Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Функциональные предельные теоремы для высокоуровневых докритических ветвящихся процессов в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 2, 6–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:37:24

Функциональные предельные теоремы для высокоуровневых докритических ветвящихся процессов в случайной среде

© 2014 г. В. И. Афанасьев*

Рассматривается докритический ветвящийся процесс в случайной среде. Предполагается, что производящая функция моментов шага сопровождающего случайного блуждания принимает значение 1 при некотором положительном значении аргумента. Установлены функциональные предельные теоремы для численностей различных поколений и для времен достижения различных уровней.

Ключевые слова: ветвящийся процесс в случайной среде, достижение высокого уровня, условные предельные теоремы.

1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ – ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС), задаваемый последовательностью независимых одинаково распределенных (случайных) производящих функций $\{f_n(s), n \in \mathbb{N}\}$. Определение этого процесса можно найти в [1]. Отметим, что ξ_n – численность n -го поколения (считаем, что $\xi_0 = 1$). Производящая функция $f_n(s), s \in [0, 1]$, определяет закон размножения частиц в $(n - 1)$ -м поколении, $n \in \mathbb{N}$.

Положим при $i \in \mathbb{N}$

$$X_i = \ln f'_i(1), \quad \eta_i = \frac{f''_i(1)}{(f'_i(1))^2}$$

(при этом считаем, что $0 < f'_1(1) < +\infty$ п.н.). Заметим, что случайные векторы $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$ являются независимыми и одинаково распределенными. Введем сопровождающее случайное блуждание:

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Всюду в дальнейшем полагаем, что распределение случайной величины X_1 является неарифметическим.

Предположим, что процесс $\{\xi_n\}$ является докритическим, т.е. $\mathbf{E}X_1 < 0$, и существует такое положительное число $\varkappa$, что

$$\mathbf{E} \exp(\varkappa X_1) = 1, \quad \mathbf{E}(|X_1| \exp(\varkappa X_1)) < +\infty. \quad (1)$$

*Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
e-mail: viafan@mi.ras.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 11-01-00139.

Условие (1) касается случайного блуждания $\{S_n\}$, которое в случае докритического ВПСС имеет отрицательный снос. Это условие является классическим для случайных блужданий с отрицательным сносом и позволяет осуществить переход к сопряженному случайному блужданию с положительным сносом.

Кроме того, предположим, что

$$\mathbf{E}(\xi_1 \ln(\xi_1 + 1) \exp((\varkappa - 1)X_1)) < +\infty, \quad (2)$$

а при $\varkappa \geq 1$ существует такое число $p > \varkappa$, что

$$\mathbf{E}(\xi_1^p \exp((\varkappa - p)X_1)) < +\infty. \quad (3)$$

Для процесса $\{\xi_n\}$ введем *момент первого достижения уровня $x > 1$* :

$$T_x = \min \{n : \xi_n > x\},$$

и *время жизни*:

$$T = \min \{n : \xi_n = 0\}.$$

В [2] установлено, что если процесс $\{\xi_n\}$ является докритическим и выполнены условия (1)–(3), то при $x \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{P}(T_x < +\infty) \sim c_0 x^{-\varkappa},$$

где c_0 – положительная постоянная. Положим

$$a = \mathbf{E}(X_1 \exp(\varkappa X_1)).$$

В [3] установлены *законы больших чисел* для случайных величин T_x и T . Оказывается, если выполнены условия (1)–(3), то при $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{T_x}{\ln x} \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{1}{a};$$

если, к тому же, $\mathbf{E}(\ln^+ \eta_1)^{1+\delta} < +\infty$ при некотором $\delta > 0$, то

$$\left\{ \frac{T}{\ln x} \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{1}{a} - \frac{1}{\mathbf{E}X_1}.$$

В добавление к условиям (1)–(3) предположим, что

$$\mathbf{E}(X_1^2 \exp(\varkappa X_1)) < +\infty. \quad (4)$$

Положим $\sigma^2 = \mathbf{E}(X_1^2 \exp(\varkappa X_1)) - a^2$. Очевидно, что $0 < \sigma^2 < +\infty$.

Пусть $B = \{B(t), t \in [0, 1]\}$ – стандартное броуновское движение. В настоящей работе устанавливается *функциональная предельная теорема* для времен достижения различных уровней.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ – докритический ветвящийся процесс в случайной среде и выполнены условия (1)–(4). Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{T_{x^t} - t \ln x/a}{\sigma a^{-3/2} \sqrt{\ln x}}, t \in [0, 1] \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} B,$$

где символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода.

Кроме того, устанавливается *функциональная предельная теорема* для численностей различных поколений.

Теорема 2. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ – докритический ветвящийся процесс в случайной среде и выполнены условия (1)–(4). Тогда при $y \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{\ln \xi_{\lfloor ty/a \rfloor} - ty}{\sigma \sqrt{y/a}}, t \in [0, 1] \mid T_{\exp y} < +\infty \right\} \xrightarrow{D} B.$$

Отметим, что в теореме 2 переменная t принадлежит промежутку $[0, 1]$, а не отрезку $[0, 1]$. Сходимость в этой теореме следует понимать как сходимость по распределению в пространстве $D[0, u]$ для произвольного фиксированного $u \in (0, 1)$.

Соответствующие результаты для критического ветвящегося процесса в случайной среде установлены в работах [4]–[6].

2. Предположим, что выполнены условия (1)–(3). Изложим некоторые *вспомогательные результаты*, полученные в [2]. Обозначим Δ совокупность всех вероятностных мер на множестве целых неотрицательных чисел. Введем на Δ метрику полной вариации, относительно которой Δ является полным сепарабельным метрическим пространством. Пусть производящей функции $f_n(s)$ соответствует вероятностная мера Q_n .

Перейдем к новой вероятностной мере $\tilde{\mathbf{P}}$ и соответствующему ей математическому ожиданию $\tilde{\mathbf{E}}$, полагая для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой измеримой ограниченной числовой функции g , заданной на множестве $\Delta^n \times \mathbb{N}_0^n$,

$$\tilde{\mathbf{E}}g(Q_1, \dots, Q_n; \xi_1, \dots, \xi_n) = \mathbf{E}(\exp(\varkappa S_n) g(Q_1, \dots, Q_n; \xi_1, \dots, \xi_n)). \quad (5)$$

Относительно этой меры последовательность $\{\xi_n\}$ является надкритическим ВПСС, при этом в качестве среды следует рассматривать $\{Q_n\}$. Отметим, что $\tilde{\mathbf{E}}X_1 = a$.

Последовательность $\{\xi_n / \exp(S_n)\}$, рассматриваемая при фиксированной случайной среде, является неотрицательным мартингалом, поэтому $\tilde{\mathbf{P}}$ -п.н. существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n}{\exp(S_n)} = W < +\infty. \quad (6)$$

Введем случайные события

$$D = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = +\infty \right\}, \quad D^* = \{W > 0\}, \quad G_k = \{\xi_k > 0\}, \quad D_x = \{T_x < +\infty\},$$

$$D_{x,k} = D \cap D_x \cap \left\{ T_x > k, \sup_{n: n > k} \left| \frac{\exp(S_n)}{\xi_n} - \frac{\exp(S_k)}{\xi_k} \right| \leq \varepsilon \frac{\exp(S_k)}{\xi_k} \right\},$$

где $k \in \mathbb{N}$, а $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Оказывается, $\tilde{\mathbf{P}}(D) > 0$, $\tilde{\mathbf{P}}(D \triangle D^*) = 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(D \triangle D_x) = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{P}}(D \triangle G_k) = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(D_x \triangle D_{x,k}) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(G_k \triangle D_{x,k}) = 0. \quad (10)$$

Отметим также, что семейство случайных величин $\{(\xi_{T_x}/\exp(S_{T_x}))^\varkappa, x > 1\}$ равномерно интегрируемо относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$ (полагаем $\xi_{T_x}/\exp(S_{T_x}) = W$ при $T_x = +\infty$).

