Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Попков, Проверяющие и диагностические тесты для функциональных элементов, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 2, 83–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1282>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:34:50

Проверяющие и диагностические тесты для функциональных элементов

© 2014 г. К. А. Попков*

Рассматриваются задачи проверки исправности и диагностики состояний N функциональных элементов, реализующих в исправном состоянии заданную булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, путём составления из них схем с одним выходом и наблюдения выдаваемых этими схемами значений на любых входных наборах значений переменных. Допускаются произвольные константные неисправности на выходах функциональных элементов; при этом предполагается, что не более k элементов неисправны, где k — заданное натуральное число, не превосходящее N . Требуется минимизировать число схем, необходимых для проверки исправности и определения состояний всех функциональных элементов. Доказано, что, если $f \notin \{x_1 \& \dots \& x_n, x_1 \vee \dots \vee x_n, \bar{x}_1\}$ и выполнено некоторое условие на k и N , то для проверки исправности всех элементов достаточно $2k + 1$ схем. Если при этом функция f нелинейна, то для определения состояний всех элементов также достаточно $2k + 1$ схем.

Ключевые слова: функциональный элемент, неисправность, схема, проверяющий тест, диагностический тест.

Введение

В статье рассматриваются задачи проверки исправности и распознавания состояний функциональных элементов с использованием экспериментов, заключающихся в составлении произвольных схем из заданных функциональных элементов с последующим "прозваниванием" этих схем, т. е. нахождением булевых функций, реализуемых составляемыми схемами. Суть общепринятой математической модели схемы из функциональных элементов и тех элементов, из которых строятся эти схемы, с исчерпывающей полнотой и ясностью представлена в [1]; именно такая математическая модель является объектом исследования и рассматривается ниже.

Представим, что имеются N функциональных элементов $E_1, \dots, E_N$ ($N \geq 1$). Каждый элемент, рассматриваемый как простейшая схема из функциональных элементов, имеет $n \geq 1$ входов $v_1, \dots, v_n$ и один выход и в исправном состоянии реализует на выходе заданную булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ — переменные, подаваемые на его входы, соответственно, $v_1, \dots, v_n$ (считаем, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных и, как следствие, отлична от константы). В неисправном состоянии каждый элемент реализует одну из констант 0 или 1. Неисправность элемента E_i , при которой он реализует константу

*Место работы: МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: kirill-formulist@mail.ru

0 (или 1), будем называть неисправностью E_i типа 0 (соответственно, 1). Предполагается, что среди данных N функциональных элементов не более k элементов могут быть неисправны, где k – заданное натуральное число, $k \leq N$. Можно составлять любые схемы с одним выходом из данных функциональных элементов и наблюдать выдаваемые схемами значения на любых наборах значений переменных.

Задача заключается в том, чтобы протестировать функциональные элементы, то есть для каждого из них определить, исправен данный элемент или неисправен (задача проверки), и, в дополнение к этому, определить тип неисправности каждого неисправного элемента (задача диагностики), используя при тестировании по возможности меньшее число схем.

1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Будем называть *неисправностью системы элементов* любое множество неисправностей функциональных элементов при условии, что число этих неисправностей не больше k . (В частности, случай, когда все элементы исправны, является одним из видов неисправности системы элементов.)

Здесь и далее будем предполагать, что для любого i от 1 до N элемент E_i имеет номер i . Тогда неисправность любого элемента можно представить в виде упорядоченной пары $\{i, \delta\}$, где i – номер этого элемента, δ – булева константа, которую он реализует. Соответственно, любую неисправность системы элементов можно представить в виде множества $\{\{i_1, \delta_1\}, \dots, \{i_s, \delta_s\}\}$, где s – число неисправных элементов, $i_1, \dots, i_s$ – номера неисправных элементов, δ_j – булева константа, которую реализует элемент E_{i_j} .

Диагностическим тестом назовём такой набор схем $S_1, \dots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, что для любых двух различных неисправностей системы элементов наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают (т. е. существует такая схема S_j , что реализуемая этой схемой функция при первой неисправности не совпадает с реализуемой этой же схемой функцией при второй неисправности). Число l назовём *длиной* этого теста. (Здесь используется терминология, общепринятая для диагностики управляющих систем: см., например, [2].)

Проверяющим тестом назовём такой набор схем $S_1, \dots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, что для любых двух неисправностей системы элементов, при которых множества неисправных элементов различны, наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают. Число l назовём *длиной* этого теста.

Содержательный смысл этих определений состоит в следующем: диагностический (проверяющий) тест — это такой набор схем $S_1, \dots, S_l$, составленных из заданных N функциональных элементов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить состояние (соответственно, исправность или неисправность) каждого из N элементов. При этом проверяющий тест не обязан определять тип неисправности (0 или 1) каждого неисправного элемента.

Введём функции $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$, равные длинам самого короткого, соответственно, проверяющего и диагностического тестов для N функциональных элементов, среди которых не более чем k неисправных (в исправном состоянии каждый элемент реализует функцию f).

Отметим, что для любых f, N и k выполняется соотношение

$$L_d(f, N, k) \geq L_c(f, N, k), \quad (1)$$

поскольку любой диагностический тест, очевидно, является проверяющим.

В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины N , очевидно, всегда можно взять множество из N схем, каждая из которых представляет собой один из заданных функциональных элементов. Отсюда $L_c(f, N, k) \leq N$ и $L_d(f, N, k) \leq N$ для любых f, N и k . Легко получить также следующие нижние оценки: $L_c(f, N, k) \geq k$, $L_d(f, N, k) \geq k$. Действительно, если бы существовал проверяющий тест длины $l \leq k - 1$ (состоящий, для определённости, из схем $S_1, \dots, S_l$), то в силу того, что общее число функциональных элементов равно $N \geq k > l$, нашёлся бы такой элемент E из числа $E_1, \dots, E_N$, который не является выходным элементом ни в одной из схем $S_1, \dots, S_l$. Тогда, скажем, при неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_1, \dots, S_l$ (а число таких элементов не превосходит l) каждая из этих схем реализовывала бы константу 0 и нельзя было бы ничего сказать относительно исправности элемента E , что противоречит определению проверяющего теста. Таким образом, $L_c(f, N, k) \geq k$; отсюда $L_d(f, N, k) \geq k$ в силу (1).

