Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Распределение длины m -го максимального цикла случайной A -подстановки, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 4, 40–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:24:28

Распределение длины m -го максимального цикла случайной A -подстановки

© 2005 г. А. Л. Якимив

Пусть S_n — симметрическая группа подстановок степени n , A — некоторое подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ и $T_n = T_n(A)$ — совокупность всех подстановок из S_n , длины циклов которых принадлежат множеству A . Подстановки из T_n принято называть A -подстановками. Рассматривается широкий класс множеств A асимптотической плотности $\sigma > 0$. В статье получены предельные распределения для $\mu_m(n)/n$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $m \in \mathbb{N}$, где $\mu_m(n)$ — длина m -го максимального цикла случайной подстановки, равномерно распределенной на T_n . Показано, что эти предельные распределения совпадают с предельными распределениями соответствующих функционалов от случайных подстановок из S_n в известной неравновероятной модели Эвенса с параметром σ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00583, и программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ-1758.2003.1.

1. Введение

Зафиксируем множество $A \subseteq \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. A -подстановками называются подстановки, длины циклов которых принадлежат множеству A (см. [32]). Пусть $T_n = T_n(A)$ есть множество всех A -подстановок степени n . Задав на T_n равномерное вероятностное распределение, можно изучать различные функционалы от случайной подстановки a_n из T_n . Пусть ζ_{mn} , $m \in A$, — число циклов подстановки a_n длины m , ζ_n — общее число ее циклов, то есть,

$$\zeta_n = \sum_{m \in A} \zeta_{mn}.$$

Всюду через $|X|$ обозначается число элементов конечного множества X и мера Лебега бесконечного множества X . Ранее для тех или иных классов множеств A изучались асимптотика $|T_n|$ и предельное поведение (в слабом смысле) ζ_{mn} и ζ_n при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном m (см. [2, 4, 6–8, 10, 12, 14, 16, 17, 19–28, 37–42]). Более общие комбинаторные объекты — случайные отображения с ограничениями на длины циклов были рассмотрены в [30–32]. Пусть $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ — множества подстановок степени n с нечетными и четными длинами циклов, соответственно. Цикловая структура случайных подстановок с равномерным распределением на некоторых фактор-множествах этих множеств изучалась в [1, 3, 34]. Отметим также, что множество решений уравнения $x^d = e$ в симметрической группе S_n (e — тождественная подстановка) представляет собой множество

A -подстановок при $A = \{d_0, d_1, \dots, d_r\}$, где $1 = d_0 < d_1 < \dots < d_r = d$ — различные делители числа d . Этим, может быть, в частности, объясняется интерес, проявленный со стороны ряда авторов к изучению A -подстановок. В [18] имеется специальная глава, в которой изучаются асимптотические свойства решений уравнений, содержащих неизвестную подстановку.

Расположим длины циклов случайной подстановки a_n в возрастающем порядке:

$$l_n(1) \leq l_n(2) \leq \dots \leq l_n(\zeta_n). \quad (1)$$

Мы получили вариационный ряд длин циклов случайной подстановки a_n . Пусть $\mu_1(n) = \mu(n) = l_n(\zeta_n)$ и $\mu_m(n) = l_n(\zeta_{n-m+1})$ при $m \in \mathbb{N}$. Случайная величина $\mu(n)$ есть длина максимального цикла подстановки a_n , а случайная величина $\mu_m(n)$ есть длина m -го максимального цикла подстановки a_n (m -й член справа вариационного ряда (1)). Здесь для широкого класса множеств A асимптотической плотности $\sigma > 0$ получены предельные распределения для случайной величины $\mu_m(n)/n$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $m \in \mathbb{N}$. К настоящему времени этот результат был известен только в случае, когда $A = \mathbb{N}$, то есть, когда вместо T_n рассматривается все множество подстановок S_n .

Экстремальные свойства случайных подстановок, случайных отображений и других комбинаторных структур явились предметом пристального внимания со стороны целого ряда авторов, начиная со знаменитой работы В. Л. Гончарова 1942 г. [9] (история вопроса и подробные ссылки имеются в [13]).

При доказательстве соответствующего утверждения существенно используются идеи упомянутой работы Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведева [13], а также статьи автора [38].

2. Основной результат

Для дальнейшего нам понадобится сформулировать один результат, полученный Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведевым в [13]. Зададим на S_n распределение вероятностей Эвенса [11] с параметром $\sigma > 0$, а именно, каждой подстановке из S_n с k циклами припишем вероятность

$$\frac{\sigma^k}{\sigma(\sigma+1) \dots (\sigma+n-1)}.$$

Соответствующие характеристики случайной подстановки в модели Эвенса будем снабжать индексом σ . Так, при $m, n \in \mathbb{N}$ случайная величина $\mu_{\sigma m}(n)$ есть длина m -го максимального цикла случайной подстановки из S_n в модели Эвенса с параметром σ . Положим при $x > 0$ и $m \in \mathbb{N}$

$$\Phi_{\sigma m}(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=m}^{[1/x]} \frac{(-1)^{k-m} \sigma^k}{k(m-1)!(k-m)!} J_{\sigma k}(x) & \text{при } x < m^{-1}, \\ 1 & \text{при } x \geq m^{-1}, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$J_{\sigma k}(x) = \int_{V_k(x)} (1 - y_1 - \dots - y_k)^{\sigma-1} \frac{dy_1 \dots dy_k}{y_1 \dots y_k} \quad (3)$$

и

$$V_k(x) = \left\{ y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k, \sum_{j=1}^k y_j \leq 1, y_j \geq x, \forall j = 1, \dots, k \right\}. \quad (4)$$

Теорема 1 ([13]). При $n \rightarrow \infty$ и фиксированных $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$ и $x > 0$

$$\mathbf{P}\{n^{-1}\mu_{\sigma m}(n) \leq x\} \rightarrow \Phi_{\sigma m}(x).$$

Сформулируем теперь основной результат настоящей статьи.

Теорема 2. Пусть

$$p(n) = \frac{|T_n(A)|}{n!} = n^{\sigma-1} L(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

где функция $L(n)$ медленно меняется на бесконечности, а $\sigma \in (0, 1]$. Тогда для произвольных фиксированных $m \in \mathbb{N}$ и $x > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{n^{-1}\mu_m(n) \leq x\} \rightarrow \Phi_{\sigma m}(x). \quad (6)$$

Замечание 1. Если выполнено (5), то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |k: k \in A, k \leq n| = \sigma, \quad (7)$$

называемый в теории чисел асимптотической плотностью множества A (см. раздел 3.1 в [29]). Обратное неверно. Например, когда A — множество четных чисел, то $p(n) = 0$ для нечетных n .

