Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков, Асимптотическая нормальность чисел неоявившихся значений m -зависимых случайных величин, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 2, 143–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1285>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:47:55

Асимптотическая нормальность чисел непоявившихся значений m -зависимых случайных величин

© 2014 г. М. И. Тихомирова*, В. П. Чистяков†

Рассматриваются числа непоявившихся значений в отрезках стационарной последовательности m -зависимых случайных величин с N исходами. Доказана совместная асимптотическая нормальность этих чисел при условии, что число N и длины отрезков стремятся к бесконечности и имеют одинаковый порядок роста.

Ключевые слова: m -зависимые случайные величины, число непоявившихся значений.

Пусть $X = (x_1, x_2, \dots, x_t, \dots)$ — стационарная последовательность случайных величин, принимающих значения из множества $\aleph = \{1, 2, \dots, N\}$. Обозначим через $\mu_0(n)$ число непоявившихся значений из множества $\aleph$ среди n первых членов последовательности X . Эту величину можно интерпретировать как число ячеек, оставшихся пустыми после размещения n частиц в схеме размещения, где x_t — номер ячейки, в которую попала t -я частица, $1 \leq t \leq n$.

Асимптотическая нормальность $\mu_0(n)$ при $n, N \rightarrow \infty$ имеет место для многих схем независимого размещения частиц (см. [1]). В работах [2,3] была рассмотрена последовательность X , образованная v -цепочками $x_t = (y_{t+r_1}, \dots, y_{t+r_v})$, построенными по последовательности независимых случайных величин $(y_1, y_2, \dots)$. Были найдены условия, достаточные для асимптотической нормальности $\mu_0(n)$ при $n, N \rightarrow \infty$ в случае, когда n и N^v имеют одинаковый порядок роста. Задачи о размещении частиц по ячейкам в случае, когда последовательность X является цепью Маркова, исследовались в работе [4]. Асимптотическая нормальность величин, аналогичных $\mu_0(n)$, для m -зависимых последовательностей при $n, N \rightarrow \infty$, $n = o(N^v)$, исследовалась в работах [6,7].

В работе получены достаточные условия асимптотической нормальности вектора

$$\bar{\mu}_0 = (\mu_0(n_1), \mu_0(n_1 + n_2), \dots, \mu_0(n_1 + n_2 + \dots + n_r))$$

в случае, когда величины $N, n_1, \dots, n_r$ стремятся к бесконечности одинаково быстро. Одномерные распределения были изучены в работе [5].

*Место работы: Академия криптографии Российской Федерации, e-mail: akrf@rambler.ru

†Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
e-mail: vpchist@mi.ras.ru

1. Постановка задачи

Будем предполагать, что последовательность X является стационарной последовательностью m -зависимых случайных величин: наборы $(x_{s-u}, \dots, x_s)$ и $(x_t, \dots, x_{t+u})$ независимы при любых целых положительных числах $u, v, s, t, t-s > m$. Введем следующие обозначения:

$$a_i = N\mathbf{P}\{x_t = i\}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$b_{ij}(u) = N^2\mathbf{P}\{x_t = i, x_{t+u} = j\}, \quad i, j \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Отметим, что

$$\sum_{i=1}^N a_i = N, \quad \sum_{i,j=1}^N b_{ij}(u) = N^2, \quad b_{ij}(u) = a_i a_j, \quad (2)$$

если $u \geq m+1$. Пусть $\chi(C)$ — индикатор события C .

Случайную величину

$$\mu_0(n) = \sum_{i=1}^N \chi(x_1 \neq i, \dots, x_n \neq i), \quad (3)$$

используя метод включения-исключения, представим в следующем виде (см. [2, 3]):

$$\mu_0(n) = N + \sum_{l=1}^n \sum_{t(l) \in T_l(n)} \xi_l(t(l)), \quad (4)$$

где $t(l) = (t_1, \dots, t_l)$,

$$T_l(n) = \{t(l) : 1 \leq t_1 < \dots < t_l \leq n\}, \quad l \geq 1, \quad (5)$$

$$\xi_l(t(l)) = (-1)^l \sum_{i=1}^N \chi(x_{t_1} = \dots = x_{t_l} = i). \quad (6)$$

Цель работы — вывод достаточных условий асимптотической нормальности вектора $\bar{\mu}_0$ в схеме серий, в которой

$$n_1 = \alpha_{N,1}N, \quad n_2 = \alpha_{N,2}N, \dots, n_r = \alpha_{N,r}N, \quad N \rightarrow \infty,$$

$$0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_{N,u} \leq \bar{\alpha} < \infty, \quad u = 1, \dots, r, \quad (7)$$

а распределение последовательности X меняется так, что при любых $t_1 < \dots < t_l$ и любых $i_1, \dots, i_l \in \mathbb{N}$

$$0 < \underline{a} \leq a_i = N\mathbf{P}\{x_t = i\} \leq \bar{a} < \infty,$$

$$0 < \underline{c}^l \leq N^l\mathbf{P}\{x_{t_1} = i_1, \dots, x_{t_l} = i_l\} \leq \bar{c}^l, \quad l = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Здесь $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \underline{a}, \bar{a}, \underline{c}, \bar{c}$ — некоторые постоянные.

Пример m -зависимых случайных величин, для которых выполняются условия (8), можно найти в работе [5].

