0\}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 необходимо получить представления входящих в (1) стационарных вероятностей π_i , $i \in \{0, \dots, N_0\}$, цепи Маркова, вложенной в сопровождающий полумарковский процесс, в виде функционалов от управляющих вероятностных распределений. Составим и решим систему алгебраических уравнений относительно стационарных вероятностей π_i , $i \in \{0, \dots, N_0\}$. Отметим, что вероятности перехода вложенной цепи Маркова могут быть представлены в виде

$$p_{ij} = \int_0^\infty p_{ij}(u_i) dG_i(u_i), \quad i, j \in \{0, \dots, N_0\}, \quad (22)$$

где функции $p_{ij}(u_i)$ представляют собой переходные вероятности данной цепи Маркова, определяемые при условии, что в состоянии i принято решение об управлении $u = u_i$. В то же время, из соотношения (5) следует, что

$$p_{ij}(u_i) = \sum_{k=-N_1}^i q_{ik}(u_i) \beta_{kj}, \quad (23)$$

где функции $q_{ik}(u_i)$, $k \in \{-N_1, \dots, i\}$, определяются на основе утверждения теоремы 1 при $v = 1$ и вырожденном вероятностном распределении $G_i(t) = G_{i,u_i}^*(t)$, сосредоточенном в точке $t = u_i$. Воспользовавшись формулой (22) и свойствами интегралов на произведении пространств ([13], глава 7, §36), получим представления для стационарных вероятностей:

$$\pi_i = \frac{1}{D} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \hat{D}^{(i)}(u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{N_0}) \prod_{j=0, i \neq j}^{N_0} dG_j(u_j), \quad (24)$$

где D – определитель матрицы системы линейных уравнений относительно стационарных вероятностей, а функции $\hat{D}^{(i)}(u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{N_0})$ определяются формулами (19) – (21).

Величины d_i , T_i , $i \in \{0, \dots, N_0\}$, входящие в выражение для функционала (1), также могут быть представлены в интегральной форме:

$$T_i = \int_0^\infty T_i(u_i) dG_i(u_i); \quad (25)$$

$$d_i = \int_0^\infty d_i(u_i) dG_i(u_i), \quad (26)$$

где функции $T_i(u_i)$, $d_i(u_i)$ определяются формулами (7) и (10) соответственно, в которых вероятностное распределение $G_i(t) = G_{i,u_i}^*(t)$ является вырожденным и сосредоточено в точке $t = u_i$. Подставляя формулы (24), (25), (26) в выражения для числителя и знаменателя функционала (1), получаем утверждение теоремы.

Замечание 2. Утверждение теоремы 2 выполняется для любых стационарных стоимостных функционалов вида (1), определенных на полумарковских процессах с конечным множеством состояний. Данный результат может быть использован для решения задачи управления такими процессами.

5. Экстремальная задача для дробно-линейного функционала и решение задачи оптимального управления полумарковским процессом

Согласно теореме 2 стационарный стоимостной функционал (1) представим в дробно-линейной форме (16), явно выражающей его зависимость от управляющих вероятностных распределений $G_0(t), \dots, G_{N_0}(t)$. Задача оптимального управления

принимает вид экстремальной задачи для дробно-линейного функционала. Изложим общую схему ее решения.

Исследование задачи нахождения безусловного экстремума для дробно-линейных функционалов было проведено в работе [4, глава 10]. Отметим, что полученные в указанной работе результаты могут быть обобщены и усилены. Именно, если основная функция соответствующего функционала:

$$C_d(u_0, \dots, u_{N_0}) = \frac{A_d(u_0, \dots, u_{N_0})}{B_d(u_0, \dots, u_{N_0})} \quad (27)$$

достигает своего глобального экстремума на множестве $U^{(N_0)} = \{(u_0, \dots, u_{N_0}), u_i \in [0, \infty), i \in \{0, \dots, N_0\}\}$ в некоторой фиксированной точке $u_* = (u_{0*}, \dots, u_{N_0*})$, то экстремум функционала $I(G_0(\cdot), \dots, G_{N_0}(\cdot))$ существует и достигается на вырожденных распределениях вида (15), сосредоточенных в указанных точках $(u_{0*}, \dots, u_{N_0*})$.

Утверждение теоремы 2 позволяет получить явное аналитическое представление для основной функции (27) дробно-линейного функционала (1). Таким образом, задача оптимального управления запасом в рассматриваемой модели сводится к поиску экстремума явно заданной функции $C_d(u_0, \dots, u_{N_0})$, зависящей от конечного числа вещественных переменных. При заданных конкретных характеристиках модели эта задача может быть решена при помощи численных методов.

Список литературы

1. Шнурков П. В., Мельников Р. В., Оптимальное управление запасом непрерывного продукта в модели регенерации. *Обозр. прикл. и промышл. матем.* (2006) **3**, 434–452.
2. Шнурков П. В., Мельников Р. В., Исследование проблемы управления запасом непрерывного продукта при детерминированной задержке поставки. *Автоматика и телемеханика* (2008) **10**, 93–113.
3. Каштанов В. А., Об одном классе оптимальных дискретных управлений полумарковским процессом. *Труды МИЭМ. Некоторые теор. и прикл. вопросы теории вероятностей* (1975) **44**, 67–76.
4. *Вопросы математической теории надежности* (Б. В. Гнеденко, ред.). Изд-во Радио и связь, Москва, 1983.
5. Porteus E. L., *Foundations of Stochastic Inventory Theory*. Stanford University Press, 2002.
6. Vega-Amaya O., Luque-Vasquez F., Sample-path average cost optimality for semi-Markov control processes on Borel spaces: unbounded costs and mean holding times. *Applicationes Mathematicae* (2000) **27**, №3, 343–367.
7. Luque-Vasquez F., Hernandez-Lerma O., Semi-Markov control models with average costs. *Applicationes Mathematicae* (1999) **26**, №3, 315–331.
8. Klabjan D., Adelman D., Existence of optimal policies for semi-Markov decision processes using duality for infinite linear programming. *SIAM J. Control and Optimiz.* (2006) **44**, №6, 2104–2122.
9. Демченко С.С., Кнюпов П.С., Чорней Р.К., Оптимальные стратегии для полумарковской системы запасов. *Кибернетика и системный анализ* (2002), № 1 146–160.
10. Лотоцкий В. А., Мандель А. С., *Модели и методы управления запасами*. Наука, Москва, 1991.

11. Рыжиков Ю. И., *Теория очередей и управление запасами*. Питер, Санкт-Петербург, 2001.
12. Джевелл В., Управляемые полумарковские процессы. *Кибернетический сборник. Новая серия* (1967) 4, 97–134.
13. Халмош П., *Теория меры*. Издательство иностранной литературы, Москва, 1953.

Статья поступила 05.06.2012.