Сравнивая теорему 1 с теоремой 2, мы видим, что предельные распределения в них одни и те же, хотя модели случайных подстановок совершенно разные.

При $A = \mathbb{N}$ из теоремы 2 следует известный результат В. Л. Гончарова [9] ($m = 1$) и результат Л. А. Шепша и С. П. Ллойда [35] (произвольное m). Более подробные ссылки и история вопроса даны в [13], см. также монографию В. Ф. Колчина [15], где изложена соответствующая теория экстремумов для подстановок и общих случайных отображений и даны библиографические комментарии к ней до конца 1984 г.

Приведем некоторые примеры, когда выполнено предположение (5) теоремы 2 при $A \neq \mathbb{N}$.

Пример 1. Пусть множество A имеет асимптотическую плотность, равную единице, то есть выполнено соотношение (7) с $\sigma = 1$. Тогда справедливо соотношение (5) (см. [37]), а, стало быть, верно утверждение теоремы 2.

Пример 2. Пусть элементы множества A образуют, начиная с некоторого номера, периодическую последовательность, причем существует $r \in \mathbb{N}$ такое, что для произвольного неотрицательного целого числа s множество $A \cap \{s+1, \dots, s+r\}$ не может быть вложено ни в какую решетку целых чисел с шагом, большим единицы. Тогда (см. [16, 17]) справедливо соотношение (5).

Пример 3. Пусть функция f , определенная на $\mathbb{N}$, удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $f(m_1 m_2) = f(m_1) f(m_2)$ при $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $(m_1, m_2) = 1$ (здесь и далее (m_1, m_2) есть наибольший общий делитель чисел m_1 и m_2), $f(1) = 1$;
- (2) f принимает только значения $-1, 0, 1$;

(3) для произвольных $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, функция

$$\chi(m) = \sum_{d^k | m} f(d)$$

принимает только значения 0 и 1.

Пусть $A = A(f, k)$ — множество тех $m \in \mathbb{N}$, для которых $\chi(m) = 1$. Тогда (см. [23]) справедливо (5). Далее, в [23] приводятся примеры функций f , известных в теории чисел, удовлетворяющих перечисленным требованиям 1–3, таких, как функция Мебиуса, функция Лиувилля.

Пример 4. Пусть $M \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq M$, $A_i = \{m \in \mathbb{N} : m = a_i k + b_i, k = 0, 1, 2, \dots\}$, где целые $a_i > 1$, $1 \leq b_i \leq a_i - 1$, $(a_i, b_i) = 1$, $A = \bigcup_{i=1}^M A_i$, прогрессии A_i и A_j при $i \neq j$ не пересекаются. Тогда (см. [28]) справедливо (5).

Пример 5. Пусть $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}$ таковы, что $k_i \geq 2$, $i = 1, \dots, s$ и наибольший общий делитель $(k_i, k_j) = 1$ при $i \neq j$.

Положим $A = \{m \in \mathbb{N} : k_i \nmid m, i = 1, \dots, s\}$. Тогда (см. [28]) справедливо (5).

Пример 6. Пусть выполнено (7) и для произвольной постоянной $C > 1$ при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} |k : k \leq n, k \in A, m - k \in A| \rightarrow \sigma^2 \quad (8)$$

равномерно по $m \in [n, Cn]$ (см. [38]). Тогда имеет место соотношение (5).

Пример 7. Пусть множество A случайно, причем случайные величины $\xi_n = \chi\{n \in A\}$, $n \in \mathbb{N}$, независимы в совокупности и $p_n = \mathbf{P}\{\xi_n = 1\} \rightarrow \sigma > 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $n \in B$ для некоторого множества $B \subseteq \mathbb{N}$ асимптотической плотности 1. Тогда соотношения (7) и (8) выполнены для A почти наверное (п.н.) (см. [41]) и, стало быть, при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{n^{-1} \mu_m(n) \leq x \mid A\} \rightarrow \Phi_{\sigma m}(x) \text{ п.н.}$$

для произвольных фиксированных $m \in \mathbb{N}$ и $x > 0$.

Замечание 2. В [25] по множествам A , удовлетворяющим (5), строятся некоторые другие множества, для которых это соотношение выполнено. Например, если для двух непересекающихся множеств $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{N}$

$$p_i(n) = \frac{|T_n(A_i)|}{n!} = n^{\sigma_i - 1} L_i(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2,$$

где $\sigma_i > 0$ и функции $L_i(n)$, $i = 1, 2$, медленно меняются на бесконечности, то для множества $A = A_1 \cup A_2$ выполнено (5), причем $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ и при $n \rightarrow \infty$

$$L(n) \sim \frac{\Gamma(\sigma_1) \Gamma(\sigma_2)}{\Gamma(\sigma)} L_1(n) L_2(n).$$

3. Доказательства

Докажем утверждение в замечании 1. Согласно соотношению 6.3 из [4]

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)s^n = \exp\left(\sum_{n \in A} \frac{s^n}{n}\right), \quad s \in [0, 1) \quad (9)$$

(функция $p(n)$ при $n \in \mathbb{N}$ определена в (5) и дополнительно мы полагаем $p(0) = 1$). Учитывая асимптотику (5), откуда по абелевой теореме Карамата для степенных рядов (см. теорему 5 в разделе XIII.5 в [36]) получаем, что при $s \uparrow 1$

$$\exp\left(\sum_{n \in A} \frac{s^n}{n}\right) \sim (1-s)^{-\sigma} \Gamma(\sigma) L\left(\frac{1}{1-s}\right). \quad (10)$$

Дифференцируя (9) по s , получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} np(n)s^{n-1} = \sum_{n \in A} s^{n-1} \exp\left(\sum_{n \in A} \frac{s^n}{n}\right), \quad s \in [0, 1). \quad (11)$$

Применяя к левой части (11) абелеву теорему Карамата и учитывая в правой части (11) асимптотику (10), получим, что при $s \uparrow 1$

$$s^{-1}(1-s)^{-1-\sigma} \Gamma(1+\sigma) L\left(\frac{1}{1-s}\right) \sim s^{-1} \sum_{n \in A} s^n (1-s)^{-\sigma} \Gamma(\sigma) L\left(\frac{1}{1-s}\right),$$

откуда при $s \uparrow 1$

$$\sum_{n \in A} s^n \sim \sigma(1-s)^{-1}. \quad (12)$$

Из (12) и тауберовой теоремы Карамата следует (7). Замечание доказано.