Итак, для любых f, N и k выполнены следующие тривиальные оценки:

$$k \leq L_c(f, N, k) \leq N, \quad (2)$$

$$k \leq L_d(f, N, k) \leq N. \quad (3)$$

Отметим, что если на входы схем, составленных из заданных функциональных элементов, разрешить подавать наряду с переменными константы 0 и 1, то значения функций $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ от этого не изменятся. В самом деле, поскольку класс допустимых схем будет расширен, то эти значения не увеличатся. С другой стороны, пусть некоторый набор схем $S_1, \dots, S_l$ из этого расширенного класса является диагностическим (проверяющим) тестом, и пусть y_0 и y_1 — переменные, отличные от всех переменных всех схем $S_1, \dots, S_l$ и различные между собой. Подадим на все те входы схем $S_1, \dots, S_l$, на которые подавались константы 0 и 1, переменные, соответственно, y_0 и y_1 . Полученный набор схем (обозначим его $\{S'_1, \dots, S'_l\}$) будет уже допустимым в исходной постановке задачи (см. рис. 1). Но он также будет диагностическим (проверяющим) тестом. Действительно, при тестировании схем $S'_1, \dots, S'_l$ можно ограничиться только теми входными наборами значений переменных, на которых $y_0 = 0$ и $y_1 = 1$. В этом случае схемы $S'_1, \dots, S'_l$ будут очевидным образом функционировать в точности как схемы $S_1, \dots, S_l$, а значит, по их выходным функциям (которые являются подфункциями функций, реализуемых схемами $S'_1, \dots, S'_l$, при подстановке в них вместо переменных y_0 и y_1 , соответственно, констант 0 и 1) можно будет однозначно определить состояние (соответственно, исправность или неисправность) каждого функционального элемента. Отсюда ясно, что набор $\{S'_1, \dots, S'_l\}$ является диагностическим (проверяющим) тестом в исходной постановке задачи. Таким образом, для каждого диагностического (проверяющего) теста в расширенном классе схем можно построить соответствующий тест такой же

(i - любое число от 1 до l)

Рис. 1

длины в исходной постановке задачи, откуда следует, что после расширения класса схем значения функций $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ не уменьшаются.

Поскольку далее нас будут интересовать оценки для функций $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$, будем без ограничения общности считать, что на входы схем разрешается подавать константы 0 и 1.

Пусть функциональный элемент E имеет два входа и реализует в исправном состоянии функцию вида $x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2}$ или $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2}$, где σ_1, σ_2 — некоторые булевы константы. Тогда назовём его вход, отвечающий переменной x_i , $i = 1, 2$, *прямым*, если $\sigma_i = 1$, и *инверсионным*, если $\sigma_i = 0$.

2. Формулировка и доказательство основного результата

Основным результатом данной работы является следующая теорема, позволяющая в ряде случаев существенно улучшить верхние оценки для функций $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ в (2) и (3) и приблизить их к нижним.

Теорема 1. Пусть булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не совпадает ни с одной из функций $x_1 \& \dots \& x_n$, $x_1 \vee \dots \vee x_n$, $\overline{x_1}$ и выполнено условие $8k + \frac{5}{2} \leq \sqrt{N}$. Тогда:

- 1) $L_c(f, N, k) \leq 2k + 1$,
- 2) если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ нелинейна, то $L_d(f, N, k) \leq 2k + 1$.

Доказательство распадается на ряд этапов; некоторые из них представлены в виде лемм.

По условию рассматриваемой задачи функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных и отлична от константы; из условий теоремы следует, что f отлична также от функций x_1 , $\overline{x_1}$. Поэтому $n \geq 2$.

Лемма 1. Из функции $f(x_1, \dots, x_n)$ отождествлением и переименованием переменных и подстановкой вместо некоторых переменных констант 0 и 1 можно

получить функции $f_D(x, y)$ и $f_K(x, y)$, существенно зависящие от обеих своих переменных и такие, что $f_D(x, y)$ не совпадает с $x \vee y$, а $f_K(x, y)$ не совпадает с $x \& y$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ монотонна. По условию теоремы данная функция не совпадает ни с одной из функций $x_1 \& \dots \& x_n$, $x_1 \vee \dots \vee x_n$. Воспользуемся известным фактом о том, что из монотонной функции, существенно зависящей по крайней мере от двух переменных и не являющейся конъюнкцией, путём отождествления и переименования переменных и подстановки вместо некоторых переменных константы 1 можно получить функцию $x \vee y$ (см., например, [3], стр. 19, утверждение 4). По принципу двойственности (см., например, [3], стр. 19, утверждение 3) из этого факта следует, что из монотонной функции, существенно зависящей по крайней мере от двух переменных и не являющейся дизъюнкцией, путём отождествления и переименования переменных и подстановки вместо некоторых переменных константы 0 можно получить функцию $x \& y$. Тогда, положив $f_K(x, y) = x \vee y$, а $f_D(x, y) = x \& y$, получим утверждение леммы.

2. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не монотонна. Тогда существуют два таких соседних набора $\tilde{\sigma}_0 = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$ и $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, что $f(\tilde{\sigma}_0) = 1$ и $f(\tilde{\sigma}_1) = 0$. Без ограничения общности будем считать, что $i = n$, т.е. $\tilde{\sigma}_0 = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, 0)$, $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, 1)$. Рассмотрим следующую последовательность функций:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_n), \\ f_2(x_2, \dots, x_n) &= f(\sigma_1, x_2, \dots, x_n), \\ f_3(x_3, \dots, x_n) &= f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \dots, x_n), \\ &\dots \\ f_n(x_n) &= f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Для любого i от 1 до n выполняются равенства

$$\begin{aligned} f_i(\sigma_i, \dots, \sigma_{n-1}, 0) &= f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1, \\ f_i(\sigma_i, \dots, \sigma_{n-1}, 1) &= f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, 1) = 0. \end{aligned}$$

(В случае $i = n$ эти равенства имеют вид $f_n(0) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$, $f_n(1) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, 1) = 0$.) Значит, каждая из функций $f_1(x_1, \dots, x_n)$, $f_2(x_2, \dots, x_n)$, $\dots$, $f_n(x_n)$ существенно зависит от переменной x_n . Так как по условию $f_1(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит по крайней мере от двух переменных, а $f_n(x_n)$ существенно зависит от одной переменной, то существует такое натуральное число m на отрезке от 1 до $n - 1$, что $f_m(x_m, \dots, x_n)$ существенно зависит по крайней мере от двух переменных, а $f_{m+1}(x_{m+1}, \dots, x_n)$ существенно зависит только от одной переменной (и эта переменная, очевидно, x_n). Из равенств

$$\begin{aligned} f_{m+1}(\sigma_{m+1}, \dots, \sigma_{n-1}, 0) &= 1, \\ f_{m+1}(\sigma_{m+1}, \dots, \sigma_{n-1}, 1) &= 0 \end{aligned}$$

получаем, что $f_{m+1}(x_{m+1}, \dots, x_n) = \overline{x_n}$. Разложим функцию $f_m(x_m, \dots, x_n)$ по переменной x_m :

$$f_m(x_m, \dots, x_n) = x_m^{\sigma_m} f_m(\sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \vee \overline{x_m^{\sigma_m}} f_m(\overline{\sigma_m}, x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Заметим, что $f_m(\sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = f_{m+1}(x_{m+1}, \dots, x_n) = \overline{x_n}$, поэтому

$$f_m(x_m, \dots, x_n) = x_m^{\sigma_m} \overline{x_n} \vee x_m^{\overline{\sigma_m}} f_m(\overline{\sigma_m}, x_{m+1}, \dots, x_n). \quad (4)$$