3. Приступим к *доказательству теоремы 1*. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ введем случайное блуждание

$$S_n^{(k)} = S_{n+k} - S_k, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Положим при $y > 0$

$$\mathcal{T}_y^{(k)} = \min \left\{ n : S_n^{(k)} > y \right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Если событие $D_{x,k}$ произошло, то при всех $n > k$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \frac{\xi_k}{\exp S_k} \leq \frac{\xi_n}{\exp S_n} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\xi_k}{\exp S_k}$$

и, следовательно,

$$S_{n-k}^{(k)} + \beta_1 \leq \ln \xi_n \leq S_{n-k}^{(k)} + \beta_2, \quad (11)$$

где

$$\beta_1 = \ln \xi_k - \ln(1+\varepsilon), \quad \beta_2 = \ln \xi_k - \ln(1-\varepsilon).$$

Это означает, что если событие $D_{x,k}$ произошло и, к тому же, $T_{x^t} > k$ и $\ln x > \beta_2$, то

$$\mathcal{T}_{\ln x - \beta_2}^{(k)} + k \leq T_{x^t} \leq \mathcal{T}_{\ln x - \beta_1}^{(k)} + k. \quad (12)$$

В частности, соотношение (12) справедливо при всех $t \in [t_x, 1]$, где $t_x = \ln(\sup_{i \leq k} \xi_i) / \ln x$, если при некотором фиксированном $\alpha \in (0, 1]$ произошло случайное событие

$$D_{x,k}^{(\alpha)} := D_{x,k} \cap \left\{ \frac{\ln(\sup_{i \leq k} \xi_i)}{\ln x} < \alpha, 2\xi_k < x \right\}.$$

Очевидно, при $\alpha \in (0, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(D_{x,k} \triangle D_{x,k}^{(\alpha)} \right) = 0. \quad (13)$$

Заметим (см. (5)), что

$$\tilde{\mathbf{E}} X_1^2 = \mathbf{E} (X_1^2 \exp(\varkappa X_1)), \quad \tilde{\mathbf{E}} (X_1 - a)^2 = \sigma^2.$$

Положим $\mathcal{T}_0 = 0$ и $\mathcal{T}_y = \mathcal{T}_y^{(0)}$ при $y > 0$. Построенный по случайному блужданию $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ с положительным сносом a процесс $\{\mathcal{T}_y, y \geq 0\}$ называется, как известно, процессом восстановления. При этом дисперсия σ^2 одного шага случайного блуждания $\{S_n\}$ конечна и положительна.

Для произвольного $y > 0$ введем случайный процесс Z_y :

$$Z_y(t) = \frac{\mathcal{T}_{ty} - ty/a}{\sigma a^{-3/2} \sqrt{y}}, \quad t \geq 0.$$

Для процессов восстановления справедлива следующая функциональная предельная теорема (см. теорему 3.1 из [7]): при $y \rightarrow \infty$

$$\{Z_y(t), t \in [0, 1]\} \xrightarrow{\tilde{D}} B \quad (14)$$

(символ $\sim$ над D означает, что на исходном вероятностном пространстве вместо меры $\mathbf{P}$ рассматривается мера $\tilde{\mathbf{P}}$).

Для произвольного $y > 0$ введем случайную величину

$$\chi(y) = S_{\tau_y} - y,$$

которая называется перескоком блуждания $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ через уровень y . Известно, что при $y \rightarrow +\infty$

$$\chi(y) \xrightarrow{\tilde{D}} \chi, \quad (15)$$

где χ – некоторая положительная случайная величина с абсолютно непрерывным распределением.

В добавление к предельным теоремам (14) и (15) можно сказать (см. теорему 8.34 из [8]), что случайная величина $\chi(y)$ и случайный процесс $\{Z_y(t), t \in [0, 1]\}$ асимптотически независимы при $y \rightarrow +\infty$. При этом будем считать, что случайные элементы B и χ определены на одном и том же вероятностном пространстве с мерой $\tilde{\mathbf{P}}$ и независимы.

Для $x \in D[0, 1]$ введем модуль непрерывности

$$w_x(\delta) = \sup_{t, s: |t-s| \leq \delta} |x(t) - x(s)|, \quad \delta > 0.$$

При фиксированном $\delta > 0$ отображение $f: x \rightarrow w_x(\delta)$, $x \in D[0, 1]$, является непрерывным при $x \in C[0, 1]$. Следовательно, отображение f непрерывно на почти всех броуновских траекториях. Поэтому из соотношения (14) следует, что при $y \rightarrow +\infty$

$$w_{Z_y}(\delta) \xrightarrow{\tilde{D}} w_B(\delta). \quad (16)$$

Ввиду непрерывности броуновских траекторий почти наверное

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w_B(\delta) = 0. \quad (17)$$

Для произвольных $b \in \mathbb{R}$ и $y > 0$ введем случайный процесс $Z_y^{(b)}$:

$$Z_y^{(b)}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq ty \leq b; \\ \frac{\tau_{ty-b} - ty/a}{\sigma a^{-3/2} \sqrt{y}}, & b < ty \leq 1+b; \\ \frac{\tau_y - y/a}{\sigma a^{-3/2} \sqrt{y}}, & 1+b < ty \leq y. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\sup_{t \in [0, 1]} |Z_y^{(b)}(t) - Z_y(t)| \leq w_{Z_y} \left(\frac{|b|}{y} \right).$$

Откуда, учитывая соотношения (16)-(17), находим, что при $y \rightarrow +\infty$

$$\sup_{t \in [0, 1]} |Z_y^{(b)}(t) - Z_y(t)| \xrightarrow{\tilde{\mathbf{P}}} 0. \quad (18)$$

Ввиду соотношений (14) и (18) при $y \rightarrow +\infty$

$$\{Z_y^{(b)}(t), t \in [0, 1]\} \xrightarrow{\tilde{D}} B, \quad (19)$$

причем левые части соотношений (15) и (19) асимптотически независимы.

Для произвольного $x > 1$ введем случайный процесс Y_x :

$$Y_x(t) = \frac{T_{x^t} - t \ln x / a}{\sigma a^{-3/2} \sqrt{\ln x}}, \quad t \geq 0,$$

и случайные величины

$$\varphi_x = \frac{\xi_{T_x}}{x}, \quad \psi_x = \frac{\xi_{T_x}}{S_{T_x}}.$$

Заметим, что $\varphi_x > 1$, если произошло событие D_x . Введем случайную величину $\widehat{W}$, распределенную так же, как $\{W \mid W > 0\}$. Будем считать, что случайная величина $\widehat{W}$ определена на том же вероятностном пространстве, что B и χ , и все эти три случайных элемента независимы.

Покажем, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\{Y_x(t), t \in [0, 1] \mid D_x\} \xrightarrow{\tilde{D}} B, \quad (20)$$

$$\{\varphi_x \mid D_x\} \xrightarrow{\tilde{D}} e^\chi, \quad (21)$$

$$\{\psi_x \mid D_x\} \xrightarrow{\tilde{D}} \widehat{W}, \quad (22)$$

причем левые части соотношений (20)-(22) асимптотически независимы.