Ранее было показано, что следствием (5) является существование у множества A логарифмической плотности, равной σ , то есть существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k \in A, k \leq n} \frac{1}{k} = \sigma$$

(см. следствие 3 в [25]). В замечании 1 содержится более сильное утверждение (как известно, из существования асимптотической плотности множества A следует существование логарифмической плотности A , но не наоборот (см. раздел 3.1 в [29])).

Доказательство теоремы 2. Положим при $b \in \mathbb{N}$

$$\zeta^b(n) = \sum_{i > b} \zeta_{in} \quad (13)$$

(напомним, что ζ_{in} есть число циклов длины i случайной A -подстановки степени n). Ясно, что

$$\mathbf{P}\{\mu_m(n) \leq b\} = \mathbf{P}\{\zeta^b(n) < m\}.$$

Поэтому (см. лемму 2 в [13]), для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что для произвольных фиксированных $x, t \in (0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$ и $b = b(n) \sim nx$

$$\mathbf{M}_t \zeta^{b(n)} \rightarrow 1 + \sum_{1 \leq k < 1/x} \frac{(\sigma(t-1))^k}{k!} J_{\sigma k}(x), \quad (14)$$

где $J_{\sigma k}(x)$ задаются формулой (3). Положим при $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$

$$F(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{M} \prod_{i=1}^n t_i^{\zeta_{in}}. \quad (15)$$

Поскольку (см. формулу (0.14) в [32]) для произвольного $s \in [0, 1]$ и $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$

$$\sum_{n \geq 0} p(n) s^n F(t_1, \dots, t_n) = \exp \left(a(s) + \sum_{i \in A} (t_i - 1) \frac{s^i}{i} \right), \quad (16)$$

где

$$a(s) = \sum_{i \in A} \frac{s^i}{i}, \quad (17)$$

при $p(n) \neq 0$ справедливо равенство

$$F(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{p(n)} \text{coef}_{s^n} \exp \left(a(s) + \sum_{i \in A} (t_i - 1) \frac{s^i}{i} \right).$$

Стало быть, с учетом (13) и (15),

$$\mathbf{M}_t \zeta^{b(n)} = F(t_1, \dots, t_n) \Big|_{t_i = \begin{cases} 1, & i \leq b, \\ t, & i > b, \end{cases}} = \frac{1}{p(n)} \text{coef}_{s^n} \exp \left(a(s) + \sum_{i \in A, i > b} (t - 1) \frac{s^i}{i} \right).$$

Согласно (9) и (17), $p(l) = \text{coef}_{s^l} \exp(a(s))$ при $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t \zeta^{b(n)} &= \frac{1}{p(n)} \text{coef}_{s^n} \sum_{l=0}^{\infty} p(l) s^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-1)^k}{k!} \left(\sum_{i \in A, i > b} \frac{s^i}{i} \right)^k \\ &= \frac{1}{p(n)} \text{coef}_{s^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-1)^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} p(l) s^l \left(\sum_{i \in A, i > b} \frac{s^i}{i} \right)^k \\ &= 1 + \sum_{1 \leq k < n/b} \frac{(t-1)^k}{k!} S_k(n), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$S_k(n) = \sum_{r=(b+1)k}^n \frac{p(n-r)}{p(n)} \sum_{i_1 \dots i_k} \frac{1}{i_1 \dots i_k}$$

(суммирование в последней сумме ведется по тем $(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$, для которых $i_1 + \dots + i_k = r$, $i_j > b$, $i_j \in A$ при $j = 1, \dots, k$). Стало быть,

$$S_k(n) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k(n)} \frac{1}{i_1 \dots i_k} \frac{p(n - i_1 - \dots - i_k)}{p(n)}, \quad (19)$$

где

$$A_k(n) = \left\{ (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k, \quad \sum_{j=1}^k i_j \leq n, \quad i_j > b, \quad i_j \in A, \quad j = 1, \dots, k \right\}.$$

Для функции $L(n)$, определенной в равенстве (5), согласно лемме 6 на с. 462 в [42] подберем такую последовательность натуральных чисел $a(n)$, что $a(n) \rightarrow \infty$, $a(n) = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\frac{L(r)}{L(n)} \rightarrow 1 \quad (20)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $r \in [a(n), n]$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in [0, \sigma]$. Поскольку функция $p(n)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\sigma - 1$ (см. (5)), согласно лемме 2.1 из [5] существует $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $n \geq n_0$ и $r \in [n_0, n(1 - \varepsilon)]$

$$\frac{p(r)}{p(n)} \leq \left(\frac{r}{n}\right)^{\sigma-1-\varepsilon}. \quad (21)$$

Без ограничения общности считаем, что при $n \geq n_0$

$$a(n) < n(1 - \varepsilon). \quad (22)$$

Представим $S_k(n)$ в виде суммы

$$\begin{aligned} S_k(n) &= S_k^{(1)}(n) + S_k^{(2)}(n) + S_k^{(3)}(n) \\ &= \sum_{l=1}^3 \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(l)}(n)} \frac{1}{i_1 \dots i_k} \frac{p(n - i_1 - \dots - i_k)}{p(n)}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $A_k^{(1)}(n)$, $A_k^{(2)}(n)$ и $A_k^{(3)}(n)$ — подмножества $A_k(n)$, отвечающие неравенствам

$$\sum_{j=1}^k i_j \leq n - a(n), \quad n - a(n) < \sum_{j=1}^k i_j \leq n - n_0, \quad n - n_0 < \sum_{j=1}^k i_j \leq n,$$

соответственно. В силу (5) и (20) при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} S_k^{(1)}(n) &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(1)}(n)} \frac{1}{i_1 \dots i_k} \frac{p(n - i_1 - \dots - i_k)}{p(n)} \\ &= (1 + o(1)) \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(1)}(n)} \frac{1}{i_1 \dots i_k} \left(1 - \frac{i_1 + \dots + i_k}{n}\right)^{\sigma-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Согласно (21) и (22) при $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} S_k^{(2)}(n) &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(2)}(n)} \frac{1}{i_1 \dots i_k} \frac{p(n - i_1 - \dots - i_k)}{p(n)} \\ &\leq \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(2)}(n)} \frac{1}{i_1 \dots i_k} \left(1 - \frac{i_1 + \dots + i_k}{n}\right)^{\rho-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\rho = \sigma - \varepsilon > 0$. Для произвольного $j = 1, \dots, k$ справедливо неравенство $i_j > b$, поэтому

$$\begin{aligned} S_k^{(2)}(n) &\leq \frac{1}{b^k} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(2)}(n)} \left(1 - \frac{i_1 + \dots + i_k}{n}\right)^{\rho-1} \\ &\leq Cn^{-k} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(2)}(n)} \left(1 - \frac{i_1 + \dots + i_k}{n}\right)^{\rho-1} \end{aligned} \quad (26)$$