Заметим также, что функция $f_m(\overline{\sigma_m}, x_{m+1}, \dots, x_n)$ не может быть тождественно равна $\overline{x_n}$, поскольку в этом случае равенство (4) приняло бы вид $f_m(x_m, \dots, x_n) = x_m^{\sigma_m} \overline{x_n} \vee x_m^{\overline{\sigma_m}} \overline{x_n} = \overline{x_n}$ и функция $f_m(x_m, \dots, x_n)$ зависела бы существенно только от одной переменной. Поэтому существуют такие булевы константы $\delta_{m+1}, \dots, \delta_{n-1}$, что функция $\psi(x_n) = f_m(\overline{\sigma_m}, \delta_{m+1}, \dots, \delta_{n-1}, x_n)$ не совпадает с $\overline{x_n}$. Отсюда и из (4) получаем, что

$$\begin{aligned} f_m(x_m, \delta_{m+1}, \dots, \delta_{n-1}, x_n) &= x_m^{\sigma_m} \overline{x_n} \vee x_m^{\overline{\sigma_m}} f_m(\overline{\sigma_m}, \delta_{m+1}, \dots, \delta_{n-1}, x_n) = \\ &= x_m^{\sigma_m} \overline{x_n} \vee x_m^{\overline{\sigma_m}} \psi(x_n), \end{aligned}$$

где $\psi(x_n)$ — одна из функций 0, 1, x_n . Но это означает, как нетрудно заметить, что подстановкой констант $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}, \delta_{m+1}, \dots, \delta_{n-1}$ вместо переменных $x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_{n-1}$ и переименованием переменных x_m и x_n можно получить функцию $\varphi(x, y)$, существенно зависящую от обеих переменных и не совпадающую ни с одной из функций $x \vee y$, $x \& y$. Тогда, положив $f_K(x, y) = f_D(x, y) = \varphi(x, y)$, получим утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ линейна, то из неё можно переименованием переменных и подстановкой вместо всех её переменных, кроме двух, константы 0 (для определённости) получить линейную функцию $f_{\oplus}(x, y)$, существенно зависящую от обеих своих переменных. Если же f нелинейна, то воспользуемся известным фактом о том, что из любой нелинейной булевой функции путём переименования переменных и подстановки вместо некоторых переменных констант 0 и 1 можно получить нелинейную функцию $f_L(x, y)$ от двух переменных, существенно зависящую от обеих своих переменных (см., например, [4], стр. 39; в качестве нелинейной функции от двух переменных достаточно взять функцию $\varphi(x_1, x_2)$). Пусть $f_D(x, y)$ и $f_K(x, y)$ — функции, определяемые утверждением леммы 1. Определим функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ следующим образом:

- если функция f нелинейна и среди функций $f_D(x, y)$, $f_K(x, y)$, $f_L(x, y)$ есть функция $f'(x, y)$, не совпадающая ни с одной из функций $x \vee y$, $x \& y$, $x \oplus y$ и $x \oplus y \oplus 1$, то положим $f_1(x, y) = f_2(x, y) = f'(x, y)$ и назовём этот случай A_1 ;

- если функция f нелинейна, каждая из функций $f_D(x, y)$, $f_K(x, y)$, $f_L(x, y)$ совпадает с одной из функций $x \vee y$, $x \& y$, $x \oplus y$ и $x \oplus y \oplus 1$ и среди функций $f_D(x, y)$, $f_K(x, y)$ есть линейная функция $f''(x, y)$, то положим $f_1(x, y) = f_L(x, y)$, $f_2(x, y) = f''(x, y)$ и назовём этот случай A_2 (очевидно, что в данном случае $f_L(x, y)$ — это одна из функций $x \& y$, $x \vee y$);

- если функция f нелинейна, каждая из функций $f_D(x, y)$, $f_K(x, y)$, $f_L(x, y)$ совпадает с одной из функций $x \vee y$, $x \& y$, $x \oplus y$ и $x \oplus y \oplus 1$ и среди функций $f_D(x, y)$, $f_K(x, y)$ нет линейной функции, то очевидно, что $f_D(x, y) = x \& y$, $f_K(x, y) = x \vee y$ (других вариантов быть не может); положим тогда $f_1(x, y) = x \& y$, $f_2(x, y) = x \vee y$ и назовём этот случай A_3 ;

- если функция f линейна, то положим $f_1(x, y) = f_2(x, y) = f_{\oplus}(x, y)$ и назовём этот случай A_4 .

Из условия $8k + \frac{5}{2} \leq \sqrt{N}$ теоремы следует, что $\lceil \sqrt{N} \rceil \geq 11$. Отсюда и из постулата Бертрана (см., например, [5], стр. 30) можно получить, что на интервале $(\lceil \sqrt{N} \rceil -$

$1; 2\lceil\sqrt{N}\rceil - 4)$, т. е. на отрезке $[\lceil\sqrt{N}\rceil; 2\lceil\sqrt{N}\rceil - 5]$, содержится хотя бы одно простое число. Обозначим через p любое простое число из этого отрезка. Тогда для p выполнены следующие соотношения:

$$p \geq \lceil\sqrt{N}\rceil \geq \sqrt{N} \geq 8k + \frac{5}{2},$$

$$\begin{aligned} p(4k+2) &= \frac{p}{2}(8k + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}) \leq \frac{p}{2}(\sqrt{N} + \frac{3}{2}) \leq \frac{p}{2} \cdot \frac{N}{\sqrt{N} - \frac{3}{2}} = \\ &= \frac{pN}{2\sqrt{N} - 3} \leq \frac{pN}{2\lceil\sqrt{N}\rceil - 5} \leq \frac{pN}{p} = N, \end{aligned}$$

откуда

$$p \geq \sqrt{N}, \quad (5)$$

$$p \geq 2k + 1, \quad (6)$$

$$p(4k+2) \leq N. \quad (7)$$

Введём множество $B = \{E_1, \dots, E_N\}$, состоящее из всех заданных функциональных элементов, и следующие его подмножества: $D_{i,j}$ ($i = 1, \dots, 2k+1$, $j = 1, \dots, p$) — множества, состоящие из всех элементов, номера которых представимы в виде $pt + 1 + ((j - 1 + m(i - 1)) \bmod p)$, где m — целое неотрицательное число; G_s ($s = 1, \dots, 4k+2$) — множества, состоящие из всех элементов, номера которых представимы в виде $p(s - 1) + t$, где t — натуральное число от 1 до p ; $R_i = G_{2i-1} \cup G_{2i}$ ($i = 1, \dots, 2k+1$). Отметим, что множества G_s попарно не пересекаются при различных s , а множества R_i попарно не пересекаются при различных i ; кроме того, $|G_s| = p$ для любого s от 1 до $4k+2$ в силу (7).