Сначала установим (20). Введем для произвольных $k \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{R}$ случайный процесс $Z_y^{(k,b)}$:

$$Z_y^{(k,b)}(t) = \begin{cases} \frac{k}{\sigma a^{-3/2} \sqrt{y}}, & 0 \leq ty \leq b; \\ \frac{T_{ty-b}^{(k)} - ty/a + k}{\sigma a^{-3/2} \sqrt{y}}, & b < ty \leq 1 + b; \\ \frac{T_y^{(k)} - y/a + k}{\sigma a^{-3/2} \sqrt{y}}, & 1 + b < ty \leq y. \end{cases}$$

Из соотношения (12) вытекает, что если событие $D_{x,k}^{(\alpha)}$ произошло, то при $t \in [t_x, 1]$, где $t_x = \ln(\sup_{i \leq k} \xi_i) / \ln x < \alpha$,

$$Z_y^{(k,\beta_2)}(t) \leq Y_x(t) \leq Z_y^{(k,\beta_1)}(t), \quad (23)$$

где $y = \ln x$. В силу соотношения (23) для произвольных моментов времени $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$ и чисел $x_1, x_2, \dots, x_m$, где $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{P}} \left(Z_y^{(k,\beta_1)}(t_1) \leq x_1, \dots, Z_y^{(k,\beta_1)}(t_m) \leq x_m, D_{x,k}^{(t_1)} \right) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbf{P}} \left(Y_x(t_1) \leq x_1, \dots, Y_x(t_m) \leq x_m, D_{x,k}^{(t_1)} \right) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbf{P}} \left(Z_y^{(k,\beta_2)}(t_1) \leq x_1, \dots, Z_y^{(k,\beta_2)}(t_m) \leq x_m, D_{x,k}^{(t_1)} \right). \end{aligned}$$

Откуда, учитывая, что $D_{x,k}^{(t_1)} \subset G_k$, находим, что

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{P}} \left(Z_y^{(k,\beta_1)}(t_1) \leq x_1, \dots, Z_y^{(k,\beta_1)}(t_m) \leq x_m, G_k \right) - \tilde{\mathbf{P}} \left(G_k \triangle D_{x,k}^{(t_1)} \right) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbf{P}} \left(Y_x(t_1) \leq x_1, \dots, Y_x(t_m) \leq x_m, D_{x,k}^{(t_1)} \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \tilde{\mathbf{P}} \left(Z_y^{(k,\beta_2)}(t_1) \leq x_1, \dots, Z_y^{(k,\beta_2)}(t_m) \leq x_m, G_k \right). \quad (24)$$

Покажем, что при $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(Z_y^{(k,\beta_i)}(t_1) \leq x_1, \dots, Z_y^{(k,\beta_i)}(t_m) \leq x_m, G_k \right) = \\ = \hat{\mathbf{P}}(B(t_1) \leq x_1, \dots, B(t_m) \leq x_m) \tilde{\mathbf{P}}(G_k). \end{aligned} \quad (25)$$

Обозначим $\tilde{\mathbf{P}}_k$ и $\tilde{\mathbf{E}}_k$ условную вероятность и условное математическое ожидание относительно σ -алгебры $\sigma_k := \sigma(Q_1, \dots, Q_k, \xi_1, \dots, \xi_k)$ (при этом на исходном вероятностном пространстве вместо меры $\mathbf{P}$ рассматривается мера $\tilde{\mathbf{P}}$). Тогда, учитывая независимость процесса $\{Z_y^{(k,b)}(t), t \in [0, 1]\}$ при фиксированном b от σ_k , видим, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}} \left(Z_y^{(k,\beta_i)}(t_1) \leq x_1, \dots, Z_y^{(k,\beta_i)}(t_m) \leq x_m, G_k \right) = \\ = \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}}_k \left(Z_y^{(k,\beta_i)}(t_1) \leq x_1, \dots, Z_y^{(k,\beta_i)}(t_m) \leq x_m \right); G_k \right) = \\ = \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}}_k \left(Z_y^{(k,b_i)}(t_1) \leq x_1, \dots, Z_y^{(k,b_i)}(t_m) \leq x_m \right) \Big|_{b_i=\beta_i}; G_k \right) = \\ = \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}} \left(Z_y^{(b_i)}(t_1) + \frac{ka^{3/2}}{\sigma\sqrt{y}} \leq x_1, \dots, Z_y^{(b_i)}(t_m) + \frac{ka^{3/2}}{\sigma\sqrt{y}} \leq x_m \right) \Big|_{b_i=\beta_i}; G_k \right) \end{aligned}$$

(каждая из двух последних вероятностей вычисляется при фиксированном b_i , а затем в полученное выражение вместо b_i подставляется β_i). Применяя к этому соотношению утверждение (19), на основании теоремы о мажорируемой сходимости получаем (25).

Теперь перейдем к пределу в соотношении (24) сначала при $x \rightarrow +\infty$, а затем при $k \rightarrow \infty$. Отметим (см. (7) и (8)), что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(D_x) = \tilde{\mathbf{P}}(D), \quad (26)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(G_k) = \mathbf{P}(D). \quad (27)$$

Из соотношений (10), (25) и (27) находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(Y_x(t_1) \leq x_1, \dots, Y_x(t_m) \leq x_m, D_{x,k}^{(t_1)} \right) = \\ = \hat{\mathbf{P}}(B(t_1) \leq x_1, \dots, B(t_m) \leq x_m) \tilde{\mathbf{P}}(D). \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку $D_{x,k}^{(t_1)} \subset D_{x,k} \subset D_x$, то

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}} \left(Y_x(t_1) \leq x_1, \dots, Y_x(t_m) \leq x_m, D_{x,k}^{(t_1)} \right) &\leq \\ &\leq \tilde{\mathbf{P}} \left(Y_x(t_1) \leq x_1, \dots, Y_x(t_m) \leq x_m, D_x \right) \leq \\ &\leq \tilde{\mathbf{P}} \left(Y_x(t_1) \leq x_1, \dots, Y_x(t_m) \leq x_m, D_{x,k}^{(t_1)} \right) + \\ &+ \tilde{\mathbf{P}}(D_x \triangle D_{x,k}) + \tilde{\mathbf{P}}(D_{x,k} \triangle D_{x,k}^{(t_1)}). \end{aligned}$$

Откуда, переходя к пределу при $x \rightarrow +\infty$, а затем при $k \rightarrow \infty$ и применяя соотношения (9), (13) и (28), видим, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(Y_x(t_1) \leq x_1, \dots, Y_x(t_m) \leq x_m, D_x) = \\ = \hat{\mathbf{P}}(B(t_1) \leq x_1, \dots, B(t_m) \leq x_m) \tilde{\mathbf{P}}(D). \end{aligned}$$

Учитывая теперь (26), получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(Y_x(t_1) \leq x_1, \dots, Y_x(t_m) \leq x_m \mid D_x) = \\ = \hat{\mathbf{P}}(B(t_1) \leq x_1, \dots, B(t_m) \leq x_m). \end{aligned}$$

Итак, сходимость конечномерных распределений в (20) установлена.