для достаточно больших $n \geq n_1 \geq n_0$, так как $b = b(n) \sim \chi n$ при $n \rightarrow \infty$. При $r \in [n_0, a(n)]$ положим

$$A_k^{(2)}(n, r) = \left\{ (i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(2)}(n), \sum_{j=1}^k i_j = n - r \right\}.$$

Из неравенства (26) при $n \geq n_1$ следует, что

$$S_k^{(2)}(n) \leq Cn^{-k} \sum_{r=n_0}^{a(n)} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(2)}(n, r)} \left(\frac{r}{n}\right)^{\rho-1} = cn^{-k+1-\rho} \sum_{r=n_0}^{a(n)} r^{\rho-1} |A_k^{(2)}(n, r)|.$$

Заметим, что

$$|A_k^{(2)}(n, r)| \leq \left| \{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k \cap [1, n]^k, \sum_{j=1}^k i_j = n - r\} \right| \leq n^{k-1}.$$

Поэтому при $n \geq n_0$

$$S_k^{(2)}(n) \leq Cn^{-\rho} \sum_{r=n_0}^{a(n)} r^{\rho-1},$$

откуда при $n \rightarrow \infty$

$$S_k^{(2)}(n) = O\left(\left(\frac{a(n)}{n}\right)^\rho\right) = o(1), \quad (27)$$

так как $\rho > 0$. Далее, поскольку $p(l) \leq 1$ при $l \geq 0$, при $n \geq n_1$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} S_k^{(3)}(n) &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(3)}(n)} \frac{1}{i_1 \dots i_k} \frac{p(n - i_1 - \dots - i_k)}{p(n)} \leq \frac{1}{p(n)} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(3)}(n)} \frac{1}{i_1 \dots i_k} \\ &\leq \frac{Cn^{-k}}{p(n)} |A_k^{(3)}(n)| \leq \frac{C}{p(n)n^k} n_0 n^{k-1} = \frac{Cn_0}{np(n)}. \end{aligned}$$

Так как согласно (5) $np(n) = n^\sigma L(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, из полученной оценки следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$S_k^{(3)}(n) = o(1). \quad (28)$$

Из соотношений (23), (24), (27) и (28) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$S_k(n) = (1 + o(1))I_k(n) + o(1), \quad (29)$$

где

$$I_k(n) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in A_k^{(1)}(n)} \frac{1}{i_1 \dots i_k} \left(1 - \frac{i_1 + \dots + i_k}{n}\right)^{\sigma-1}. \quad (30)$$

Далее при $u, v \in \mathbf{R}^k$ соотношения $u < v$ ($u \leq v$) означают соответствующие покомпонентные неравенства, при $u < v$

$$[u, v) = \{y \in \mathbf{R}^k, u \leq y < v\}, \quad [u, v] = \{y \in \mathbf{R}^k, u \leq y \leq v\}$$

— соответствующие k -мерные кубы. Пусть $e = (1, \dots, 1)$ — k -мерный вектор,

$$B_k(n) = \bigcup_{i \in A_k^{(1)}(n)} (i + [0, e)), \quad (31)$$

$$I'_k(n) = \int_{B_k(n)} f_{kn}(y) dy, \quad (32)$$

где

$$f_{kn}(y) = \frac{1}{y_1 \dots y_k} \left(1 - \frac{y_1 + \dots + y_k}{n}\right)^{\sigma-1}. \quad (33)$$

Покажем, что при $n \rightarrow \infty$

$$I_k(n) = I'_k(n) + o(1). \quad (34)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} |I_k(n) - I'_k(n)| &\leq \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \left| \int_{i+[0, e)} f_{kn}(y) dy - f_{kn}(i) \right| \\ &= \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \left| \int_{i+[0, e)} (f_{kn}(y) - f_{kn}(i)) dy \right| \\ &\leq \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \int_{i+[0, e)} |f'_{kn}(y)| |y - i| dy \\ &\leq \sqrt{k} \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \max_{y \in i+[0, e]} |f'_{kn}(y)|. \end{aligned} \quad (35)$$

При $l = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{kn}(y)}{\partial y_l} &= \frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{1}{y_1 \dots y_k} \left(1 - \frac{y_1 + \dots + y_k}{n} \right)^{\sigma-1} \right) \\ &= -y_l^{-1} f_{kn}(y) - \frac{(\sigma-1)}{n} f_{kn}(y) \left(1 - \frac{y_1 + \dots + y_k}{n} \right)^{-1} \\ &= f_{kn}(y) \left(\frac{(1-\sigma)}{n} \left(1 - \frac{y_1 + \dots + y_k}{n} \right)^{-1} - y_l^{-1} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \max_{y \in i + [0, e]} \left(f_{kn}(y) \left(1 - \frac{y_1 + \dots + y_k}{n} \right)^{-1} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \frac{1}{i_1 \dots i_k} \left(1 - \frac{i_1 + \dots + i_k + k}{n} \right)^{\sigma-2} \\ &\leq C n^{-k} n^{-1} \left(1 - \frac{n - a(n) + k}{n} \right)^{\sigma-2} |A_k^{(1)}(n)| \\ &\leq \frac{C}{n^{k+1}} \left(\frac{a(n) - k}{n} \right)^{\sigma-2} n^k = C n^{-1} \left(\frac{a(n) - k}{n} \right)^{\sigma-2}. \end{aligned}$$

Без ограничения общности мы можем считать, что $a(n) \geq \sqrt{n} + k$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \max_{y \in i + [0, e]} \left(f_{kn}(y) \left(1 - \frac{y_1 + \dots + y_k}{n} \right)^{-1} \right) &\leq C n^{-1} (n^{-1/2})^{\sigma-2} \\ &= C n^{-1} n^{1-\sigma/2} = o(1) \end{aligned} \quad (37)$$

при $n \rightarrow \infty$. Для произвольного $l = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \max_{y \in i + [0, e]} \left(\frac{f_{kn}(y)}{y_l} \right) &\leq \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \frac{1}{y_l} \frac{1}{i_1 \dots i_k} \left(1 - \frac{i_1 + \dots + i_k + k}{n} \right)^{\sigma-1} \\ &\leq C n^{-k-1} \left(\frac{a(n) - k}{n} \right)^{\sigma-1} |A_k^{(1)}(n)| \\ &\leq C n^{-k-1} (n^{-1/2})^{\sigma-1} n^k = C n^{-1} n^{(1-\sigma)/2} = C n^{-(\sigma+1)/2}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $C n^{-(\sigma+1)/2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из соотношений (35)–(38) следует (34). Из (34) и (29) получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$S_k(n) = (1 + o(1)) I'_k(n) + o(1) \quad (39)$$