2. Асимптотические формулы для моментов

Асимптотические свойства моментов и асимптотическая нормальность координат вектора $\bar{\mu}_0$ изучались в работе [5]. Приведем в обозначениях, удобных для дальнейшего изложения, формулы для $\mathbf{E}\mu_0(n)$ и $\mathbf{D}\mu_0(n)$, полученные в теореме 1 и следствии 1 работы [5]. Положим $\alpha_N = n/N$,

$$E_v(\alpha_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i^v e^{-\alpha_N a_i}, \quad v = 0, 1, 2, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(1)}(u) &= b_{ii}(u) + b_{ij}(u) + b_{ji}(u) + b_{jj}(u), \\ B_{ij}^{(2)}(u) &= b_{ij}(u) + b_{jj}(u), \quad B_{ij}^{(3)}(u) = b_{ij}(u), \\ b_{ij} &= \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m b_{ij}(u), \quad B_{ij}^{(v)} = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m B_{ij}^{(v)}(u), \quad v = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 1. При $n, N \rightarrow \infty$ $0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_N \leq \bar{\alpha} < \infty$ в схеме серий (8) при некотором $0 < \delta < 1$ выполнены соотношения

$$\mathbf{E}\mu_0(n) = NE_0(\alpha_N) - \frac{\alpha_N}{2} E_2(\alpha) + \frac{\alpha_N m}{N} \sum_{i=1}^N (b_{ii} - a_i^2) e^{-\alpha_N a_i} + O\left(\frac{1}{N^\delta}\right), \quad (11)$$

$$\mathbf{D}\mu_0(n) = \sigma^2 N + O(N^{1-\delta}),$$

где

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E_0(\alpha_N) - E_0(2\alpha_N) - \alpha_N (E_1(\alpha_N))^2 + \\ &+ 2\alpha_N \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N e^{-\alpha_N(a_i+a_j)} \sum_{u=1}^m (b_{ij}(u) - a_i a_j). \end{aligned} \quad (12)$$

В этом разделе мы выведем асимптотическую формулу для $\text{cov}(\mu_0(n_1), \mu_0(n_1 + n_2))$, необходимую для доказательства теоремы об асимптотической нормальности вектора $\bar{\mu}_0$.

Теорема 2. При $n_1, n_2, N \rightarrow \infty$ в схеме серий (7), (8) для ковариации величин $\mu_0(m)$, $\mu_0(n_1 + n_2)$ при некотором $0 < \delta < 1$ выполняется равенство

$$\text{cov}(\mu_0(m), \mu_0(n_1 + n_2)) = N\sigma_{12} + O(N^{1-\delta}),$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= E_0(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) - E_0(2\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) - \alpha_{N,1} E_1(\alpha_{N,1}) E_1(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) + \\ &+ \alpha_{N,1} m \left[\left(\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N (b_{ij} + b_{ji}) e^{-\alpha_{N,1} a_i} e^{-(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) a_j} \right) - 2E_1(\alpha_{N,1}) E_1(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) \right], \end{aligned}$$

$\alpha_{N,1} = n_1 N^{-1}$, $\alpha_{N,2} = n_2 N^{-1}$, а функции $E_0(\alpha)$ и $E_1(\alpha)$ определены в (9).

Если последовательность X образована независимыми и равномерно распределенными на $\aleph$ случайными величинами, то

$$a_i = b_{ij} = 1, \quad E_0(\alpha) = E_1(\alpha) = e^{-\alpha}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

В этом случае согласно теореме 2

$$\sigma_{12} = e^{-(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2})} (1 - (1 + \alpha_1) e^{-\alpha_{N,1}}),$$

что совпадает с формулой (IV. 4.4) в [1].

Используя теоремы 1 и 2, выведем асимптотические формулы для моментов координат вектора

$$\bar{\mu}_0 = (\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_r), \quad \varsigma_k = \mu_0(n_1 + \dots + n_k), \quad 1 \leq k \leq r.$$

Положим

$$n(i) = n_1 + \dots + n_i, \quad \alpha(i) = \alpha_{N,1} + \dots + \alpha_{N,i}. \quad (13)$$

В схеме серий (7), (8) выполнены соотношения

$$\mathbf{E}\varsigma_i = N E_0(\alpha(i)) + O(1),$$

$$\text{cov}(\varsigma_i, \varsigma_j) = N \sigma_{ij} + O(N^{1-\delta}), \quad i, j = 1, \dots, r, \quad 0 < \delta < 1, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = E_0(\alpha(j)) - E_0(\alpha(i) + \alpha(j)) - \alpha(i) E_1(\alpha(i)) E_1(\alpha(j)) + \\ + \alpha(i) m \left[\left(\frac{1}{N^2} \sum_{u,v=1}^N (b_{uv} + b_{vu}) e^{-\alpha(i)a_u} e^{-(\alpha(j))a_v} \right) - 2 E_1(\alpha(i)) E_1(\alpha(j)) \right], \end{aligned}$$

$i < j$, где величины $E_0(\alpha)$, $E_1(\alpha)$, $\alpha(i)$ определены равенствами (9), (13). Эти формулы вытекают из формул теорем 1 и 2, если заменить в них величины α_N , $\alpha_{N,1}$, $\alpha_{N,2}$ величинами $\alpha(i)$, $\alpha(j)$, $\alpha(j) - \alpha(i)$ соответственно.