Покажем, что для произвольного $\varepsilon' > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}\left(w_{Y_x}(\delta) \geq \varepsilon'; D_{x,k}^{(1)}\right) = 0. \quad (29)$$

Нетрудно заметить, что если $x_1, x_2, x_3 \in D[0, 1]$ и $x_1(t) \leq x_2(t) \leq x_3(t)$ при всех $t \in [t_0, 1]$, где $t_0 \in (0, 1)$, то при всех $\delta > 0$

$$w_{x_2}(\delta) \leq 2 \sup_{t \in [0, t_0]} |x_2(t)| + w_{x_1}(\delta) + \sup_{t \in [0, 1]} |x_3(t) - x_1(t)|. \quad (30)$$

Откуда с учетом (23) находим, что если событие $D_{x,k}^{(1)}$ произошло, то при $t_x = \ln(\sup_{i \leq k} \xi_i) / \ln x$

$$w_{Y_x}(\delta) \leq 2 \sup_{t \in [0, t_x]} |Y_x(t)| + w_{Z_y^{(k, \beta_1)}}(\delta) + \sup_{t \in [0, 1]} \left| Z_y^{(k, \beta_2)}(t) - Z_y^{(k, \beta_1)}(t) \right|,$$

где $y = \ln x$. Это означает, что для справедливости (29) достаточно показать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}\left(2 \sup_{t \in [0, t_x]} |Y_x(t)| \geq \frac{\varepsilon'}{3}\right) = 0, \quad (31)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}\left(w_{Z_y^{(k, \beta_1)}}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{3}; D_{x,k}\right) = 0, \quad (32)$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}\left(\sup_{t \in [0, 1]} \left| Z_y^{(k, \beta_2)}(t) - Z_y^{(k, \beta_1)}(t) \right| \geq \frac{\varepsilon'}{3}; D_{x,k}\right) = 0 \quad (33)$$

(здесь учтено, что $D_{x,k}^{(1)} \subset D_{x,k}$).

Заметим, что если $t < t_x$, то $t \ln x < \ln(\sup_{i \leq k} \xi_i)$ и, значит, $T_{x^t} \leq k$, поэтому

$$\sup_{t \in [0, t_x]} |Y_x(t)| \leq \frac{k + \ln(\sup_{i \leq k} \xi_i)}{\sigma a^{-3/2} \sqrt{\ln x}},$$

откуда следует (31).

Теперь установим (32). Поскольку $D_{x,k} \subset G_k$, то

$$\tilde{\mathbf{P}}\left(w_{Z_y^{(k, \beta_1)}}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{3}; D_{x,k}\right) \leq \tilde{\mathbf{P}}\left(w_{Z_y^{(k, \beta_1)}}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{3}; G_k\right) + \tilde{\mathbf{P}}(G_k \setminus D_{x,k}). \quad (34)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{P}} \left(w_{Z_y^{(k, \beta_1)}}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{3}; G_k \right) &= \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}}_k \left(w_{Z_y^{(k, \beta_1)}}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{3} \right); G_k \right) = \\
 &= \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}}_k \left(w_{Z_y^{(k, b_1)}}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{3} \right) \Big|_{b_1=\beta_1}; G_k \right) = \\
 &= \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}} \left(w_{Z_y^{(b_1)}}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{3} \right) \Big|_{b_1=\beta_1}; G_k \right). \tag{35}
 \end{aligned}$$

Из соотношения (19) вытекает, что при $y \rightarrow +\infty$

$$w_{Z_y^{(b_1)}}(\delta) \xrightarrow{\tilde{D}} w_B(\delta). \tag{36}$$

Из соотношений (35), (36) по теореме о мажорируемой сходимости следует, что

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(w_{Z_y^{(k, \beta_1)}}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{3}; G_k \right) = \hat{\mathbf{P}} \left(w_B(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{3} \right) \tilde{\mathbf{P}}(G_k)$$

при всех $\varepsilon' > 0$ за исключением не более чем счетного множества. Откуда, учитывая (17), находим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(w_{Z_y^{(k, \beta_1)}}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{3}; G_k \right) = 0. \tag{37}$$

Переходя в (34) к пределу при $x \rightarrow +\infty$, а затем при $k \rightarrow \infty$ и применяя соотношения (10) и (37), получаем (32).

Наконец, установим (33). Поскольку $D_{x,k} \subset G_k$, то

$$\begin{aligned}
 &\tilde{\mathbf{P}} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| Z_y^{(k, \beta_2)}(t) - Z_y^{(k, \beta_1)}(t) \right| \geq \frac{\varepsilon'}{3}; D_{x,k} \right) \leq \\
 &\leq \tilde{\mathbf{P}} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| Z_y^{(k, \beta_2)}(t) - Z_y^{(k, \beta_1)}(t) \right| \geq \frac{\varepsilon'}{3}; G_k \right) + \tilde{\mathbf{P}}(G_k \setminus D_{x,k}). \tag{38}
 \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
 &\tilde{\mathbf{P}} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| Z_y^{(k, \beta_2)}(t) - Z_y^{(k, \beta_1)}(t) \right| \geq \frac{\varepsilon'}{3}; G_k \right) = \\
 &= \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}}_k \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| Z_y^{(k, \beta_2)}(t) - Z_y^{(k, \beta_1)}(t) \right| \geq \frac{\varepsilon'}{3} \right); G_k \right) = \\
 &= \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}}_k \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| Z_y^{(k, b_2)}(t) - Z_y^{(k, b_1)}(t) \right| \geq \frac{\varepsilon'}{3} \right) \Big|_{b_1=\beta_1, b_2=\beta_2}; G_k \right) = \\
 &= \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| Z_y^{(b_2)}(t) - Z_y^{(b_1)}(t) \right| \geq \frac{\varepsilon'}{3} \right) \Big|_{b_1=\beta_1, b_2=\beta_2}; G_k \right).
 \end{aligned}$$

Применяя к последнему соотношению утверждение (18), находим по теореме о мажорируемой сходимости

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| Z_y^{(k,\beta_2)}(t) - Z_y^{(k,\beta_1)}(t) \right| \geq \frac{\varepsilon'}{3}; G_k \right) = 0. \quad (39)$$

Переходя в (38) к пределу при $x \rightarrow +\infty$, а затем при $k \rightarrow \infty$ и применяя соотношения (10) и (39), получаем (33).

Итак, соотношение (29) доказано. Поскольку $D_{x,k}^{(1)} \subset D_{x,k} \subset D_x$, то

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{P}}(w_{Y_x}(\delta) \geq \varepsilon'; D_x) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbf{P}}(w_{Y_x}(\delta) \geq \varepsilon'; D_{x,k}^{(1)}) + \tilde{\mathbf{P}}(D_x \triangle D_{x,k}) + \tilde{\mathbf{P}}(D_{x,k} \triangle D_{x,k}^{(1)}). \end{aligned}$$

Откуда, переходя к пределу при $x \rightarrow +\infty$, а затем при $k \rightarrow \infty$ и учитывая (9), (13), (29) и (26), получаем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(w_{Y_x}(\delta) \geq \varepsilon' \mid D_x) = 0.$$

Это утверждение вместе со сходимостью конечномерных распределений означает справедливость соотношения (20).