где $I'_k(n)$ задается формулой (32). Положим

$$B'_k(n) = B_k(n)/n, \quad f_k(y) = f_{k1}(y),$$

где $f_{kn}(y)$ задается формулой (33). Заметим, что

$$I'_k(n) = \int_{B'_k(n)} f_k(z) dz. \quad (40)$$

Согласно (18), $k < n/b = 1/x + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому можно считать, что $k < 1/x$. Возьмем произвольные $u, v \in \mathbf{R}^k$, $u < v$, причем $u_j \geq x$ для всех $j = 1, \dots, k$ и $\sum_{j=1}^k v_j < 1$ (это возможно, так как $k < 1/x$). Справедливо неравенство

$$\int_{[u,v] \cap B'_k(n)} f_k(y) dy \leq \max_{y \in [u,v]} f_k(y) |[u, v] \cap B'_k(n)|. \quad (41)$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} |[u, v] \cap B'_k(n)| &= \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \left| \left(\frac{i}{n} + \left[0, \frac{e}{n} \right) \right) \cap [u, v] \right| \\ &= \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} n^{-k} |(i + [0, e)) \cap [nu, nv]| = \Sigma_1 + \Sigma_2, \end{aligned} \quad (42)$$

причем

$$\Sigma_1 = n^{-k} \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \chi\{i \geq nu, i + e \leq nv\}, \quad (43)$$

и

$$0 \leq \Sigma_2 \leq n^{-k} \sum_{i \in A_k^{(1)}(n)} \chi\{\exists l = 1, \dots, k: i_l + 1 > nv_l, i \in [nu, nv]\}. \quad (44)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= n^{-k} |i \in A_k^{(1)}(n): i \geq nu, i + e \leq nv| \\ &= n^{-k} \left| i \in \mathbf{N}^k: \sum_{j=1}^k i_j \leq n - a(n), i_j > b, i_j \geq nu_j, i_j + 1 \leq nv_j, i_j \in A, j = 1, \dots, k \right| \\ &= n^{-k} \left| i \in \mathbf{N}^k: \sum_{j=1}^k i_j \leq n - a(n), \max(b + 1, nu_j) \leq i_j \leq nv_j - 1, i_j \in A, j = 1, \dots, k \right|. \end{aligned}$$

Если $i_j \leq nv_j - 1$ для всех $j = 1, \dots, k$, то

$$\sum_{j=1}^k i_j \leq n \sum_{j=1}^k v_j - k \leq n - a(n)$$

при достаточно больших $n \geq n_2 \geq n_1$, так как $\sum_{j=1}^k v_j < 1$, а $a(n) = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому при $n \geq n_2$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= n^{-k} |i \in \mathbf{N}^k: \max(b + 1, nu_j) \leq i_j \leq nv_j - 1, i_j \in A \forall j = 1, \dots, k| \\ &= n^{-k} |i \in \mathbf{N}^k: i_j \in [\max(b + 1, nu_j), nv_j - 1] \cap A \forall j = 1, \dots, k| \\ &= n^{-k} \prod_{j=1}^k |l: l \in N, l \in [\max(b + 1, nu_j), nv_j - 1] \cap A|. \end{aligned}$$

Так как асимптотическая плотность множества A равна σ (см. (7)) и

$$\max(b+1, nu_j) \sim nu_j, \quad u_j \geq x, \quad b \sim nx$$

при $n \rightarrow \infty$, нетрудно видеть, что при $n \rightarrow \infty$

$$|l: l \in \mathbb{N}, l \in [\max(b+1, nu_j), nv_j - 1] \cap A| = (1 + o(1))(v_j - u_j)\sigma n.$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\Sigma_1 = (1 + o(1))\sigma^k |[u, v]|. \quad (45)$$

Далее, согласно (44),

$$\begin{aligned} 0 \leq \Sigma_2 &\leq n^{-k} \sum_{i \in (N \cap [1, n])^k} \chi\{\exists l = 1, \dots, k: i_l + 1 > nv_l, i \in [nu, nv]\} \\ &= n^{-k} |i \in (N \cap [1, n])^k: \exists l = 1, \dots, k \mid i_l + 1 > nv_l, i \in [nu, nv]| \\ &\leq n^{-k} |i \in (N \cap [1, n])^k: \exists l = 1, \dots, k \mid i_l = [nv_l], i \in [nu, nv]| \\ &\leq n^{-k} \sum_{l=1}^k |i \in (N \cap [1, n])^k, i_l = [nv_l]| \leq n^{-k} \sum_{l=1}^k n^{k-1} = kn^{-1}, \end{aligned} \quad (46)$$

где последний член стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Из (41), (42), (45) и (46) следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{[u, v] \cap B'_k(n)} f_k(y) dy \leq \max_{y \in [u, v]} f_k(y) \sigma^k |[u, v]|. \quad (47)$$

Совершенно аналогично получаем, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[u, v] \cap B'_k(n)} f_k(y) dy \geq \min_{y \in [u, v]} f_k(y) \sigma^k |[u, v]|. \quad (48)$$

Положим

$$f_k^{(n)}(y) = \begin{cases} f_k(y), & y \in B'_k(n), \\ 0, & y \notin B'_k(n). \end{cases}$$

Из (47) и (48) следует, что при $xe \leq u < v$ и $\sum_{j=1}^k v_j < 1$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{[u, v]} f_k^{(n)}(y) dy \leq \max_{y \in [u, v]} f_k(y) \sigma^k |[u, v]| \quad (49)$$

и

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[u, v]} f_k^{(n)}(y) dy \geq \min_{y \in [u, v]} f_k(y) \sigma^k |[u, v]|. \quad (50)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} U_k(n) &= \left\{ i \in \mathbb{N}^k: \sum_{j=1}^k i_j \leq n - a(n), i > be \right\}, \\ V_{kn} &= \bigcup_{i \in U_k(n)} \left(\frac{i}{n} + \frac{[0, e)}{n} \right). \end{aligned}$$

Напомним, что, как и в (4),

$$V_k = V_k(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^k : y \geq xe, \sum_{j=1}^k y_j \leq 1 \right\}.$$

Согласно определению $U_k(n)$ и $A_k^{(1)}(n)$,

$$A_k^{(1)}(n) = U_k(n) \cap A.$$

Так как

$$B'_k(n) = \bigcup_{i \in A_k^{(1)}(n)} \left(\frac{i}{n} + \frac{[0, e]}{n} \right) \subseteq V_{kn}$$