Пример 1. Вид множеств $D_{i,j}$, G_s , R_i для $N = 46$, $k = 1$, $p = 7$.

$$\begin{aligned} D_{1,1} &= \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43\} & D_{2,1} &= \{1, 9, 17, 25, 33, 41\} & D_{3,1} &= \{1, 10, 19, 28, 30, 39\} \\ D_{1,2} &= \{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44\} & D_{2,2} &= \{2, 10, 18, 26, 34, 42, 43\} & D_{3,2} &= \{2, 11, 20, 22, 31, 40\} \\ D_{1,3} &= \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\} & D_{2,3} &= \{3, 11, 19, 27, 35, 36, 44\} & D_{3,3} &= \{3, 12, 21, 23, 32, 41, 43\} \\ D_{1,4} &= \{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\} & D_{2,4} &= \{4, 12, 20, 28, 29, 37, 45\} & D_{3,4} &= \{4, 13, 15, 24, 33, 42, 44\} \\ D_{1,5} &= \{5, 12, 19, 26, 33, 40\} & D_{2,5} &= \{5, 13, 21, 22, 30, 38, 46\} & D_{3,5} &= \{5, 14, 16, 25, 34, 36, 45\} \\ D_{1,6} &= \{6, 13, 20, 27, 34, 41\} & D_{2,6} &= \{6, 14, 15, 23, 31, 39\} & D_{3,6} &= \{6, 8, 17, 26, 35, 37, 46\} \\ D_{1,7} &= \{7, 14, 21, 28, 35, 42\} & D_{2,7} &= \{7, 8, 16, 24, 32, 40\} & D_{3,7} &= \{7, 9, 18, 27, 29, 38\} \end{aligned}$$

$$G_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$R_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

$$G_2 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

$$G_3 = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$$

$$R_2 = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\}$$

$$G_4 = \{22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\}$$

$$G_5 = \{29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$$

$$R_3 = \{29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42\}$$

$$G_6 = \{36, 37, 38, 39, 40, 41, 42\}$$

(Для удобства, функциональный элемент с номером n обозначаем просто n , где $n = 1, 2, \dots, 46$.)

Эти множества изображены на рис. 2.

Рис. 2

Лемма 2. Справедливы следующие утверждения.

1) Для любых таких $i \in \{1, \dots, 2k+1\}$, $j_1, j_2 \in \{1, \dots, p\}$, что $j_1 \neq j_2$ выполняется соотношение $D_{i,j_1} \cap D_{i,j_2} = \emptyset$.

2) Для любого $i \in \{1, \dots, 2k+1\}$ выполняется соотношение $\bigcup_{j=1}^p D_{i,j} = B$.

3) Для любых таких $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 2k+1\}$, $j_1, j_2 \in \{1, \dots, p\}$, что $i_1 \neq i_2$, множества D_{i_1,j_1} и D_{i_2,j_2} пересекаются не более чем по одному элементу.

4) Для любых $i \in \{1, \dots, 2k+1\}$, $j \in \{1, \dots, p\}$, $s \in \{1, \dots, 4k+2\}$ множество $D_{i,j} \cap G_s$ содержит ровно один элемент.

5) Для любых $i \in \{1, \dots, 2k+1\}$ и $j \in \{1, \dots, p\}$ выполняется неравенство $|D_{i,j}| \geq 3$.

Справедливость утверждений 1) — 4) леммы 2 почти очевидным образом вытекает из геометрической интерпретации множеств $D_{i,j}$, G_s (см. рис. 2). Фактически, данные множества представляют собой прямые или отрезки прямых в конечной аффинной плоскости порядка p с p^2 точками (здесь существенно, что p — простое число и выполнены соотношения (5), (6)). Определение и свойства конечных плоскостей можно найти, например, в [6], гл. 1. Для доказательства утверждения 5) достаточно заметить, что число множеств G_s , $s = 1, \dots, 4k + 2$, равно $4k + 2 \geq 3$, и воспользоваться утверждением 4).

Вернёмся к доказательству теоремы. Перейдём к построению из функциональных элементов множества B схем $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$, которые составят диагностический тест. Для любого $i \in \{1, \dots, 2k+1\}$ построим схему S_i следующим образом. По утверждению 4) леммы 2 для любого $j \in \{1, \dots, p\}$ множества $D_{i,j} \cap G_{2i-1}$ и $D_{i,j} \cap G_{2i}$ содержат ровно по одному элементу. Обозначим эти два элемента соответственно через $E_{i,j}^1$ и $E_{i,j}^2$. По утверждению 1) леммы 2 и в силу того, что $G_{2i-1} \cap G_{2i} = \emptyset$, все элементы $E_{i,1}^1, \dots, E_{i,p}^1, E_{i,1}^2, \dots, E_{i,p}^2$ попарно различны. Кроме того,

$$\begin{aligned} \{E_{i,1}^1\} \cup \dots \cup \{E_{i,p}^1\} &= (D_{i,1} \cap G_{2i-1}) \cup \dots \cup (D_{i,p} \cap G_{2i-1}) = \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^p D_{i,j} \right) \cap G_{2i-1} = B \cap G_{2i-1} = G_{2i-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \{E_{i,1}^2\} \cup \dots \cup \{E_{i,p}^2\} &= (D_{i,1} \cap G_{2i}) \cup \dots \cup (D_{i,p} \cap G_{2i}) = \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^p D_{i,j} \right) \cap G_{2i} = B \cap G_{2i} = G_{2i} \end{aligned} \quad (9)$$

по утверждению 2) леммы 2.

Так как функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_n , то существуют такие булевы константы $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ (напомним, что $n \geq 2$), что функция $f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, x_n)$ совпадает с одной из функций x_n , $\overline{x_n}$. Пусть j — произвольный индекс от 1 до p . Из множества $D_{i,j} \setminus (\{E_{i,j}^1\} \cup \{E_{i,j}^2\})$ (оно непусто по утверждению 5) леммы 2) возьмём все функциональные элементы и составим из них цепь следующим образом. Сначала возьмём произвольный элемент и подадим на его входы $v_1, \dots, v_{n-1}$, соответственно, константы $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, а на его вход v_n — переменную x_j . Затем возьмём из рассматриваемого множества любой другой элемент и подадим на его входы $v_1, \dots, v_{n-1}$, соответственно, константы $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, а его вход v_n соединим с выходом предыдущего элемента. Затем возьмём из рассматриваемого множества любой элемент, отличный от первых двух, и подадим на его входы $v_1, \dots, v_{n-1}$, соответственно, константы $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, а его вход v_n соединим с выходом предыдущего элемента, и т.д. В итоге получим цепь, содержащую все элементы из $D_{i,j} \setminus (\{E_{i,j}^1\} \cup \{E_{i,j}^2\})$. Обозначим эту цепь через $L_{i,j}$. Из её построения легко следует, что функция, реализуемая на выходе её нижнего элемента (в случае, если все элементы из $L_{i,j}$ исправны), совпадает с одной из функций x_j , $\overline{x_j}$.

Отметим, что для любых таких $j_1, j_2 \in \{1, \dots, p\}$, что $j_1 \neq j_2$, множества $D_{i,j_1} \setminus (\{E_{i,j_1}^1\} \cup \{E_{i,j_1}^2\})$ и $D_{i,j_2} \setminus (\{E_{i,j_2}^1\} \cup \{E_{i,j_2}^2\})$ не пересекаются по утверждению 1) леммы 2. Таким образом, построенные нами цепи элементов $L_{i,1}, \dots, L_{i,p}$ попарно не пересекаются.