При доказательстве теоремы 2 потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Для (k, l) , $0 \leq k \leq \min\{l, n_1\}$, $1 \leq l \leq n_1 + n_2$, введем множества

$$T_l(n_1, n_2, k) = \{t(l) : 1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq n_1 < t_{k+1} < \dots < t_l \leq n_1 + n_2\}. \quad (15)$$

Лемма 1. Произведение $\mu_0(n_1)\mu_0(n_1 + n_2)$ можно представить в виде

$$\mu_0(n_1)\mu_0(n_1 + n_2) = \mu_0(n_1 + n_2) + D_{n_1 n_2},$$

где

$$D_{n_1 n_2} = N(N-1) + \sum_{i \neq j} \sum_{l=1}^{n_1+n_2} (-1)^l \sum_{k=0}^{\min\{l, n_1\}} \sum_{t(l) \in T_l(n_1, n_2, k)} H(t(l)), \quad (16)$$

$$H(t(l)) = h_{ij}(t_1) \dots h_{ij}(t_k) h_j(t_{k+1}) \dots h_j(t_l), \quad (17)$$

$$h_{ij}(t) = \chi(x_t = i) + \chi(x_t = j), \quad i \neq j, \quad h_j(t) = \chi(x_t = j). \quad (18)$$

Доказательство. Используя формулу (3) при $n = n_1$ и $n = n_1 + n_2$, получаем:

$$\begin{aligned} \mu_0(n_1)\mu_0(n_1 + n_2) &= \sum_{i,j=1}^N \chi(x_1 \neq i, \dots, x_{n_1} \neq i) \chi(x_1 \neq j, \dots, x_{n_1+n_2} \neq j) = \\ &= \sum_{i=1}^N \prod_{v=1}^{n_1+n_2} (1 - h_i(v)) + \sum_{i \neq j} \prod_{v=1}^{n_1} (1 - h_{ij}(v)) \prod_{v=n_1+1}^{n_1+n_2} (1 - h_j(v)). \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы, так как

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \prod_{v=1}^{n_1+n_2} (1 - h_i(v)) = \mu_0(n_1 + n_2), \\ &\prod_{v=1}^{n_1} (1 - h_{ij}(v)) \prod_{v=n_1+1}^{n_1+n_2} (1 - h_j(v)) = \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{n_1+n_2} (-1)^l \sum_{k=0}^{\min\{l, n_1\}} \sum_{t(l) \in T_l(n_1, n_2, k)} h_{ij}(t_1) \dots h_{ij}(t_k) h_j(t_{k+1}) \dots h_j(t_l). \end{aligned}$$

Положим $\tau(t) = (t, t+1, \dots, t+m)$. Множество $T_l(n_1, n_2, k)$, определенное равенством (15), разобьем на три части:

$$T_l(n_1, n_2, k) = \bigcup_{v=1}^3 T_l^{(v)}(n_1, n_2, k),$$

где

$$\begin{aligned} T_l^{(1)}(n_1, n_2, k) &= \{t(l) \in T_l(n_1, n_2, k) : \tau(t_v) \cap \tau(t_u) = \emptyset, u \neq v\}, \\ T_l^{(2)}(n_1, n_2, k) &= \left\{ t(l) \in T_l(n_1, n_2, k) : \begin{array}{l} \text{среди } \tau(t_1), \dots, \tau(t_l) \\ \text{только одна пара множеств пересекается} \end{array} \right\}, \\ T_l^{(3)}(n_1, n_2, k) &= T_l(n_1, n_2, k) \setminus (T_l^{(1)}(n_1, n_2, k) \cup T_l^{(2)}(n_1, n_2, k)). \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что $T_1^{(v)}(n_1, n_2, k) = \emptyset$, $v = 2, 3$.

Используя это разбиение, запишем представление

$$D_{n_1, n_2} = D_{n_1, n_2}^{(1)} + D_{n_1, n_2}^{(2)} + D_{n_1, n_2}^{(3)}, \quad (20)$$

где $D_{n_1, n_2}^{(1)}$, $D_{n_1, n_2}^{(2)}$ и $D_{n_1, n_2}^{(3)}$ определены по формулам, аналогичным (16):

$$D_{n_1, n_2}^{(1)} = 1 + \sum_{i \neq j} \sum_{l=1}^{n_1+n_2} (-1)^l \sum_{k=0}^{\min\{l, n_1\}} \sum_{t(l) \in T_l^{(1)}(n_1, n_2, k)} H(t(l)), \quad (21)$$

$$D_{n_1, n_2}^{(v)} = \sum_{i \neq j} \sum_{l=2}^{n_1+n_2} (-1)^l \sum_{k=0}^{\min\{l, n_1\}} \sum_{t(l) \in T_l^{(v)}(n_1, n_2, k)} H(t(l)), \quad (22)$$

а $v = 2, 3$.

Лемма 2. В схеме серий (7), (8)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}D_{n_1 n_2}^{(1)} &= N^2 E_0(\alpha_{N,1}) E_0(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) - N E_0(2\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) + \\ &+ \frac{2m+1}{2} N \alpha_{N,1} E_2(\alpha_{N,1}) E_0(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) + \\ &+ \frac{2m+1}{2} N \left[(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) E_0(\alpha_{N,1}) E_2(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) + \right. \\ &\left. + 2\alpha_{N,1} E_1(\alpha_{N,1}) E_1(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) \right] + O(1), \end{aligned} \quad (23)$$

где $E_v(\alpha)$, $v = 0, 1, 2$, определены равенствами (9).