и функция $f_k^{(n)}(y)$ равна нулю вне $B'_k(n)$, в силу (40) и определения функции $f_k^{(n)}(y)$ справедливо равенство

$$I'_k(n) = \int_{V'_k(n)} f_k(y) dy = \int_{B'_k(n)} f_k^{(n)}(y) dy = \int_{V_{kn}} f_k^{(n)}(y) dy. \quad (51)$$

Далее,

$$\begin{aligned} I'_k(n) &= \int_{V_k} f_k^{(n)}(y) dy + \int_{V_{kn} \setminus V_k} f_k^{(n)}(y) dy - \int_{V_k \setminus V_{kn}} f_k^{(n)}(y) dy \\ &= \int_{V_k} f_k^{(n)}(y) dy + \int_{V_{kn} \setminus V_k} f_k^{(n)}(y) dy, \end{aligned} \quad (52)$$

так как $f_k^{(n)}(y) = 0$ при $y \in V_k \setminus V_{kn}$ ($B'_k(n) \subseteq V_{kn}$). Покажем, что при $n \rightarrow \infty$

$$|V_{kn} \setminus V_k| \rightarrow 0. \quad (53)$$

В самом деле, если $y \in V_{kn} \setminus V_k$, то $y = i/n + y_0$, где $y_0 \in [0, e/n)$ и $i \in U_k(n)$, причем

$$\sum_{j=1}^k y_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k i_j + \sum_{j=1}^k y_{0j} \leq 1 - \frac{a(n)}{n} + \frac{k}{n} = 1 - \frac{a(n) - k}{n} \leq 1,$$

так как $a(n) \geq k$ при $n \in \mathbb{N}$. Поэтому существует $j = 1, \dots, k$ такое, что $y_j < x$. Так как

$$\frac{i_j}{n} + y_{0j} < x, \quad \frac{i_j}{n} > \frac{b}{n}, \quad \frac{b}{n} < \frac{i_j}{n} < x - y_{0j} \leq x,$$

получаем, что $i_j \in (b, nx)$. Стало быть,

$$\begin{aligned} |V_{kn} \setminus V_k| &\leq n^{-k} |i \in U_k(n) : \exists j = 1, \dots, k \mid i_j \in (b, nx)| \\ &\leq n^{-k} \sum_{j=1}^k |i \in U_k(n) : i_j \in (b, nx)| \leq n^{-k} \sum_{j=1}^k |i \in (\mathbb{N} \cap [1, n])^k : i_j \in (b, nx)| \\ &\leq n^{-k} k n^{k-1} (|b - nx| + 1) = k \left| \frac{b}{n} - x \right| + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

где последний член стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как $b/n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, (53) выполнено. Поэтому

$$0 \leq \int_{V_{kn} \setminus V_k} f_k^{(n)}(y) dy \leq \int_{V_{kn} \setminus V_k} f_k(y) dy$$

и правая часть стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Из (52) и последнего соотношения следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$I'_k(n) = \int_{V_k} f_k^{(n)}(y) dy + o(1). \quad (54)$$

Стало быть, согласно (29), (34) и (54), при $n \rightarrow \infty$

$$S_k(n) = (1 + o(1))I''_k(n) + o(1), \quad (55)$$

где

$$I''_k(n) = \int_{V_k} f_k^{(n)}(y) dy. \quad (56)$$

При $\delta \in (0, 1 - kx)$ и $\theta \in (0, (1 - kx - \delta)/k)$ положим

$$\begin{aligned} V_k^\delta &= \left\{ y \in \mathbf{R}^k : \sum_{j=1}^k y_j \leq 1 - \delta, y_j \geq x \ j = 1, \dots, k \right\}, \\ T_k(\delta, \theta) &= \left\{ i \in \mathbf{N}^k : \theta \sum_{j=1}^k i_j + \theta k \leq 1 - \delta, \theta i_j \geq x \ j = 1, \dots, k \right\}, \\ V_k^{\delta, \theta} &= \bigcup_{i \in T_k(\delta, \theta)} \theta(i + [0, e)) = \bigcup_{i \in T_k(\delta, \theta)} \Delta_i, \end{aligned}$$

где $\Delta_i = \theta(i + [0, e))$. Нетрудно заметить, что при указанных условиях на δ и θ множества V_k^δ и $V_k^{\delta, \theta}$ имеют положительную меру Лебега, а множество $T_k(\delta, \theta)$ непусто. Применяя неравенства (49) и (50) к каждому кубу Δ_i , $i \in T_k(\delta, \theta)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{V_k^{\delta, \theta}} f_k^{(n)}(y) dy &\geq \sigma^k \sum_{i \in T_k(\delta, \theta)} \min_{y \in \Delta_i} f_k(y) |\Delta_i|, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{V_k^{\delta, \theta}} f_k^{(n)}(y) dy &\leq \sigma^k \sum_{i \in T_k(\delta, \theta)} \max_{y \in \Delta_i} f_k(y) |\Delta_i| \end{aligned}$$

(здесь и далее $\bar{H}$ обозначает замыкание множества $H \subseteq \mathbf{R}^k$). Отсюда, с учетом неравенства $f_k^{(n)}(y) \leq f_k(y)$ и включений $V_k^{\delta, \theta} \subseteq V_k^\delta \subseteq V_k$, получаем, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{V_k} f_k^{(n)}(y) dy \geq \sigma^k \sum_{i \in T_k(\delta, \theta)} \min_{y \in \Delta_i} f_k(y) |\Delta_i|, \quad (57)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{V_k} f_k^{(n)}(y) dy \leq \sigma^k \sum_{i \in T_k(\delta, \theta)} \max_{y \in \Delta_i} f_k(y) |\Delta_i| + \int_{V_k \setminus V_k^{\delta, \theta}} f_k(y) dy. \quad (58)$$

Докажем, что при $\theta \rightarrow 0$

$$|V_k^\delta \setminus V_k^{\delta, \theta}| \rightarrow 0, \quad (59)$$

$$\Sigma_1(\delta, \theta) = \sum_{i \in T_k(\delta, \theta)} \max_{y \in \Delta_i} f_k(y) |\Delta_i| \rightarrow \int_{V_k^\delta} f_k(y) dy, \quad (60)$$

$$\Sigma_2(\delta, \theta) = \sum_{i \in T_k(\delta, \theta)} \min_{y \in \Delta_i} f_k(y) |\Delta_i| \rightarrow \int_{V_k^\delta} f_k(y) dy. \quad (61)$$

Рассмотрим

$$T'_k(\delta, \theta) = \left\{ i \in \mathbb{N}^k : \theta \sum_{j=1}^k i_j \leq 1 - \delta, \theta \sum_{j=1}^k i_j + \theta k > 1 - \delta, \theta i_j \geq x, j = 1, \dots, k \right\},$$