Далее, для любого $j \in \{1, \dots, p\}$ рассмотрим элементы $E_{i,j}^1$ и $E_{i,j}^2$. Ни один из них не входит ни в одну из построенных ранее цепей $L_{i,1}, \dots, L_{i,p}$ (для цепи $L_{i,j}$

это верно по построению, для всех остальных цепей — по определению элементов $E_{i,j}^1$, $E_{i,j}^2$ и утверждению 1) леммы 2). Путём отождествления некоторых входов и подачи на некоторые входы констант 0 и 1 из $E_{i,j}^1$ можно получить элемент $E'_{i,j}$, имеющий два входа v_1 и v_2 и реализующий (в случае, если $E_{i,j}^1$ исправен) функцию $f_1(x, y)$, а из $E_{i,j}^2$ — элемент $E''_{i,j}$, имеющий два входа v_1 и v_2 и реализующий (в случае, если $E_{i,j}^2$ исправен) функцию $f_2(x, y)$, где x, y — переменные, подаваемые соответственно на входы v_1 и v_2 этих элементов, что мы и сделаем для построения схемы S_i (определение функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ см. в абзаце после доказательства леммы 1). У элемента $E''_{i,j}$ выделим "правый" вход (в дальнейшем, кавычки при слове "правый" будем опускать) так:

- в случае A_1 функция $f_2(x, y) \in \{x \& \bar{y}, \bar{x} \& y, \bar{x} \& \bar{y}, x \vee \bar{y}, \bar{x} \vee y, \bar{x} \vee \bar{y}\}$. Тогда, по определению, элемент $E''_{i,j}$ имеет хотя бы один инверсионный вход. Будем считать его правым входом любой из его инверсионных входов;

- в случаях A_2, A_3, A_4 считаем правым входом элемента $E''_{i,j}$ любой из его входов.

По построению, других случаев быть не может.

Теперь соединим вход v_1 элемента $E'_{i,j}$ с выходом нижнего элемента цепи $L_{i,j}$, а на вход v_2 элемента $E'_{i,j}$ подадим переменную y_j . Затем соединим правый вход элемента $E''_{i,j}$ с выходом элемента $E'_{i,j}$; на другой вход элемента $E''_{i,j}$ (будем его считать левым) подадим:

- переменную z , если $j = 1$;
- выход элемента $E''_{i,j-1}$, если $j > 1$.

Отметим, что для любых таких $j_1, j_2 \in \{1, \dots, p\}$, что $j_1 \neq j_2$, ни один из элементов E_{i,j_1}^1, E_{i,j_1}^2 не совпадает ни с одним из элементов E_{i,j_2}^1, E_{i,j_2}^2 , а $\bigcup_{j=1}^p (\{E_{i,j}^1\} \cup \{E_{i,j}^2\}) = G_{2i-1} \cup G_{2i} = R_i$ по построению множеств G_{2i-1} и G_{2i} .

Будем говорить, что элемент $E_{i,j}^1$ принадлежит *верхнему слою*, а элемент $E_{i,j}^2$ — *нижнему слою* схемы S_i . По построению и в силу (8), (9) объединение верхнего и нижнего слоёв S_i совпадает с $G_{2i-1} \cup G_{2i} = R_i$. Выход элемента $E''_{i,p}$ будем считать выходом S_i . Все переменные $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p, z$ считаем различными.

Построение схемы S_i показано на рис. 3. Очевидно, что данная схема удовлетворяет определению схемы из функциональных элементов, на входы которой могут подаваться константы 0 и 1. Кроме того, по построению, ни один из элементов из множества B не входит в неё дважды. Таким образом, схема S_i является допустимой в нашей задаче. Заметим также, что любой элемент из B входит в S_i . Действительно, для любого $j \in \{1, \dots, p\}$ все элементы из множества $D_{i,j} \setminus (\{E_{i,j}^1\} \cup \{E_{i,j}^2\})$ принадлежат, по построению, цепи $L_{i,j}$, а элементы $E_{i,j}^1$ и $E_{i,j}^2$ — соответственно верхнему и нижнему слоям S_i , поэтому в силу утверждения 2) леммы 2 любой элемент из множества B входит в S_i .

Будем считать, что для любого $j \in \{1, \dots, p\}$ любому элементу из множества $D_{i,j}$ в схеме S_i соответствует переменная x_j . Тогда по утверждению 2) леммы 2 любому элементу из множества B в схеме S_i соответствует какая-то переменная из числа $x_1, \dots, x_p$.

Так как i — любое натуральное число от 1 до $2k + 1$, то построен набор схем $\{S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}\}$, каждая из которых является допустимой в рассматриваемой задаче. Для доказательства утверждения 1) основной теоремы достаточно доказать, что $\{S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}\}$ — проверяющий тест.

Рис. 3

Отметим, что по построению в каждой из схем $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ каждому элементу соответствует какая-то переменная из множества $\{x_1, \dots, x_p\}$.

Зафиксируем некоторую неисправность системы элементов. Множества $R_1, \dots, R_{2k+1}$ попарно не пересекаются, поэтому среди них есть хотя бы $k+1$ множеств, в каждом из которых все элементы исправны (так как неисправны не более k элементов). Обозначим эти $k+1$ множеств через $R_{i_1}, \dots, R_{i_{k+1}}$. Пусть S_i — произвольная схема из числа $S_{i_1}, \dots, S_{i_{k+1}}$. Рассмотрим любое j от 1 до p . По построению, на выходе цепи $L_{i,j}$ схемы S_i реализуется функция, зависящая от одной переменной x_j (зависимость существенная, если все элементы в $L_{i,j}$ исправны), которая подаётся

на один из входов элемента $E'_{i,j}$; на другой вход этого элемента подаётся переменная y_j , а выход этого элемента подаётся на правый вход элемента $E''_{i,j}$, причём элементы $E'_{i,j}$ и $E''_{i,j}$ двухвходовые. Так как все элементы из множества R_i исправны, то все элементы, принадлежащие верхнему и нижнему слоям S_i , исправны, т. е. элементы $E^1_{i,j}$ и $E^2_{i,j}$ исправны. Значит, и полученные из них путём отождествления входов и подачи на некоторые входы констант 0 и 1 элементы $E'_{i,j}$ и $E''_{i,j}$ исправны. По построению, эти элементы реализуют, соответственно, функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, где x, y — переменные, подаваемые на их входы.

Лемма 3. Для любого j от 1 до p и для любой схемы S_i из числа $S_{i_1}, \dots, S_{i_{k+1}}$ на входы этой схемы вместо x_j и y_j можно подать такие значения, что функция на выходе элемента $E''_{i,j}$ будет равна одной из функций $g, \bar{g}$, где g — функция, подаваемая на левый вход этого элемента.

Доказательство. Подадим на вход схемы S_i вместо x_j ноль. Тогда на выходе цепи $L_{i,j}$ этой схемы будет реализована, очевидно, некоторая константа δ , которая будет подаваться на вход v_1 элемента $E'_{i,j}$; на вход v_2 этого элемента подаётся переменная y_j . Рассмотрим отдельно случаи A_1, A_2, A_3 и A_4 .