Лемма 3. В схеме серий (7), (8)

$$\mathbf{E}D_{n_1 n_2}^{(2)} = \frac{m}{N} \sum_{i,j=1}^N \left(\alpha_{N,1} B_{ij}^{(1)} + \alpha_{N,2} B_{ij}^{(3)} \right) e^{-\alpha_{N,1} a_i} e^{-(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) a_j} + O(1). \quad (24)$$

Лемма 4. В схеме серий (7), (8)

$$\mathbf{E}D_{n_1 n_2}^{(3)} = O(1). \quad (25)$$

Отложим на время громоздкие доказательства этих лемм и перейдем к доказательству теоремы 2. Из леммы 1 следует, что

$$\text{cov}(\mu_0(n_1), \mu_0(n_1 + n_2)) = \mathbf{E}\mu_0(n_1 + n_2) + \mathbf{E}D_{n_1 n_2} - \mathbf{E}\mu_0(n_1) \mathbf{E}\mu_0(n_1 + n_2). \quad (26)$$

Асимптотические формулы для величин $\mathbf{E}\mu_0(n_1 + n_2)$ и $\mathbf{E}\mu_0(n_1)$ получаются из теоремы 1 при $\alpha_N = \alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}$ и $\alpha_N = \alpha_{N,1}$. Кроме этого, согласно равенству (20)

$$\mathbf{E}D_{n_1, n_2} = \mathbf{E}D_{n_1, n_2}^{(1)} + \mathbf{E}D_{n_1, n_2}^{(2)} + \mathbf{E}D_{n_1, n_2}^{(3)}.$$

Подставив эти формулы и оценки лемм 2 – 4 в (26), получаем утверждение теоремы 2.

При доказательстве леммы 2 нам понадобится следующая оценка.

Лемма 5. В схеме серий (7), (8) равномерно по k, l , $0 \leq k \leq \min\{l, n_1\}$, $2 \leq l \leq n_1 + n_2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^l} \left| T_l^{(1)}(n_1, n_2, k) \right| &= \frac{\alpha_{N,1}^k \alpha_{N,2}^{l-k}}{k! (l-k)!} - \\ &- \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{N(l-2)!} \left(C_{l-1}^{k-2} \alpha_{N,1}^{k-1} \alpha_{N,2}^{l-k} + C_{l-2}^k \alpha_{N,1}^k \alpha_{N,2}^{l-k-1} \right) + \\ &+ O \left(\frac{1}{N^2} \left(k^4 + (l-k)^4 \right) \frac{\alpha_{N,1}^k \alpha_{N,2}^{l-k}}{k! (l-k)!} \right). \end{aligned}$$

Здесь и далее предполагается, что $C_b^a = 0$ при $a > b$, а также при отрицательных значениях a и/или b .

Громоздкое доказательство этой технической леммы мы приведем в конце раздела 2.

Доказательство леммы 2. При $t(l) \in T_l^{(1)}(n_1, n_2, k)$ случайные величины $x_{t_1}, \dots, x_{t_l}$ независимы. Следовательно,

$$\mathbf{E} H(t(l)) = \left(\frac{a_i + a_j}{N} \right)^k \left(\frac{a_j}{N} \right)^{l-k}, \quad i \neq j. \quad (27)$$

Используя (27) и соотношения $n_u = \alpha_{N,u}N$, $u = 1, 2$, из (21) выводим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} D_{n_1 n_2}^{(1)} &= N(N-1) - \sum_{i \neq j} (\alpha_{N,1} a_i + (\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) a_j) + \\ &+ \sum_{i \neq j} \sum_{l=2}^{n_1+n_2} (-1)^l S_l^{(1)}(i, j), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} S_l^{(1)}(i, j) &= \sum_{k=0}^l \sum_{t(l) \in T_l^{(1)}(n_1, n_2, k)} \mathbf{E} H(t(l)) = \\ &= \sum_{k=0}^l (a_i + a_j)^k a_j^{l-k} \frac{1}{N^l} \left| T_l^{(1)}(n_1, n_2, k) \right| \end{aligned}$$

при $2 \leq l \leq n_1$ и

$$S_l^{(1)}(i, j) = \sum_{k=0}^{n_1} (a_i + a_j)^k a_j^{l-k} \frac{1}{N^l} \left| T_l^{(1)}(n_1, n_2, k) \right|$$

при $n_1 < l \leq n_1 + n_2$.

Подставив в эти равенства выражение для $\frac{1}{N^l} \left| T_l^{(1)}(n_1, n_2, k) \right|$, приведенное в лемме 5, получим, что в схеме серий (7), (8)

$$\left| S_l^{(1)}(i, j) - \bar{S}_l^{(1)}(i, j) \right| \leq \frac{c^l}{N^2 l!}, \quad 2 \leq l \leq n_1,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{S}_l^{(1)}(i, j) &= \frac{1}{l!} (\alpha_{N,1} a_i + (\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) a_j)^l - \\ &- \frac{2m+1}{2N} \left(\alpha_{N,1} (a_i + a_j)^2 + \alpha_{N,2} a_j^2 \right) \frac{1}{(l-2)!} (\alpha_{N,1} a_i + (\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}) a_j)^{l-2} \end{aligned}$$

(эти величины мы определяем для всех $l \geq 2$), и

$$\left| S_l^{(1)}(i, j) \right| \leq \frac{c^l}{l!}, \quad \left| \bar{S}_l^{(1)}(i, j) \right| \leq \frac{c^l}{l!}, \quad 2 \leq l \leq n_1 + n_2.$$

Здесь $c > 0$ — некоторая постоянная.