и срезанные кубы

$$\Delta_i = \theta(i + [0, e)) \cap V_k^\delta, \quad i \in T'_k(\delta, \theta).$$

Пусть

$$\begin{aligned} T''_k(\delta, \theta) &= T_k(\delta, \theta) \cup T'_k(\delta, \theta), \\ \Sigma_{\max}(\delta, \theta) &= \Sigma_1(\delta, \theta) + \sum_{i \in T'_k(\delta, \theta)} \max_{y \in \Delta_i} f_k(y) |\Delta_i|. \end{aligned} \quad (62)$$

Сумма $\Sigma_{\max}(\delta, \theta)$ есть верхняя сумма Дарбу для k -мерного интеграла Римана функции f_k по выбранному нами разбиению Δ_i , $i \in T''_k(\delta, \theta)$ множества V_k^δ . Поскольку функция f_k непрерывна на множестве V_k^δ , мы видим, что при $\theta \rightarrow 0$

$$\Sigma_{\max}(\delta, \theta) \rightarrow \int_{V_k^\delta} f_k(y) dy. \quad (63)$$

Ясно, что

$$|V_k^\delta \setminus V_k^{\delta, \theta}| = \sum_{i \in T'_k(\delta, \theta)} |\Delta_i| \leq \theta^k \sum_{i \in T'_k(\delta, \theta)} 1 = \theta^k |T'_k(\delta, \theta)|.$$

Заметим, что при $i \in T'_k(\delta, \theta)$

$$\sum_{j=1}^k i_j \leq \frac{1 - \delta}{\theta}, \quad \sum_{j=1}^k i_j + k > \frac{1 - \delta}{\theta}$$

или

$$\sum_{j=1}^k i_j \in \left(\frac{1 - \delta}{\theta} - k, \frac{1 - \delta}{\theta} \right].$$

На полуинтервале $D = ((1 - \delta)/\theta - k, (1 - \delta)/\theta]$ не более k целых точек, поэтому

$$|T'_k(\delta, \theta)| \leq \left| i \in ((1, \theta^{-1}) \cap \mathbb{N})^k, \sum_{j=1}^k i_j \in D \right| \leq \frac{k}{\theta^{k-1}}.$$

Иными словами,

$$|V_k^\delta \setminus V_k^{\delta, \theta}| \leq \frac{\theta^k}{\theta^{k-1}} k = \theta k$$

и правая часть этого соотношения стремится к нулю при $\theta \rightarrow 0$.

Из последнего соотношения следует (59). Далее, в силу (59),

$$\sum_{i \in T'_k(\delta, \theta)} \max_{y \in \Delta_i} f_k(y) |\Delta_i| \leq \max_{y \in V_k^\delta} f_k(y) |V_k^\delta \setminus V_k^{\delta, \theta}| = o(1) \quad (64)$$

при $\theta \rightarrow 0$.

Из (62), (63) и (64) следует (60). Точно так же доказывается (61). Ясно, что

$$\int_{V_k \setminus V_k^{\delta, \theta}} f_k(y) dy = \int_{V_k \setminus V_k^\delta} f_k(y) dy + \int_{V_k^\delta \setminus V_k^{\delta, \theta}} f_k(y) dy, \quad (65)$$

причем

$$\int_{V_k^\delta \setminus V_k^{\delta, \theta}} f_k(y) dy \leq \max_{y \in V_k^\delta} f_k(y) |V_k^\delta \setminus V_k^{\delta, \theta}| \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0. \quad (66)$$

Переходя в неравенствах (57) и (58) к пределу по $\theta \rightarrow 0$ и учитывая соотношения (60), (61) (65) и (66), получаем, что

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{V_k} f_k^{(n)}(y) dy &\leq \sigma^k \int_{V_k^\delta} f_k(y) dy + \int_{V_k \setminus V_k^\delta} f_k(y) dy, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{V_k} f_k^{(n)}(y) dy &\geq \sigma^k \int_{V_k^\delta} f_k(y) dy. \end{aligned}$$

Переходя в этих неравенствах к пределу по $\delta \rightarrow 0$, получаем, что

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{V_k} f_k^{(n)}(y) dy &\leq \sigma^k \int_{V_k} f_k(y) dy, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{V_k} f_k^{(n)}(y) dy &\geq \sigma^k \int_{V_k} f_k(y) dy. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{V_k} f_k^{(n)}(y) dy = \sigma^k \int_{V_k} f_k(y) dy. \quad (67)$$

Существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_k(n) = \sigma^k \int_{V_k} f_k(y) dy \quad (68)$$

следует из (55), (56) и (67). Однако согласно (3) и определению функции $f_k(y)$

$$\int_{V_k} f_k(y) dy = J_{\sigma k}(x). \quad (69)$$

Соотношение (14) следует из (68), (69) и (18).

Теорема доказана.

Из приведенных примеров 1–7 в доказательстве нуждается только утверждение примера 2.

Доказательство утверждения примера 2. В [16] показано, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} p(n) &\sim \frac{1}{n} \exp \left(\sum_{k \in A} \frac{1}{k} (1 - 1/n)^k \right) / \Gamma(\sigma) \\ &= \frac{1}{n} \exp (f(1 - 1/n)) / \Gamma(\sigma), \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$f(s) = \sum_{k \in A} \frac{s^k}{k}, \quad s \in [0, 1).$$

Согласно соотношению (14) работы [38] при $n \rightarrow \infty$ и $\lambda = -\ln(1 - 1/n)$

$$f(1 - 1/n) = f(\exp(-\lambda)) = \sum_{k \in A(1/\lambda)} 1/k - \sigma\gamma + o(1), \quad (71)$$

где γ — постоянная Эйлера и $A(t) = \{k \in A: k \leq t\}$ при $t > 0$. Заметим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} = 1 - e^{-\lambda} < \lambda,$$

откуда следует, что $1/\lambda < n$. Поэтому

$$\sum_{k \in A(n)} \frac{1}{k} = \sum_{k \in A(1/\lambda)} \frac{1}{k} + \sum_{k \in A(n), k > 1/\lambda} \frac{1}{k}.$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k \in A(n)} \frac{1}{k} - \sum_{k \in A(1/\lambda)} \frac{1}{k} \leq \frac{(n - 1/\lambda + 1)}{[1/\lambda] + 1} \\ &\leq \lambda(n - 1/\lambda + 1) = \lambda n - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (72)$$

при $n \rightarrow \infty$, так как при $n \rightarrow \infty$

$$\ln(1 - 1/n) = -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Из (71) и (72) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$f(1 - 1/n) = \sum_{k \in A(n)} 1/k - \sigma\gamma + o(1). \quad (73)$$

Из (70) и (73) получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$p(n) \sim \frac{1}{n} \exp \left(\sum_{k \in A(n)} \frac{1}{k} \right) e^{-\sigma\gamma} / \Gamma(\sigma) = n^{\sigma-1} L_1(n) e^{-\sigma\gamma} / \Gamma(\sigma),$$

где функция

$$L_1(n) = \exp \left(\sum_{k \in A(n)} \frac{1}{k} - \sigma \ln n \right)$$

медленно меняется на бесконечности, поскольку согласно лемме 1 в [38] последовательность $\exp \left(\sum_{k \in A(n)} \frac{1}{k} \right)$ правильно меняется на бесконечности с показателем σ , если множество A имеет асимптотическую плотность $\sigma > 0$.