Случай A_1 . Тогда $f_2(x, y) \in \{x\&\bar{y}, \bar{x}\&y, \bar{x}\&\bar{y}, x\vee\bar{y}, \bar{x}\vee y, \bar{x}\vee\bar{y}\}$, а $f_1(x, y) = f_2(x, y)$. Рассмотрим два подслучая.

1. Функция $f_2(x, y)$ имеет вид $x^{\sigma_1}\&y^{\sigma_2}$, где σ_1, σ_2 — некоторые булевы константы. Подадим на вход схемы S_i вместо переменной y_j значение $\bar{\sigma}_2$. Тогда, в силу того, что $f_1(x, y) = f_2(x, y)$, на выходе элемента $E'_{i,j}$ будет реализована функция $\delta^{\sigma_1}\&\bar{\sigma}_2^{\sigma_2}$, т. е. тождественный ноль. Он будет подаваться на правый вход элемента $E''_{i,j}$, который, по построению, инверсионный. Это означает, что функция на выходе $E''_{i,j}$ будет равна $g^\sigma\&\bar{0} = g^\sigma$, где g — функция, подаваемая на его левый вход, а σ — булева константа, равная 1, если его левый вход прямой, и равная 0, если он инверсионный.

2. Функция $f_2(x, y)$ имеет вид $x^{\sigma_1}\vee y^{\sigma_2}$, где σ_1, σ_2 — некоторые булевы константы. Подадим на вход схемы S_i вместо переменной y_j значение σ_2 . Тогда, в силу того, что $f_1(x, y) = f_2(x, y)$, на выходе элемента $E'_{i,j}$ будет реализована функция $\delta^{\sigma_1}\vee\sigma_2^{\sigma_2}$, т. е. тождественная единица. Она будет подаваться на правый вход элемента $E''_{i,j}$, который, по построению, инверсионный. Это означает, что функция на выходе $E''_{i,j}$ будет равна $g^\sigma\vee\bar{1} = g^\sigma$, где g — функция, подаваемая на его левый вход, а σ — булева константа, равная 1, если его левый вход прямой, и 0, если он инверсионный.

Других подслучаев, очевидно, нет.

Случай A_2 и A_4 . Тогда $f_2(x, y)$ — функция вида $x \oplus y \oplus \sigma$, где σ — некоторая булева константа, а $f_1(x, y)$ — одна из функций $x\&y, x\vee y, x \oplus y \oplus \sigma$. Подадим на вход схемы S_i вместо переменной y_j ноль. Тогда на выходе элемента $E'_{i,j}$ будет реализована одна из функций $\delta\&0, \delta\vee 0, \delta \oplus 0 \oplus \sigma$, т. е. некоторая булева константа δ' . Она будет подаваться на правый вход элемента $E''_{i,j}$, реализующего функцию вида $x \oplus y \oplus \sigma$. Это означает, что функция на выходе $E''_{i,j}$ будет равна $g \oplus \delta' \oplus \sigma$, т. е. либо g , либо $\bar{g}$, где g — функция, подаваемая на его левый вход.

Случай A_3 . Тогда $f_1(x, y) = x\&y, f_2(x, y) = x\vee y$. Подадим на вход схемы S_i вместо переменной y_j ноль. Тогда на выходе элемента $E'_{i,j}$ будет реализована функция $\delta\&0$, т. е. тождественный ноль. Он будет подаваться на правый вход элемента $E''_{i,j}$, реализующего дизъюнкцию своих входов. Это означает, что функция на выходе $E''_{i,j}$

будет равна $g \vee 0 = g$, где g — функция, подаваемая на его левый вход. Все случаи разобраны, лемма 3 доказана.

Лемма 4. *При любой неисправности системы элементов для любого исправного элемента E из множества B существует такая схема $S_i, i \in \{1, \dots, 2k+1\}$, что реализуемая этой схемой функция существенно зависит от соответствующей E в этой схеме переменной.*

Доказательство. Как было отмечено ранее, любой элемент из множества B , в том числе и элемент E , входит в каждую из схем $S_1, \dots, S_{2k+1}$. Из схем $S_1, \dots, S_{2k+1}$ выберем схемы $S_{i_1}, \dots, S_{i_{k+1}}$ с исправными элементами в верхнем и нижнем слоях (см. абзац перед формулировкой леммы 3). По утверждениям 1) и 2) леммы 2 для любого $s \in \{1, \dots, k+1\}$ элемент E принадлежит ровно одному множеству из числа $D_{i_s,1}, \dots, D_{i_s,p}$ (пусть это множество — D_{i_s,j_s}). По утверждению 3) леммы 2 для любых таких $s_1, s_2 \in \{1, \dots, k+1\}$, что $s_1 \neq s_2$, множества $D_{i_{s_1},j_{s_1}}$ и $D_{i_{s_2},j_{s_2}}$ пересекаются не более чем по одному элементу. Так как данные множества пересекаются по элементу E , то множества $D_{i_{s_1},j_{s_1}} \setminus \{E\}$ и $D_{i_{s_2},j_{s_2}} \setminus \{E\}$ попарно не пересекаются при $s_1, s_2 \in \{1, \dots, k+1\}$ и $s_1 \neq s_2$. Число множеств $D_{i_s,j_s} \setminus \{E\}$, $s = 1, \dots, k+1$, равно $k+1$, поэтому среди них есть хотя бы одно, в котором все элементы исправны. Пусть это множество — $D_{i_t,j_t} \setminus \{E\}$. Тогда и в множестве D_{i_t,j_t} все элементы исправны.