Из этих соотношений следует, что равномерно по i, j

$$\begin{aligned} \sum_{l=2}^{n_1+n_2} (-1)^l S_l^{(1)}(i, j) &= \sum_{l=2}^{n_1} (-1)^l S_l^{(1)}(i, j) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = \\ &= \sum_{l=2}^{n_1} (-1)^l \bar{S}_l^{(1)}(i, j) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = \sum_{l=2}^{\infty} (-1)^l \bar{S}_l^{(1)}(i, j) + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \end{aligned}$$

Поэтому из (28) вытекает (23). Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Из (22) следует, что

$$\mathbf{E} D_{n_1 n_2}^{(2)} = \sum_{i \neq j} \sum_{l=2}^{n_1+n_2} (-1)^l S_l^{(2)}(i, j), \quad (29)$$

где

$$S_l^{(2)}(i, j) = \sum_{k=0}^{\max\{l, n_1\}} \sum_{t(l) \in T_l^{(2)}(n_1, n_2, k)} \mathbf{E} H(t(l)). \quad (30)$$

Оценим сумму $S_l^{(2)}(i, j)$. Положим

$$T_l^{(2)}(n_1, n_2, k, v, u, w) = \quad (31)$$

$$= \{t(l) \in T_l(n_1, n_2, k) : t_v = w, t_{v+1} = w + u; t_{f+1} - t_f \geq m + 1, f \neq v\},$$

где $1 \leq u \leq m$, $0 \leq k \leq l$, $1 \leq v \leq l - 1$, $1 \leq w \leq n_1 + n_2 - u$. Если $t(l)$ принадлежит множеству (31), то пара (x_w, x_{w+u}) и набор $(x_t : t \neq w, w + u)$ независимы.

Положим

$$A_{ij}(w, u) = ((x_w = i) \cup (x_w = j)) \cap ((x_{w+u} = i) \cup (x_{w+u} = j)).$$

Из равенств (1) следует, что

$$N^2 \mathbf{P}(A_{ij}(w, u)) = \begin{cases} B_{ij}^{(1)}(u), & w \leq n_1, w + u \leq n_1, \\ B_{ij}^{(2)}(u), & w \leq n_1, w + u > n_1, \\ B_{ij}^{(3)}(u), & w > n_1, \end{cases} \quad (32)$$

где величины $B_{ij}^{(f)}(u)$, $f = 1, 2, 3$, определены равенствами (10).

Введем обозначение

$$G_l(k, u, w) = \sum_{v=1}^{l-1} \left| T_l^{(2)}(n_1, n_2, k, v, u, w) \right| \frac{1}{N^l}. \quad (33)$$

Из (32) и равенства (30) следует, что

$$S_l^{(2)}(i, j) = S_{l1}^{(2)}(i, j) + S_{l2}^{(2)}(i, j) + S_{l3}^{(2)}(i, j), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} S_{l1}^{(2)}(i, j) &= \sum_{k=0}^{\max\{l, n_1\}} \sum_{u=1}^m (a_i + a_j)^{k-2} a_j^{l-k} B_{ij}^{(1)}(u) \sum_{w=1}^{n_1-u} G_l(k, u, w), \\ S_{l2}^{(2)}(i, j) &= \sum_{k=0}^{\max\{l, n_1\}} \sum_{u=1}^m (a_i + a_j)^{k-1} a_j^{l-k-1} B_{ij}^{(2)}(u) \sum_{w=n_1-u+1}^{n_1} G_l(k, u, w), \\ S_{l3}^{(2)}(i, j) &= \sum_{k=0}^{\max\{l, n_1\}} \sum_{u=1}^m (a_i + a_j)^k a_j^{l-k-2} B_{ij}^{(3)}(u) \sum_{w=n_1+1}^{n_1+n_2-u} G_l(k, u, w). \end{aligned} \quad (35)$$

Далее нам понадобится следующая оценка.

Лемма 6. При $N, n_1 = \alpha_{N,1}N, n_2 = \alpha_{N,2}N \rightarrow \infty, 1 \leq u \leq m$

$$G_l(k, u, w) = \begin{cases} \frac{\alpha_{N,1}^{k-2} \alpha_{N,2}^{l-k}}{(k-2)!(l-k)!} \frac{1}{N^2} + \nabla_N^{(1)}(u), & 1 \leq w \leq n_1 - u, \\ \nabla_N^{(2)}(u), & n_1 - u < w \leq n_2, \\ \frac{\alpha_{N,1}^k \alpha_{N,2}^{l-k-2}}{k!(l-k-2)!} \frac{1}{N^2} + \nabla_N^{(3)}(u), & n_2 < w \leq n_1 + n_2 - u, \end{cases}$$

где равномерно по l и $u, k, 0 \leq k \leq \min\{l, n_1\}, 2 \leq l \leq n_1 + n_2$,

$$\nabla_N^{(f)}(u) = O\left(\frac{1}{N^3} \frac{c^l l^6}{k!(l-k)!}\right), \quad f = 1, 3, \quad \nabla_N^{(2)}(u) = O\left(\frac{1}{N^2} \frac{c^l l^6}{k!(l-k)!}\right).$$

Доказательство этой леммы мы приведем в конце раздела, а сейчас продолжим наши рассуждения.