Перейдем к доказательству (21) и (22), объединив их в одно соотношение:

$$\{\varphi_x, \psi_x \mid D_x\} \xrightarrow{\tilde{D}} (e^x, \widehat{W}). \quad (40)$$

Заметим, что при $u > 1$, $z > 0$ и $l > k$

$$\begin{aligned} & \{\varphi_x > u, \psi_x \leq z, T_x = l, D_{x,k}\} = \\ & = \left\{ \xi_{k+1} \leq x, \dots, \xi_{l-1} \leq x, \xi_l > xu, \frac{\xi_l}{e^{S_l}} \leq z, D_{x,k} \right\} = \\ & = \left\{ e^{S_{k+1}} \leq x \frac{e^{S_{k+1}}}{\xi_{k+1}}, \dots, e^{S_{l-1}} \leq x \frac{e^{S_{l-1}}}{\xi_{l-1}}, e^{S_l} > xu \frac{e^{S_l}}{\xi_l}, \frac{e^{S_l}}{\xi_l} \geq \frac{1}{z}, D_{x,k} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Положим

$$L = \frac{(1-\varepsilon)x}{\xi_k}, \quad M = \frac{(1+\varepsilon)x}{\xi_k}.$$

Событие (41) при $u > (1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ влечет (см. определение $D_{x,k}$) событие

$$\begin{aligned} & \left\{ e^{S_{k+1}} \leq M e^{S_k}, \dots, e^{S_{l-1}} \leq M e^{S_k}, e^{S_l} > u L e^{S_k}, M e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, D_{x,k} \right\} = \\ & = \left\{ S_1^{(k)} \leq \ln M, \dots, S_{l-1-k}^{(k)} \leq \ln M, S_{l-k}^{(k)} > \ln(uL), M e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, D_{x,k} \right\} = \\ & = \left\{ \chi^{(k)}(y - \beta_1) > v + \ln \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \mathcal{T}_{y-\beta_1}^{(k)} = l - k, M e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, D_{x,k} \right\}, \end{aligned}$$

где $v = \ln u$, $y = \ln x$, а $\chi^{(k)}(y)$ – перескок блуждания $\{S_n^{(k)}, n \in \mathbb{N}_0\}$ через уровень $y > 0$. Следовательно,

$$\{\varphi_x > u, \psi_x \leq z, D_{x,k}\} \subset \left\{ \chi^{(k)}(y - \beta_1) > v + \ln \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, M e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, D_{x,k} \right\}. \quad (42)$$

С другой стороны, событие (41) вытекает из события

$$\begin{aligned} & \left\{ e^{S_{k+1}} \leq L e^{S_k}, \dots, e^{S_{l-1}} \leq L e^{S_k}, e^{S_l} > u M e^{S_k}, L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, D_{x,k} \right\} = \\ & = \left\{ S_1^{(k)} \leq \ln L, \dots, S_{l-1-k}^{(k)} \leq \ln L, S_{l-k}^{(k)} > \ln(uM), L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, D_{x,k} \right\} = \\ & = \left\{ \chi^{(k)}(y - \beta_2) > v + \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, \mathcal{T}_{y-\beta_2}^{(k)} = l - k, L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, D_{x,k} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\{\varphi_x > u, \psi_x \leq z, D_{x,k}\} \supset \left\{ \chi^{(k)}(y - \beta_2) > v + \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, D_{x,k} \right\}. \quad (43)$$

Из соотношений (42), (43) видно, что

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{P}} \left(\chi^{(k)}(y - \beta_2) > v + \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, D_{x,k} \right) \\ & \leq \tilde{\mathbf{P}}(\varphi_x > u, \psi_x \leq z, D_{x,k}) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbf{P}} \left(\chi^{(k)}(y - \beta_1) > v + \ln \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, M e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, D_{x,k} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Поскольку $D_{x,k} \subset G_k$, из соотношения (44) находим, что

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{P}} \left(\chi^{(k)}(y - \beta_2) > v + \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right) - \tilde{\mathbf{P}}(G_k \setminus D_{x,k}) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbf{P}}(\varphi_x > u, \psi_x \leq z, D_{x,k}) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbf{P}} \left(\chi^{(k)}(y - \beta_1) > v + \ln \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, M e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{P}} \left(\chi^{(k)}(y - \beta_2) > v + \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right) = \\ & = \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}}_k \left(\chi^{(k)}(y - \beta_2) > v + \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right); L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right) = \\ & = \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}}_k \left(\chi^{(k)}(y - b_2) > v + \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \Big|_{b_2=\beta_2}; L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right) = \\ & = \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{\mathbf{P}} \left(\chi(y - b_2) > v + \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \Big|_{b_2=\beta_2}; L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right). \end{aligned}$$

Откуда, учитывая (15), получаем на основании теоремы о мажорируемой сходимости, что

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(\chi^{(k)}(y - \beta_2) > v + \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right) = \\ & = \hat{\mathbf{P}} \left(\chi > v + \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \tilde{\mathbf{P}} \left(L e^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Аналогично устанавливается, что

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(\chi^{(k)}(y - \beta_1) > v + \ln \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, Me^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right) = \\ = \hat{\mathbf{P}} \left(\chi > v + \ln \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \tilde{\mathbf{P}} \left(Me^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Далее, в силу соотношений (6) и (8)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(Le^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(\frac{\xi_k}{\exp S_k} \leq (1 - \varepsilon)z, G_k \right) = \\ = \tilde{\mathbf{P}}(W \leq (1 - \varepsilon)z, D), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(Me^{S_k} \geq \frac{x}{z}, G_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(\frac{\xi_k}{\exp S_k} \leq (1 + \varepsilon)z, G_k \right) = \\ = \tilde{\mathbf{P}}(W \leq (1 + \varepsilon)z, D) \end{aligned} \quad (49)$$

для всех $\varepsilon \in (0, 1)$ за исключением не более чем счетного множества. Перейдем в соотношении (45) к пределу сначала при $x \rightarrow +\infty$, а затем при $k \rightarrow \infty$. Учитывая соотношения (10), (47)–(49), получаем, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}} \left(\chi > v + \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \tilde{\mathbf{P}}(W \leq (1 - \varepsilon)z, D) \leq \\ \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(\varphi_x > u, \psi_x \leq z, D_x) \leq \\ \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(\varphi_x > u, \psi_x \leq z, D_x) \leq \\ \leq \hat{\mathbf{P}} \left(\chi > v + \ln \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \tilde{\mathbf{P}}(W \leq (1 + \varepsilon)z, D), \end{aligned} \quad (50)$$

Наконец, переходя в (50) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(\varphi_x > u, \psi_x > z, D_x) = \hat{\mathbf{P}}(\chi > v) \tilde{\mathbf{P}}(W \leq z, D) = \\ = \hat{\mathbf{P}}(e^X > u) \tilde{\mathbf{P}}(W \leq z, D), \end{aligned}$$

если z является точкой непрерывности функции распределения случайной величины W . Откуда, заменяя D на D^* и учитывая (26), получаем (40).

Объединяя левые части соотношений (20) и (40) и повторяя рассуждения, использованные при их доказательстве, а также используя асимптотическую независимость случайных элементов $\{Z_y^{(b)}(t), t \in [0, 1]\}$ и $\chi(y)$ при $y \rightarrow +\infty$, нетрудно доказать асимптотическую независимость левых частей соотношений (20) и (40) при $x \rightarrow +\infty$ и, следовательно, асимптотическую независимость левых частей соотношений (20)–(22).

Завершив доказательство теоремы. Пусть f – произвольная ограниченная непрерывная числовая функция, заданная на $D[0, 1]$. Заметим, что

$$\mathbf{E}(f(Y_x); D_x) = \tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\varkappa S_{T_x}) f(Y_x); D_x). \quad (51)$$

Действительно,

$$\mathbf{E}(f(Y_x); D_x) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}(f(Y_x); T_x = m).$$

Случайная величина $f(Y_x) I(T_x = m)$ измерима относительно σ -алгебры σ_m и, следовательно (см. (5)),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(Y_x); T_x = m) &= \tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\kappa S_m) f(Y_x); T_x = m) = \\ &= \tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\kappa S_{T_x}) f(Y_x); T_x = m). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(Y_x); D_x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\kappa S_{T_x}) f(Y_x); T_x = m) = \\ &= \tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\kappa S_{T_x}) f(Y_x)). \end{aligned}$$

Итак, соотношение (51) доказано.