Пусть $i = i_t, j = j_t$. Рассмотрим схему S_i . По построению все элементы из множества $D_{i,j} \setminus (\{E_{i,j}^1\} \cup \{E_{i,j}^2\})$ расположены в ней в одной цепи $L_{i,j}$, на один из входов верхнего элемента которой подаётся переменная x_j . Получаем, что все элементы в данной цепи исправны, а значит, по построению, функция, реализуемая на выходе данной цепи, существенно зависит от x_j (обозначим эту функцию через φ ; очевидно, что она совпадает с одной из функций $x_j, \bar{x}_j$). Затем, по построению, выход цепи $L_{i,j}$ соединяется со входом v_1 двухвходового элемента $E'_{i,j}$, который исправен (в силу того, что он получен из элемента $E_{i,j}^1$, принадлежащего R_i , а в данном множестве, согласно выбору схемы S_i , все элементы исправны) и, следовательно, реализует функцию, существенно зависящую от обеих своих переменных. На вход v_2 элемента $E'_{i,j}$ подаётся переменная y_j , значит, вместо неё можно подать такое значение, чтобы на выходе $E'_{i,j}$ была реализована либо функция φ , либо функция $\bar{\varphi}$, т.е. либо x_j , либо $\bar{x}_j$, что мы и сделаем. По лемме 3, вместо всех переменных, отличных от x_j, y_j, z , можно подать такие значения, чтобы каждый элемент из нижнего слоя, отличный от $E''_{i,j}$, реализовывал либо функцию, подаваемую на левый вход этого элемента, либо отрицание этой функции, что мы и сделаем. Так как на левый вход $E''_{i,1}$ подаётся переменная z , то при $j > 1$ на выходе $E''_{i,1}$ будет реализована одна из функций $z, \bar{z}$. Эта функция будет подаваться на левый вход $E''_{i,2}$, значит, при $j > 2$ и на выходе $E''_{i,2}$ будет реализована одна из функций $z, \bar{z}$, и т.д. В итоге, на выходе $E''_{i,j-1}$ будет реализована одна из двух функций $z, \bar{z}$. Эта функция будет подаваться на левый вход элемента $E''_{i,j}$, а правый вход данного элемента соединяется с выходом элемента $E'_{i,j}$, на котором, как было показано, реализуется одна из двух функций x_j и $\bar{x}_j$. Пусть $\psi(z, x_j)$ — функция, реализуемая на выходе $E''_{i,j}$, тогда $\psi(z, x_j)$ существенно зависит от x_j , так как элемент $E''_{i,j}$ реализует функцию, существенно зависящую от обеих своих переменных (в силу того, что данный элемент получен из элемента $E_{i,j}^2$, принадлежащего R_i , и, следовательно, исправен). Далее, функция $\psi(z, x_j)$ при $j < p$ будет подаваться на левый вход $E''_{i,j+1}$, значит, на выходе $E''_{i,j+1}$ будет реализована одна из функций $\psi(z, x_j), \bar{\psi}(z, x_j)$. Эта функция при $j+1 < p$ будет

подаваться на левый вход $E''_{i,j+2}$, значит, и на выходе $E''_{i,j}$ будет реализована одна из функций $\psi(z, x_j)$, $\overline{\psi(z, x_j)}$, и т.д. В итоге, на выходе $E''_{i,p}$, т.е. на выходе схемы S_i , будет реализована одна из функций $\psi(z, x_j)$ и $\overline{\psi(z, x_j)}$, каждая из которых существенно зависит от переменной x_j . Это означает, что функция, реализуемая схемой S_i при рассматриваемой неисправности системы элементов, при подстановке вместо некоторых переменных констант существенно зависит от x_j , значит, эта функция и без подстановок вместо её переменных констант существенно зависит от x_j .

Осталось заметить, что элементу E в схеме S_i соответствует именно переменная x_j . Действительно, по построению, элемент E лежит в множестве $D_{i,j}$, а каждому элементу этого множества в схеме S_i соответствует переменная x_j . Лемма 4 доказана.

Вернёмся к доказательству теоремы. Покажем, что по набору выходных функций схем $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ можно однозначно определить все исправные и все неисправные элементы из множества B . Действительно, пусть E — произвольный элемент из B . Если ни для одной схемы из числа $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ функция, реализуемая этой схемой, не зависит существенно от соответствующей E в этой схеме переменной, то по лемме 4 элемент E исправен. Пусть теперь хотя бы для одной схемы из числа $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ функция, реализуемая этой схемой, существенно зависит от соответствующей E в этой схеме переменной. Обозначим эту схему через S' , а переменную, соответствующую в ней E , через x' (по построению, x' может быть одной из переменных $x_1, \dots, x_p$). Согласно выбору в схеме S' соответствующей E переменной, единственная цепь из функциональных элементов, соединяющая вход S' , отвечающий x' , с выходом S' , проходит через E . Отсюда, в силу того, что выходная функция S' существенно зависит от x' , элемент E не может реализовывать константу, т.е. исправен.

Таким образом, набор схем $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ позволяет определить все исправные и все неисправные элементы из множества B и, следовательно, является проверяющим тестом. Его длина равна $2k+1$, откуда следует справедливость утверждения 1) доказываемой теоремы.

Пусть теперь функция $f(x_1, \dots, x_n)$ нелинейна. Докажем, что набор схем $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ является диагностическим тестом. Так как уже доказано, что он является проверяющим тестом, то достаточно доказать, что для любых двух различных неисправностей H_1 и H_2 системы элементов, при которых множества неисправных элементов совпадают, наборы выходных функций схем $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ различаются.

Так как неисправности H_1 и H_2 различны, а множества неисправных элементов при них совпадают, то существует такой элемент E из B , что при H_1 он исправен и выдаёт константу δ , а при H_2 он неисправен и выдаёт константу $\bar{\delta}$. Множества $R_1, \dots, R_{2k+1}$ попарно не пересекаются, поэтому среди них есть хотя бы $k+1$ множеств, в каждом из которых все элементы исправны и при H_1 , и при H_2 (так как неисправны не более k элементов). Обозначим эти $k+1$ множеств через $R_{i_1}, \dots, R_{i_{k+1}}$. По утверждениям 1) и 2) леммы 2 для любого натурального $s \in \{1, \dots, k+1\}$ элемент E принадлежит ровно одному множеству из числа $D_{i_s,1}, \dots, D_{i_s,p}$ (пусть это множество — D_{i_s,j_s}). По утверждению 3) леммы 2 для

любых таких $s_1, s_2 \in \{1, \dots, k+1\}$, что $s_1 \neq s_2$, множества $D_{i_{s_1}, j_{s_1}}$ и $D_{i_{s_2}, j_{s_2}}$ пересекаются не более чем по одному элементу. Так как данные множества пересекаются по элементу E , то множества $D_{i_{s_1}, j_{s_1}} \setminus \{E\}$ и $D_{i_{s_2}, j_{s_2}} \setminus \{E\}$ попарно не пересекаются при $s_1, s_2 \in \{1, \dots, k+1\}$ и $s_1 \neq s_2$. Число множеств $D_{i_s, j_s} \setminus \{E\}$, $s = 1, \dots, k+1$, равно $k+1$, поэтому среди них есть хотя бы одно, в котором все элементы исправны (пусть это множество — $D_{i_t, j_t} \setminus \{E\}$). Тогда в множестве D_{i_t, j_t} единственный неисправный элемент — E .

Пусть $i = i_t, j = j_t$. Рассмотрим схему S_i . Элемент E неисправен, поэтому он не принадлежит R_i и, следовательно, не совпадает ни с одним из элементов $E_{i,j}^1, E_{i,j}^2$. Таким образом, элемент E принадлежит множеству $D_{i,j} \setminus (\{E_{i,j}^1\} \cup \{E_{i,j}^2\})$, т. е. цепи $L_{i,j}$, и является единственным неисправным элементом в данной цепи (так как все остальные элементы из множества $D_{i,j}$ исправны). По построению, если бы все элементы в цепи $L_{i,j}$ были исправны, то при изменении значения x_j с 0 на 1 значение на выходе любого элемента данной цепи (в том числе E) менялось бы. Поэтому при изменении значения на выходе элемента E с δ на $\bar{\delta}$ значение на выходе цепи $L_{i,j}$ меняется с 0 на 1 или с 1 на 0. Затем, по построению, выход $L_{i,j}$ соединяется со входом v_1 двухвходового элемента $E'_{i,j}$, на другой вход которого подаётся переменная y_j ; выход $E'_{i,j}$ соединяется с правым входом элемента $E''_{i,j}$. Заметим, что элементы $E_{i,j}^1$ и $E_{i,j}^2$ исправны, так как они оба принадлежат R_i .