Утверждение примера 2 доказано.

Список литературы

1. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е., Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок. *Матем. сб.* (1976) **99**, №1, 121–133.
2. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е., О некоторых классах случайных величин на циклах случайных подстановок. *Матем. сб.* (1979) **108**, №1, 87–99.
3. Болотников Ю. В., Тараканов В. Е., Предельные распределения в задачах о циклах случайных подстановок. *Комбинаторный и асимптотический анализ*. Изд-во Красноярского ун-ва, Красноярск, 1977, с. 62–68.
4. Бендер Э. А., Асимптотические методы в теории перечислений. В кн.: *Перечислительные задачи комбинаторного анализа*. Мир, Москва, 1979, с. 266–310.
5. Владимиров В. С., Завьялов Б. И., Тауберо́вы теоремы в квантовой теории поля. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики* (1980) **15**, 95–130.
6. Воынец Л. М., Число решений уравнения в симметрической группе. В сб.: *Вероятностные процессы и их приложения*. МИЭМ, Москва, 1985, с. 104–109.
7. Воынец Л. М., Число решений уравнения $x^s = e$ в симметрической группе. *Матем. заметки* (1986) **40**, 586–589.
8. Воынец Л. М., Пример нестандартной асимптотики числа подстановок с ограничениями на длины циклов. В сб.: *Вероятностные процессы и их применения*. МИЭМ, Москва, 1989, с. 85–90.
9. Гончаров В. Л., Из области комбинаторики. *Изв. АН СССР, сер. матем.* (1944) **8**, 3–48.
10. Grusho A. A., Properties of random permutations with constraints on the maximum cycle length. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*. TVP/VSP, Moscow/Utrecht, 1993, pp. 459–469.
11. Ewens W. J., The sampling theory of selectively neutral alleles. *Theor. Popul. Biol.* (1972) **3**, 87–112.
12. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., О случайных подстановках. *Труды по дискретной математике* (2002) **5**, 73–92.
13. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Метод В. Л. Гончарова и его развитие в анализе различных моделей случайных подстановок. *Теория вероятностей и ее применения* (2002) **47**, №3, 558–566.
14. Колчин А. В., Уравнения, содержащие неизвестную подстановку. *Дискретная математика* (1994) **12**, №1, 100–115.
15. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
16. Колчин В. Ф., О числе циклов подстановки с ограничениями на длины циклов. *Дискретная математика* (1989) **1**, №2, 97–109.
17. Kolchin V. F., The number of permutations with cycle lengths from a fixed set. In: *Random Graphs*, v. 2. Wiley, Chichester, 1992, pp. 139–149.

18. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
19. Manstavičius E., On random permutations without cycles of some lengths. *Period. Math. Hung.* (2001) **42**, 37–44.
20. Минеев М. П., Павлов А. И., О числе подстановок специального вида. *Матем. сб.* (1976) **99**, №3, 421–429.
21. Минеев М. П., Павлов А. И., Об уравнении в подстановках. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР* (1976) **142**, 182–294.
22. Павлов А. И., О числе циклов и цикловой структуре подстановок некоторых классов. *Матем. сб.* (1984) **124**, №4, 536–556.
23. Павлов А. И., О некоторых классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. *Матем. сб.* (1986) **129**, №2, 252–263.
24. Павлов А. И., О подстановках с длинами циклов из заданного множества. *Теория вероятностей и ее применения* (1986) **31**, 618–619.
25. Павлов А. И., О числе подстановок с длинами циклов из заданного множества. *Дискретная математика* (1991) **3**, №3, 109–123.
26. Павлов А. И., О числе подстановок с конечными множеством длин циклов. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН* (1994) **207**, 256–267.
27. Павлов А. И., Асимптотика числа подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. *Докл. РАН* (1994) **335**, №5, 556–559.
28. Павлов А. И., О двух классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. *Матем. заметки* (1997) **62**, №6, 881–891.
29. Постников А. Г., *Введение в аналитическую теорию чисел*. Наука, Москва, 1971.
30. Сачков В. Н., Отображения конечного множества с ограничениями на контуры и высоту. *Теория вероятностей и ее применения* (1972) **17**, №4, 679–694.
31. Сачков В. Н., Случайные отображения ограниченной высоты. *Теория вероятностей и ее применения* (1973) **18**, №1, 122–132.
32. Сачков В. Н., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.
33. Сенета Е., *Правильно меняющиеся функции*. Наука, Москва, 1985.
34. Тараканов В. Е., Чистяков В. П., О цикловой структуре случайных подстановок. *Матем. сб.* (1975) **96**, №4, 594–600.
35. Shepp L. A., Lloyd S. P., Ordered cycle lengths in a random permutation. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1966) **121**, №2, 340–357.
36. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2. Мир, Москва, 1984.
37. Якимив А. Л., О числе A -подстановок. *Матем. сб.* (1989) **180**, №2, 294–303.
38. Якимив А. Л., О подстановках с длинами циклов из заданного множества. *Дискретная математика* (1989) **1**, №1, 105–116.
39. Якимив А. Л., О случайных подстановках с длинами циклов из заданного множества. В сб.: *Вероятностные процессы и их приложения*. МИЭМ, Москва, 1991, с. 24–27.
40. Якимив А. Л., О некоторых классах подстановок с длинами циклов из заданного множества. *Дискретная математика* (1992) **3**, №3, 128–134.
41. Якимив А. Л., О числе подстановок с длинами циклов из случайного множества. *Дискретная математика* (2000) **12**, №4, 53–62.
42. Yakymiv A. L., Limit theorems for random A -permutations. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*. TVP/VSP, Moscow/Utrecht, 1993, pp. 459–469.

Статья поступила 16.12.2004.

Переработанный вариант поступил 15.03.2005.