Перепишем соотношение (51) в виде

$$\mathbf{E}(f(Y_x); D_x) = x^{-\kappa} \tilde{\mathbf{E}}\left(\left(\frac{\psi_x}{\varphi_x}\right)^{\kappa} f(Y_x); D_x\right). \quad (52)$$

При $f \equiv 1$ находим, что

$$\mathbf{P}(D_x) = x^{-\kappa} \tilde{\mathbf{E}}\left(\left(\frac{\psi_x}{\varphi_x}\right)^{\kappa}; D_x\right). \quad (53)$$

Разделив (52) на (53), получаем, что

$$\mathbf{E}(f(Y_x) \mid D_x) = \tilde{\mathbf{E}}\left(\left(\frac{\psi_x}{\varphi_x}\right)^{\kappa} f(Y_x) \mid D_x\right) \left(\tilde{\mathbf{E}}\left(\left(\frac{\psi_x}{\varphi_x}\right)^{\kappa} \mid D_x\right)\right)^{-1}. \quad (54)$$

Из соотношений (20)-(22) следует, что

$$\left\{\left(\frac{\psi_x}{\varphi_x}\right)^{\kappa} f(Y_x) \mid D_x\right\} \xrightarrow{\bar{D}} (\widehat{W})^{\kappa} e^{-\kappa \chi} f(B).$$

Далее,

$$\left(\frac{\psi_x}{\varphi_x}\right)^{\kappa} f(Y_x) \leq K (\psi_x)^{\kappa},$$

где $K > 0$ – постоянная, ограничивающая модуль функции f . Поскольку семейство случайных величин $(\psi_x)^{\kappa}$, где $x > 1$, равномерно интегрируемо, то равномерно интегрируемо семейство $\{(\psi_x/\varphi_x)^{\kappa} f(Y_x), x > 1\}$ и, следовательно (см. (26)), семейство случайных величин $\{(\psi_x/\varphi_x)^{\kappa} f(Y_x) \mid D_x\}$, где $x > 1$. В силу сказанного (см. теорему 5.4 из [9])

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{E}}\left(\left(\frac{\psi_x}{\varphi_x}\right)^{\kappa} f(Y_x) \mid D_x\right) &= \widehat{\mathbf{E}}\left((\widehat{W})^{\kappa} e^{-\kappa \chi} f(B)\right) = \\ &= \widehat{\mathbf{E}}\left((\widehat{W})^{\kappa} \widehat{\mathbf{E}} e^{-\kappa \chi} \widehat{\mathbf{E}} f(B)\right) \end{aligned} \quad (55)$$

и (при $f \equiv 1$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{E}} \left(\left(\frac{\psi_x}{\varphi_x} \right)^{\varkappa} \mid D_x \right) = \widehat{\mathbf{E}} \left(\widehat{W} \right)^{\varkappa} \widehat{\mathbf{E}} e^{-\varkappa \chi}. \quad (56)$$

Из соотношений (54)–(56) получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{E} (f(Y_x) \mid D_x) = \widehat{\mathbf{E}} f(B).$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Из соотношений (53), (56) и (26) следует, что при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(D_x) \sim c_0 x^{-\varkappa},$$

где

$$c_0 = \widehat{\mathbf{E}} \left(\widehat{W} \right)^{\varkappa} \widehat{\mathbf{E}} e^{-\varkappa \chi} \tilde{\mathbf{P}}(D) = \tilde{\mathbf{E}} W^{\varkappa} \widehat{\mathbf{E}} e^{-\varkappa \chi},$$

тем самым, асимптотика $\mathbf{P}(D_x)$ найдена несколько иным по сравнению с [2] способом.

4. Приступим к *доказательству теоремы 2*. Для произвольного $y > 0$ введем случайный процесс U_y :

$$U_y(t) = \frac{\ln \xi_{\lfloor ty/a \rfloor} - ty}{\sigma \sqrt{y/a}}, \quad t \geq 0,$$

где для определенности полагаем $\ln 0 = -\infty$. Для произвольных $k \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{R}$ и $y > 0$ введем случайный процесс $V_y^{(k,b)}$:

$$V_y^{(k,b)}(t) = \frac{S_{(\lfloor ty/a \rfloor - k)^+}^{(k)} - ty + b}{\sigma \sqrt{y/a}}, \quad t \geq 0.$$

Положим $x = \exp(y)$. Из соотношения (11) следует, что если событие $D_{x,k}$ произошло, то при $t \in [t_y, 1]$, где $t_y = (k+1)a/y$,

$$V_y^{(k,\beta_1)}(t) \leq U_y(t) \leq V_y^{(k,\beta_2)}(t) \quad (57)$$

(при этом выбираем y так, чтобы $(k+1)a < y$).

В отличие от доказательства теоремы 1, опирающегося на предельную теорему (14), доказательство теоремы 2 основывается на следующем варианте принципа инвариантности Донскера-Прохорова для процесса $V_y = V_y^{(0,0)}$: при $y \rightarrow \infty$

$$\{V_y(t), t \in [0, 1]\} \xrightarrow{\tilde{D}} B, \quad (58)$$

причем для произвольного $u \in (0, 1)$ процесс $\{V_y(t), t \in [0, u]\}$ и левая часть соотношения (15) асимптотически независимы.

Докажем последнее утверждение. При этом ограничимся рассмотрением одномерного сечения процесса V_y в момент времени $t \in (0, u]$. Заметим, что при $z \in \mathbb{R}$

$$\{V_y(t) \leq z\} \supset \{\mathcal{T}_Z > \lfloor ty/a \rfloor\},$$

где $Z = ty + z\sigma\sqrt{y/a}$. С другой стороны, для произвольного $l > 0$

$$\{V_y(t) \leq z\} \subset \{\mathcal{T}_{Z+l} > \lfloor ty/a \rfloor\} \cup \{M_{\lfloor ty/a \rfloor} - S_{\lfloor ty/a \rfloor} > l\},$$

где $M_n = \max_{i \leq n} S_i$ при $n \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, при $v \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{P}}(\mathcal{T}_Z > \lfloor ty/a \rfloor, \chi(y) > v) \leq \tilde{\mathbf{P}}(V_y(t) \leq z, \chi(y) > v) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbf{P}}(\mathcal{T}_{Z+l} > \lfloor ty/a \rfloor, \chi(y) > v) + \tilde{\mathbf{P}}(M_{\lfloor ty/a \rfloor} - S_{\lfloor ty/a \rfloor} > l). \end{aligned} \quad (59)$$

Хорошо известно, что при $n \in \mathbb{N}_0$

$$S_n - M_n \stackrel{d}{=} L_n,$$

где $L_n = \min_{i \leq n} S_i$. Поскольку $\tilde{\mathbf{E}}X_1 > 0$, то при $n \rightarrow \infty$

$$L_n \xrightarrow{\tilde{D}} L,$$

где L – некоторая неположительная случайная величина. Следовательно,

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \limsup_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(M_{\lfloor ty/a \rfloor} - S_{\lfloor ty/a \rfloor} > l) = 0. \quad (60)$$

Ввиду соотношения (15) и асимптотической независимости левых частей соотношений (14) и (15)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(\mathcal{T}_Z > \lfloor ty/a \rfloor, \chi(y) > v) = \\ & = \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}\left(\frac{\mathcal{T}_Z - Z/a}{\sigma a^{-3/2} \sqrt{Z/t}} > \frac{\lfloor ty/a \rfloor - Z/a}{\sigma a^{-3/2} \sqrt{Z/t}}, \chi(y) > v\right) = \\ & = \hat{\mathbf{P}}(B(t) > -z) \hat{\mathbf{P}}(\chi > v) = \hat{\mathbf{P}}(B(t) < z) \hat{\mathbf{P}}(\chi > v) \end{aligned} \quad (61)$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(\mathcal{T}_{Z+l} > \lfloor ty/a \rfloor, \chi(y) > v) = \hat{\mathbf{P}}(B(t) < z) \hat{\mathbf{P}}(\chi > v). \quad (62)$$

Перейдем в соотношении (59) к пределу сначала при $y \rightarrow +\infty$, а затем при $l \rightarrow +\infty$. Учитывая соотношения (60)–(62), получаем

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(V_y(t) \leq z, \chi(y) > v) = \hat{\mathbf{P}}(B(t) < z) \hat{\mathbf{P}}(\chi > v),$$

что требовалось доказать.