Используя равенства (35) и лемму 6, получаем при некотором $c > 0$:

$$\begin{aligned} S_{l1}^{(2)}(i, j) &= \sum_{k=0}^{\max\{l, n_1\}} \sum_{u=1}^m (a_i + a_j)^{k-2} a_j^{l-k} B_{ij}^{(1)}(u) \times \\ &\times \sum_{w=1}^{n_1-u} \left(\frac{\alpha_{N,1}^{k-2} \alpha_{N,2}^{l-k}}{(k-2)!(l-k)!} \frac{1}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3} \frac{c^l l^6}{k!(l-k)!}\right) \right) = \\ &= \frac{m}{N} \sum_{k=0}^{\max\{l, n_1\}} \left(\alpha_{N,1} \frac{\alpha_{N,1}^{k-2} \alpha_{N,2}^{l-k}}{(k-2)!(l-k)!} (a_i + a_j)^{k-2} a_j^{l-k} B_{ij}^{(1)} + O\left(\frac{1}{N^2} \frac{c^l l^6}{k!(l-k)!}\right) \right) \end{aligned}$$

равномерно по $0 \leq k \leq \max\{l, n_1\}, 2 \leq l \leq n_1 + n_2$ и по i, j . Отсюда выводим, что равномерно по i, j

$$S_{l1}^{(2)}(i, j) = \frac{\alpha_{N,1}m}{N} \cdot \frac{(\alpha_{N,1}(a_i + a_j) + \alpha_{N,2}a_j)^{l-2}}{(l-2)!} B_{ij}^{(1)} + O\left(\frac{c^l l^6}{N^2 l!}\right) \quad (36)$$

при $2 \leq l \leq n_1$ и

$$\left| S_{l1}^{(2)}(i, j) \right| \leq \frac{c^l l^6}{l!} \quad \text{при} \quad n_1 + 1 \leq l \leq n_1 + n_2. \quad (37)$$

Аналогично находим

$$S_{l3}^{(2)}(i, j) = \frac{\alpha_{N,2}m}{N} \cdot \frac{(\alpha_{N,1}(a_i + a_j) + \alpha_{N,2}a_j)^{l-2}}{(l-2)!} B_{ij}^{(3)} + O\left(\frac{c^l l^6}{N^2 l!}\right) \quad (38)$$

равномерно по i, j ,

$$S_{l2}^{(2)}(i, j) = O\left(\frac{c^l l^6}{N^2 l!}\right), \quad 2 \leq l \leq n_1, \quad (39)$$

$$\left| S_{l3}^{(2)}(i, j) \right| \leq \frac{c^l l^6}{l!}, \quad \left| S_{l2}^{(2)}(i, j) \right| \leq \frac{c^l l^6}{l!}, \quad n_1 + 1 \leq l \leq n_1 + n_2.$$

Из соотношений (36) – (39) следует, что

$$\left| S_l^{(2)}(i, j) - \overline{S}_l^{(2)}(i, j) \right| \leq \frac{c^l}{N^2 l!}, \quad 2 \leq l \leq n_1,$$

где

$$\bar{S}_l^{(2)}(i, j) = m \frac{(\alpha_{N,1}a_i + (\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2})a_j)^{l-2}}{N(l-2)!} \left(\alpha_{N,1}B_{ij}^{(1)} + \alpha_{N,2}B_{ij}^{(3)} \right)$$

(эти величины мы определяем для всех $l \geq 2$), и

$$\left| S_l^{(2)}(i, j) \right| \leq \frac{c^l}{l!}, \quad \left| \bar{S}_l^{(2)}(i, j) \right| \leq \frac{c^l}{l!}, \quad 2 \leq l \leq n_1 + n_2.$$

Здесь $c > 0$ — некоторая постоянная.

Из этих соотношений следует, что равномерно по i, j

$$\begin{aligned} \sum_{l=2}^{n_1+n_2} (-1)^l S_l^{(2)}(i, j) &= \sum_{l=2}^{n_1} (-1)^l S_l^{(2)}(i, j) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = \\ &= \sum_{l=2}^{n_1} (-1)^l \bar{S}_l^{(2)}(i, j) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = \sum_{l=2}^{\infty} (-1)^l \bar{S}_l^{(2)}(i, j) + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \end{aligned}$$

Поэтому из (29) вытекает (24). Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Согласно (22)

$$\mathbf{E} D_{n_1 n_2}^{(3)} = \sum_{i \neq j} \sum_{l=2}^{n_1+n_2} (-1)^l S_l^{(3)}(i, j), \quad (40)$$

где

$$S_l^{(3)}(i, j) = \sum_{k=0}^{\max\{l, n_1\}} \sum_{t(l) \in T_l^{(3)}(n_1+n_2, k)} \mathbf{E} H(t(l)),$$

величины $H(t(l))$ определены равенствами (21). Из условий (8) следует, что слагаемые этой суммы не превосходят $(c/N)^l$, где $c > 0$ — некоторая постоянная. Таким образом,

$$S_l^{(3)}(i, j) \leq \left(\frac{c}{N}\right)^l \left| T_l^{(3)}(n_1, n_2) \right|, \quad (41)$$

где $T_l^{(3)}(n_1, n_2) = \bigcup_{k=0}^{\max\{l, n_1\}} T_l^{(3)}(n_1, n_2, k)$.

Оценим мощность этого множества следующим образом. Выберем $l-2$ координат вектора $t(l)$ (это можно сделать не более чем $C_{n_1+n_2}^{l-2}$ способами). Из этих координат выберем t_i, t_j и добавим к ним $t_i + u_1, t_j + u_2$, $1 \leq u_1 \leq m, 1 \leq u_2 \leq m$ (всего $m^2 C_{l-2}^2$ вариантов). Следовательно,

$$\left| T_l^{(3)}(n_1, n_2) \right| \leq m^2 C_{l-2}^2 C_{n_1+n_2}^{l-2} \leq m^2 N^{l-2} \frac{(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2})^{l-2}}{(l-2)!} l^2.$$

Отсюда и из (41) получаем:

$$\left| S_l^{(3)}(i, j) \right| \leq \frac{l^2 c_1^l}{(l-2)! N^2}, \quad (42)$$

где $c_1 > 0$ — некоторая постоянная. Подставим (42) в (40), и учтем, что внешняя сумма в (40) имеет $N(N-1)$ слагаемых, а ряд $\sum_{l=2}^{\infty} l^2 c_1^{l-2} / ((l-2)!)$ сходится. Получим (25). Лемма 4 доказана.