Так как функция $f(x_1, \dots, x_n)$ нелинейна, то имеет место один из случаев A_1, A_2, A_3 . Заметим, что в каждом из данных случаев элемент $E'_{i,j}$ реализует функцию вида либо $x^{\sigma_1} \& y^{\sigma_2}$, либо $x^{\sigma_1} \vee y^{\sigma_2}$, где σ_1 и σ_2 — некоторые булевы константы. Как мы выяснили, при изменении значения на выходе элемента E с δ на $\bar{\delta}$ значение на выходе цепи $L_{i,j}$ (которое затем подаётся на вход v_1 элемента $E'_{i,j}$) меняется с 0 на 1 или с 1 на 0. Воспользуемся очевидным свойством элемента, реализующего функцию одного из видов $x^{\sigma_1} \& y^{\sigma_2}, x^{\sigma_1} \vee y^{\sigma_2}$: при подаче одного из значений 0 или 1 на вход v_1 элемента $E'_{i,j}$ на выходе $E'_{i,j}$ будет реализована одна из функций $y_j, \bar{y}_j$, а при подаче другого значения на тот же вход $E'_{i,j}$ — одна из двух функций 0, 1. Таким образом, при одной из неисправностей H_1 и H_2 (без ограничения общности, при H_1) на выходе $E'_{i,j}$ реализуется одна из функций $y_j, \bar{y}_j$, а при другой (H_2) — одна из функций 0, 1.

Применим лемму 3 и вместо всех переменных, отличных от x_j, y_j, z , подадим такие значения, чтобы каждый элемент из нижнего слоя, отличный от $E''_{i,j}$, реализовывал либо функцию, подаваемую на левый вход этого элемента, либо отрицание этой функции (отметим, что нам здесь неважно, какая из неисправностей H_1 и H_2 имеет место, так как схема S_i выбирается одна и та же). Так как на левый вход $E''_{i,1}$ подаётся переменная z , то при $j > 1$ на выходе $E''_{i,1}$ будет реализована одна из функций $z, \bar{z}$. Эта функция будет подаваться на левый вход $E''_{i,2}$, значит, при $j > 2$ и на выходе $E''_{i,2}$ будет реализована одна из функций $z, \bar{z}$, и т.д. В итоге, на выходе $E''_{i,j-1}$ будет реализована одна из двух функций $z, \bar{z}$. Эта функция будет подаваться на левый вход элемента $E''_{i,j}$, а правый вход данного элемента соединяется с выходом элемента $E'_{i,j}$, на котором, как было показано, при H_1 реализуется одна из функций $y_j, \bar{y}_j$, а при H_2 — одна из функций 0, 1. Таким образом, при H_2 на выходе $E''_{i,j}$ будет реализована функция, не зависящая существенно от y_j . Значит, при H_2 и функция на выходе всей схемы S_i не будет зависеть существенно от y_j . При H_1 же на выходе $E''_{i,j}$ будет реализована некоторая функция $\phi(z, y_j)$, существенно зависящая от y_j , так как элемент $E''_{i,j}$ реализует функцию, существенно зависящую от обеих своих переменных. Далее, функция $\phi(z, y_j)$ при $j < p$ будет подаваться на левый вход $E''_{i,j+1}$,

значит, на выходе $E''_{i,j+1}$ будет реализована одна из функций $\phi(z, y_j), \overline{\phi(z, y_j)}$. Эта функция при $j + 1 < p$ будет подаваться на левый вход $E''_{i,j+2}$, значит, и на выходе $E''_{i,j}$ будет реализована одна из функций $\phi(z, y_j), \overline{\phi(z, y_j)}$, и т.д. В итоге, на выходе $E''_{i,p}$, т.е. на выходе схемы S_i , будет реализована функция, существенно зависящая от y_j . Это означает, что функция, реализуемая схемой S_i при неисправности H_1 , при подстановке вместо некоторых переменных констант существенно зависит от y_j , откуда следует, что эта функция и без подстановок вместо её переменных констант существенно зависит от y_j . Таким образом, функции, реализуемые схемой S_i при неисправностях H_1 и H_2 , различаются (одна из них существенно зависит от y_j , а другая — нет). Следовательно, и наборы выходных функций схем $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ при H_1 и H_2 различаются, что и требовалось доказать.

В итоге получаем, что набор схем $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ является диагностическим тестом. Его длина равна $2k + 1$, откуда следует справедливость утверждения 2) теоремы. Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание 1. Можно проверить, что формулировка основной теоремы может быть усилена до следующей:

Пусть булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не совпадает ни с одной из функций $x_1 \vee \dots \vee x_n, x_1 \& \dots \& x_n, \overline{x_1}$, выполнено условие $\sqrt{N} \leq \frac{N}{4k+2}$ и на отрезке $[\sqrt{N}; \frac{N}{4k+2}]$ содержится хотя бы одно натуральное число, являющееся степенью простого числа с натуральным показателем. Тогда:

- 1) $L_c(f, N, k) \leq 2k + 1$,
- 2) *если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ нелинейна, то $L_d(f, N, k) \leq 2k + 1$.*

Нетрудно убедиться, что теорема в такой формулировке является усилением доказанной теоремы. Действительно, при её доказательстве от числа p по существу требовалось выполнение соотношения (7) при построении множеств G_s , а также простота p и выполнение соотношений (5), (6) при доказательстве утверждений 1) — 4) леммы 2. Однако при выборе в качестве p любого натурального числа из отрезка $[\sqrt{N}; \frac{N}{4k+2}]$, являющегося степенью простого числа с натуральным показателем, соотношения (5) — (7) выполняются автоматически (с учётом неравенства $\sqrt{N} \leq \frac{N}{4k+2}$), а конечные аффинные плоскости порядка p существуют не только для простых p , но и для тех p , которые являются степенью простого числа. Таковыми, например, являются аффинные плоскости, получающиеся удалением одной прямой (вместе со всеми её точками) из проективной плоскости Галуа порядка p (см. [6], §§ 1.1-1.8, 1.10; [7], §§ 12.1-12.3). С другой стороны, теорема в новой формулировке становится верна для некоторых пар $(N; k)$, для которых условия исходной теоремы не выполняются, например, для $(N; k) = (42; 1)$ (при $p = 7$), $(N; k) = (224; 3)$ (при $p = 16$).

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, Изд-во МГУ, Москва, 1984.
2. Редькин Н. П., *Надёжность и диагностика схем*, Изд-во МГУ, Москва, 1992.

3. Угольников А. Б., *Классы Поста. Учебное пособие*, Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, Москва, 2008.
4. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*, Наука, Москва, 1986.
5. Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б., *Введение в теорию чисел*, Изд-во МГУ, Москва, 1984.
6. Картези Ф., *Введение в конечные геометрии*, Наука, Москва, 1980.
7. Холл М., *Комбинаторика*, Мир, Москва, 1970.

Статья поступила 14.02.2014.