Покажем, что при $y \rightarrow +\infty$

$$\{U_y(t), t \in [0, 1] \mid D_x\} \xrightarrow{\tilde{D}} B. \quad (63)$$

В силу соотношения (57) для произвольных моментов времени $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$ и чисел $x_1, x_2, \dots, x_m$, где $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{P}}\left(V_y^{(k, \beta_2)}(t_1) \leq x_1, \dots, V_y^{(k, \beta_2)}(t_m) \leq x_m, D_{x,k}\right) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbf{P}}(U_y(t_1) \leq x_1, \dots, U_y(t_m) \leq x_m, D_{x,k}) \leq \\ & \leq \tilde{\mathbf{P}}\left(V_y^{(k, \beta_1)}(t_1) \leq x_1, \dots, V_y^{(k, \beta_1)}(t_m) \leq x_m, D_{x,k}\right) \end{aligned}$$

(при этом выбираем y так, чтобы $(k+1)a < t_1 y$). Сначала перейдем от $D_{x,k}$ к G_k :

$$\tilde{\mathbf{P}}\left(V_y^{(k, \beta_2)}(t_1) \leq x_1, \dots, V_y^{(k, \beta_2)}(t_m) \leq x_m, G_k\right) - \tilde{\mathbf{P}}(G_k \triangle D_{x,k}) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \tilde{\mathbf{P}}(U_y(t_1) \leq x_1, \dots, U_y(t_m) \leq x_m, D_{x,k}) \leq \\ &\leq \tilde{\mathbf{P}}\left(V_y^{(k,\beta_i)}(t_1) \leq x_1, \dots, V_y^{(k,\beta_i)}(t_m) \leq x_m, G_k\right). \end{aligned} \quad (64)$$

Заметим, что при $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{P}}\left(V_y^{(k,\beta_i)}(t_1) \leq x_1, \dots, V_y^{(k,\beta_i)}(t_m) \leq x_m, G_k\right) = \\ &= \tilde{\mathbf{E}}\left(\tilde{\mathbf{P}}_k\left(V_y^{(k,\beta_i)}(t_1) \leq x_1, \dots, V_y^{(k,\beta_i)}(t_m) \leq x_m\right); G_k\right) = \\ &= \tilde{\mathbf{E}}\left(\tilde{\mathbf{P}}_k\left(V_y^{(k,b_i)}(t_1) \leq x_1, \dots, V_y^{(k,b_i)}(t_m) \leq x_m\right)\Big|_{b_i=\beta_i}; G_k\right) = \\ &= \tilde{\mathbf{E}}\left(\tilde{\mathbf{P}}(V_y(t_1 - \Delta t) + b_i\Delta x \leq x_1, \dots, V_y(t_m - \Delta t) + b_i\Delta x \leq x_m)\Big|_{b_i=\beta_i}; G_k\right), \end{aligned}$$

где $\Delta t = kay^{-1}$, $\Delta x = \sqrt{a}(\sigma\sqrt{y})^{-1}$. Откуда, применяя (58), по теореме о мажорируемой сходимости находим, что при $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} &\lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}\left(V_y^{(k,\beta_i)}(t_1) \leq x_1, \dots, V_y^{(k,\beta_i)}(t_m) \leq x_m, G_k\right) = \\ &= \hat{\mathbf{P}}(B(t_1) \leq x_1, \dots, B(t_m) \leq x_m) \tilde{\mathbf{P}}(G_k). \end{aligned} \quad (65)$$

Перейдем к пределу в соотношении (64) сначала при $y \rightarrow +\infty$, а затем при $k \rightarrow \infty$. В силу соотношений (10), (65) и (27)

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(U_y(t_1) \leq x_1, \dots, U_y(t_m) \leq x_m, D_{x,k}) = \\ &= \hat{\mathbf{P}}(B(t_1) \leq x_1, \dots, B(t_m) \leq x_m) \tilde{\mathbf{P}}(D). \end{aligned} \quad (66)$$

Теперь перейдем от $D_{x,k}$ к D_x :

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{P}}(U_y(t_1) \leq x_1, \dots, U_y(t_m) \leq x_m, D_{x,k}) \leq \\ &\leq \tilde{\mathbf{P}}(U_y(t_1) \leq x_1, \dots, U_y(t_m) \leq x_m, D_x) \leq \\ &\leq \tilde{\mathbf{P}}(U_y(t_1) \leq x_1, \dots, U_y(t_m) \leq x_m, D_{x,k}) + \tilde{\mathbf{P}}(D_x \triangle D_{x,k}). \end{aligned}$$

Откуда, переходя к пределу сначала при $y \rightarrow +\infty$, а затем при $k \rightarrow \infty$ и используя соотношения (10) и (66), получаем, что

$$\begin{aligned} &\lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(U_y(t_1) \leq x_1, \dots, U_y(t_m) \leq x_m, D_x) = \\ &= \hat{\mathbf{P}}(B(t_1) \leq x_1, \dots, B(t_m) \leq x_m) \tilde{\mathbf{P}}(D). \end{aligned}$$

Но это утверждение вместе с (26) означает, что

$$\begin{aligned} &\lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(U_y(t_1) \leq x_1, \dots, U_y(t_m) \leq x_m \mid D_x) = \\ &= \hat{\mathbf{P}}(B(t_1) \leq x_1, \dots, B(t_m) \leq x_m), \end{aligned}$$

т.е. сходимость конечномерных распределений в (63) установлена.

Покажем, что для произвольного $\varepsilon' > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(w_{Y_x}(\delta) \geq \varepsilon'; D_{x,k}) = 0. \quad (67)$$

Если событие $D_{x,k}$ произошло, то, учитывая (57) и (30), находим, что при $t_y = (k+1)a/y$

$$w_{U_y}(\delta) \leq 2 \sup_{[t \in 0, t_y]} |U_y(t)| + w_{V_y^{(k, \beta_1)}}(\delta) + \sup_{t \in [0, 1]} \left| V_y^{(k, \beta_2)}(t) - V_y^{(k, \beta_1)}(t) \right|.$$

Заметим, что $w_{V_y^{(k, b)}}(\delta)$ не зависит от b . Кроме того,

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left| V_y^{(k, \beta_2)}(t) - V_y^{(k, \beta_1)}(t) \right| = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\sigma \sqrt{y/a}} = \frac{\ln \left[(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{-1} \right]}{\sigma \sqrt{y/a}}.$$

Это означает, что если событие $D_{x,k}$ произошло, то

$$w_{U_y}(\delta) \leq 2 \sup_{[t \in 0, t_y]} |U_y(t)| + w_{V_y^{(k, 0)}}(\delta) + \frac{\ln \left[(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{-1} \right]}{\sigma \sqrt{y/a}}. \quad (68)$$