Наконец, вернемся к леммам 5 и 6. Для первой из них понадобятся новые вспомогательные утверждения. Положим

$$M_v^{(u)}(k, l) = \{t(l) \in T_l(n_1, n_2, k) : t_{v+1} - t_v = u\}, \quad 1 \leq u \leq m, \quad (43)$$

$$M_v(k, l) = \bigcup_{u=1}^m M_v^{(u)}(k, l), \quad M_v^{(u,w)}(k, l) = \{t(l) \in M_v^{(u)}(k, l) : t_v = w\}.$$

Лемма 7. При $u \in \{1, \dots, m\}$, $0 \leq k \leq \min\{l, n_1\}$, $2 \leq l \leq n_1 + n_2$, справедливо равенство

$$\sum_{v=1}^{l-1} |M_v^{(u)}(k, l)| = (n_1 - u) C_{n_2}^{l-k} C_{n_1-u-1}^{k-2} + u C_{n_1+n_2-u-1}^{l-2} + (n_2 - u) C_{n_1}^k C_{n_2-u-1}^{l-k-2}. \quad (44)$$

Доказательство. Найдем $|M_v^{(u,w)}(k, l)|$. Рассмотрим три случая.

1) $w \leq n_1 - u$. В этом случае определены $t_v = w$, $t_{v+1} = w + u$; числа $t_1, \dots, t_{v-1}$ нужно выбрать из $\{1, 2, \dots, w-1\}$. Это можно сделать C_{w-1}^{v-1} способами. Цепочку $t_{v+2}, \dots, t_k$ из $\{w + n + 1, \dots, n_1\}$ можно выбрать $C_{n_1-w-u}^{k-v-1}$ способами и цепочку $t_{k+1}, \dots, t_l$ из $\{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$ можно выбрать $C_{n_2}^{l-k}$ способами. Таким образом,

$$|M_v^{(u,w)}(k, l)| = C_{w-1}^{v-1} C_{n_1-w-u}^{k-v-1} C_{n_2}^{l-k}, \quad 1 \leq w \leq n_1 - u. \quad (45)$$

2) $n_1 - u < w \leq n_1$. В этом случае

$$|M_v^{(u,w)}(k, l)| = C_{w-1}^{v-1} C_{n_1+n_2-w-u}^{l-v-1}. \quad (46)$$

3) $n_1 < w \leq n_1 + n_2 - u$. В этом случае

$$|M_v^{(u,w)}(k, l)| = C_{n_1}^k C_{w-n_1-1}^{v-k-1} C_{n_1+n_2-w-u}^{l-v-1}. \quad (47)$$

Используя формулы (45) – (47) для вычисления величины

$$\sum_w^{(u)}(k, l) = \sum_{v=1}^{l-1} |M_v^{(u,w)}(k, l)|, \quad (48)$$

приходим к равенствам

$$\sum_w^{(u)}(k, l) = \begin{cases} C_{n_2}^{l-k} C_{n_1-u-1}^{k-2}, & 1 \leq w \leq n_1 - u, \\ C_{n_1+n_2-u-1}^{l-2}, & n_1 - u < w \leq n_1, \\ C_{n_1}^k C_{n_2-u-1}^{l-2}, & n_1 < w \leq n_1 + n_2 - u. \end{cases} \quad (49)$$

Суммируя (49) по w , получаем утверждение леммы 7.

Лемма 8. При $0 \leq k \leq \min\{l, n_1\}$, $2 \leq l \leq n_1 + n_2$

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{l-1} |M_v(k, l)| &= (k-1) C_{n_2}^{l-k} (C_{n_1}^k - C_{n_1-m}^k) + \\ &+ (l-k-1) C_{n_1}^k (C_{n_2}^{l-k} - C_{n_2-m}^{l-k}) + \Delta(k, l), \\ |\Delta(k, l)| &\leq m \frac{(n_1 + n_2 - 2)^{l-2}}{(l-2)!}. \end{aligned}$$

Доказательство. Просуммируем по $u \in \{1, \dots, m\}$ первые два слагаемых правой части равенства (44), используя при этом равенство

$$\sum_{u=1}^m (n_1 - u) C_{n_1-u-1}^{k-2} = (k-1) \sum_{u=1}^m C_{n_1-u}^{k-1} = (k-1) (C_{n_1}^k - C_{n_1-m}^k)$$

и оценку

$$\sum_{u=1}^m u C_{n_1+n_2-u-1}^{l-2} \leq m \frac{(n_1 + n_2 - 2)^{l-2}}{(l-2)!}.$$

Аналогично суммируется третье слагаемое. Отсюда, учитывая, что

$$\sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^{l-1} |M_v^{(u)}(k, l)| = \sum_{v=1}^{l-1} |M_v(k, l)|,$$

получаем утверждение леммы.

Далее нам понадобятся вытекающие из определений оценки

$$0 \leq \sum_{v=1}^{l-1} |M_v(k, l)| - \left| \bigcup_{v=1}^{l-1} M_v(k, l) \right| \leq \sum_{1 \leq v_1 < v_2 \leq l-1} |M_{v_1}(k, l) \cap M_{v_2}(k, l)|, \quad (50)$$

$l \geq 2$, и равенства

$$\left| T_1^{(1)}(n_1, n_2, k) \right| = |T_1(n_1, n_2, k)|, \quad k \in \{0, 1\}, \quad (51)$$

$$\left| T_l^{(1)}(n_1, n_2, k) \right| = |T_l(n_1, n_2, k)| - \left| \bigcup_{v=1}^{l-1} M_v(k, l) \right|, \quad l \geq 2.$$

Оценим правую часть в (50).