Ввиду (68) для справедливости (67) достаточно показать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(2 \sup_{[t \in 0, t_y]} |U_x(t)| \geq \frac{\varepsilon'}{2} \right) = 0, \quad (69)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}} \left(w_{V_y^{(k, 0)}}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{2} \right) = 0. \quad (70)$$

Нетрудно понять, что

$$\sup_{t \in [0, t_y]} |U_y(t)| \leq \frac{\ln \sup_{t \in [0, t_y]} \xi_{\lfloor ty/a \rfloor} + t_y y}{\sigma \sqrt{y/a}} = \frac{\ln \sup_{i \leq k} \xi_i + (k+1)a}{\sigma \sqrt{y/a}},$$

откуда следует (69). Далее,

$$V_y^{(k, 0)}(t) = \frac{S_{(\lfloor ty/a \rfloor - k)^+}^{(k)} - t_y}{\sigma \sqrt{y/a}} = \frac{S_{(\lfloor (t - \Delta t)y/a \rfloor)^+}^{(k)} - (t - \Delta t)y}{\sigma \sqrt{y/a}} - ka\Delta x.$$

Значит, модуль непрерывности левой части не превосходит модуля непрерывности функции $\left(S_{\lfloor ty/a \rfloor}^{(k)} - t_y \right) \left(\sigma \sqrt{y/a} \right)^{-1}$ и

$$\tilde{\mathbf{P}} \left(w_{V_y^{(k, 0)}}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{2} \right) \leq \tilde{\mathbf{P}} \left(w_{V_y}(\delta) \geq \frac{\varepsilon'}{2} \right).$$

Вспоминая теперь (58), приходим к (70). Таким образом, соотношение (67) доказано.

Заметим, что

$$\tilde{\mathbf{P}}(w_{Y_y}(\delta) \geq \varepsilon'; D_x) \leq \tilde{\mathbf{P}}(w_{Y_y}(\delta) \geq \varepsilon'; D_{x,k}) + \tilde{\mathbf{P}}(D_x \triangle D_{x,k}).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу сначала при $y \rightarrow +\infty$, затем при $k \rightarrow \infty$ и, наконец, при $\delta \rightarrow 0$ и учитывая соотношения (9), (67) и (26), получаем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}(w_{Y_y}(\delta) \geq \varepsilon' \mid D_x) = 0.$$

Это утверждение наряду со сходимостью конечномерных распределений означает справедливость соотношения (63).

Объединяя левые части соотношений (40) и (63) и повторяя рассуждения, использованные при их доказательстве, а также используя асимптотическую независимость при $u \in (0, 1)$ случайных элементов $\{V_y(t), t \in [0, u]\}$ и $\chi(y)$ при $y \rightarrow +\infty$, можно доказать асимптотическую независимость процесса $\{U_y(t), t \in [0, u] \mid D_x\}$ и левой части соотношения (40).

Перейдем к завершающей части доказательства. Для $u \in (0, 1)$ введем случайное событие

$$\hat{D}_x = \left\{ \frac{uy}{a} < T_x < +\infty \right\},$$

где $x = \exp(y)$. Заметим, что в силу закона больших чисел для T_x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(D_x \setminus \hat{D}_x \mid D_x) = 0. \quad (71)$$

Пусть f – произвольная ограниченная непрерывная числовая функция, заданная на $D[0, u]$. Аналогично (51) устанавливается, что

$$\mathbf{E}(f(U_y); \hat{D}_x) = \tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\varkappa S_{T_x}) f(U_y); \hat{D}_x), \quad (72)$$

где $U_y = \{U_y(t), t \in [0, u]\}$. При этом используется измеримость случайной величины $f(U_y)I(T_x = m)$ относительно σ -алгебры σ_m при $m > uy/a$. Поскольку $\hat{D}_x \subset D_x$, из соотношений (51) и (72) (при $f \equiv 1$) вытекает, что

$$\mathbf{P}(D_x \setminus \hat{D}_x) = \tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\varkappa S_{T_x}); D_x \setminus \hat{D}_x). \quad (73)$$

Из соотношений (72), (73) находим, что

$$\left| \mathbf{E}(f(U_y); D_x) - \tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\varkappa S_{T_x}) f(U_y); D_x) \right| \leq 2K\mathbf{P}(D_x \setminus \hat{D}_x).$$

где $K > 0$ – постоянная, ограничивающая модуль функции f . Следовательно,

$$\left| \mathbf{E}(f(U_y) \mid D_x) - \frac{\tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\varkappa S_{T_x}) f(U_y); D_x)}{\mathbf{P}(D_x)} \right| \leq 2K\mathbf{P}(D_x \setminus \hat{D}_x \mid D_x). \quad (74)$$

Заметим, что

$$\tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\varkappa S_{T_x}) f(U_y) \mid D_x) = x^{-\varkappa} \tilde{\mathbf{E}}\left(\left(\frac{\psi_x}{\varphi_x}\right)^{\varkappa} f(U_y) \mid D_x\right). \quad (75)$$

Из (40), (63) и асимптотической независимости процесса $\{U_y \mid D_x\}$ и левой части соотношения (40) следует, что при $y \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \left(\frac{\psi_x}{\varphi_x}\right)^{\varkappa} f(U_y) \mid D_x \right\} \xrightarrow{\tilde{D}} \left(\widehat{W}\right)^{\varkappa} e^{-\varkappa \chi} f(B),$$

причем семейство (при разных x) случайных величин в левой части равномерно интегрируемо. В итоге получаем, что

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{E}} \left(\left(\frac{\psi_x}{\varphi_x} \right)^{\varkappa} f(U_y) \mid D_x \right) = \tilde{\mathbf{E}} W^{\varkappa} \hat{\mathbf{E}} e^{-\varkappa \chi} \hat{\mathbf{E}} f(B). \quad (76)$$

Из соотношений (75)–(76) вытекает, что при $y \rightarrow +\infty$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\varkappa S_{T_x}) f(U_y); D_x) \sim x^{-\varkappa} \tilde{\mathbf{E}} W^{\varkappa} \hat{\mathbf{E}} e^{-\varkappa \chi} \hat{\mathbf{E}} f(B)$$

и (см. замечание 1)

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\exp(-\varkappa S_{T_x}) f(U_y); D_x) / \mathbf{P}(D_x) = \hat{\mathbf{E}} f(B). \quad (77)$$

Переходя в соотношении (74) к пределу при $y \rightarrow +\infty$ и учитывая соотношения (71) и (77), получаем, что

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(f(U_y); D_x) = \hat{\mathbf{E}} f(B),$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Список литературы

1. Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A., “Criticality for branching processes in random environment”, *Ann. Probab.*, **33**:2 (2005), 645–673.
2. Afanasyev V. I., “On the maximum of a subcritical branching process in a random environment”, *Stochastic Process. Appl.*, **93**:1 (2001), 84–107.
3. Афанасьев В. И., “Высокоуровневые докритические ветвящиеся процессы в случайной среде”, *Тр. МИАН*, **282** (2013), 10–21.
4. Афанасьев В. И., “Принцип инвариантности для критического ветвящегося процесса в случайной среде, достигающего высокого уровня”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **54**:1 (2009), 3–17.
5. Afanasyev V. I., “New invariance principles for critical branching process in random environment”, *Advances in data analysis. Stat. Ind. Technol.*, 2010, 105–115.
6. Афанасьев В. И., “Броуновский прыжок в высоту”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **55**:2 (2010), 209–225.
7. Gut A., *Stopped random walks*, New York: Springer-Verlag, 1988.
8. Siegmund D., *Sequential analysis tests and confidence intervals*, New York: Springer, 1985.
9. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*, М.: Наука, 1977.

Статья поступила 26.12.2013.