Лемма 9. При $0 \leq k \leq \min\{l, n_1\}$, $2 \leq l \leq n_1 + n_2$

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq v_1 < v_2 \leq l-1} |M_{v_1}(k, l) \cap M_{v_2}(k, l)| \leq \\ & \leq l^2 m^2 (C_{n_1}^{k-2} C_{n_2}^{l-k} + C_{n_1}^{k-1} C_{n_2}^{l-k-1} + C_{n_1}^k C_{n_2}^{l-k-2}). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $t_{v_1+1} = t_{v_1} + u_1 \leq n_1$, $t_{v_2+1} = t_{v_2} + u_2 \leq n_1$ и $v_1 < v_2$. В этом случае при заданных u_1 и u_2 нужно выбирать лишь $l-2$ координаты вектора $t(l) = (t_1, \dots, t_l)$, так как t_{v_1+1} , t_{v_2+1} уже определены. Число способов такого выбора не превосходит $C_{n_1}^{k-2} C_{n_2}^{l-k}$. Пары (u_1, u_2) выбираются не более чем m^2 способами. Таким образом,

$$|M_{v_1}(k, l) \cap M_{v_2}(k, l)| \leq m^2 C_{n_1}^{k-2} C_{n_2}^{l-k},$$

где $t_{v_1+1} \leq n_1$, $t_{v_2+1} \leq n_1$.

Аналогично оцениваются оставшиеся два случая взаимного расположения t_{v_1+1} , t_{v_2+1} :

$$|M_{v_1}(k, l) \cap M_{v_2}(k, l)| \leq m^2 C_{n_1}^{k-1} C_{n_2}^{l-k-1}, \quad t_{v_1+1} \leq n_1, \quad t_{v_2+1} > n_1,$$

$$|M_{v_1}(k, l) \cap M_{v_2}(k, l)| \leq m^2 C_{n_1}^k C_{n_2}^{l-k-2}, \quad t_{v_1+1} > n_1, \quad t_{v_2+1} > n_1.$$

Из полученных оценок следует утверждение леммы 9.

Доказательство леммы 5. Используя формулы (50) и (51), равенство

$$|T_l(n_1, n_2, k)| = C_{n_1}^k C_{n_2}^{l-k}, \quad \text{где } n_1 = \alpha_{N,1}N, \quad n_2 = \alpha_{N,2}N,$$

леммы 8 и 9, получаем утверждение леммы 5.

Доказательство леммы 6. Из равенства

$$T_l^{(2)}(n_1, n_2, k, v, u, w) = M_v^{(u,w)}(k, l) \setminus \bigcup_{f \neq v} \left(M_f(k, l) \cap M_v^{(u,w)}(k, l) \right).$$

где $M_f(k, l)$, $M_v^{(u,w)}(k, l)$ определены равенствами (43), следует, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| T_l^{(2)}(n_1, n_2, k, v, u, w) \right| - \left| M_v^{(u,v)}(k, l) \right| \leq \\ &\leq \sum_{f \neq l} \left| M_v^{(u,w)}(k, l) \cap M_f(k, l) \right|. \end{aligned} \quad (52)$$

Оценим выражение в правой части (52). Пусть

$$n_1 = \alpha_{N,1}N, \quad n_2 = \alpha_{N,2}N, \quad t_{v+1} = t_v + u, \quad t_{f+1} - t_f \leq m, \quad t_v = w.$$

Рассмотрим сначала случай, когда t_v , t_{v+1} , t_f , t_{f+1} не превосходят n_1 . Величины t_v , t_{v+1} определены однозначно; величины t_f , t_{f+1} можно выбрать не более, чем mn_1 способами. Оставшиеся координаты вектора $t(l)$ при заданном расположении t_v , t_{v+1} , t_f , t_{f+1} можно выбрать $C_{n_1}^{k-4} C_{n_2}^{l-k}$ способами. Таким образом, в этом случае сумма соответствующей части слагаемых суммы (52) не превосходит

$$(l-1)mn_1 C_{n_1}^{k-4} C_{n_2}^{l-k} \leq \frac{m(l-1)\alpha_{N,1}\alpha_{N,1}^{k-u}\alpha_{N,2}^{l-k}}{(k-4)!(l-k)!} \leq \frac{l^5 c_1^l}{k!(l-k)!} N^{l-3},$$

где $c_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Аналогично рассматриваются остальные варианты расположения t_v , t_{v+1} , t_f , t_{f+1} . Для их числа справедливы такие же оценки. Объединив эти оценки, получим при некотором $c > c_1$ неравенство

$$\sum_{f \neq v} \left| M_v^{(u,w)}(k, l) \cap M_f(k, l) \right| \leq \frac{l^5 c^l}{k!(l-k)!} N^{l-3}, \quad 1 \leq u \leq m. \quad (53)$$

Из (33) – (53) следует, что равномерно по l и k , $0 \leq k \leq \min\{l, n_1\}$, $2 \leq l \leq n_1 + n_2$,

$$G_l(k, u, w) = \frac{1}{N^l} \sum_w^{(u)}(k, l) + O\left(\frac{1}{N^3} \frac{c^l l^6}{k!(l-k)!}\right).$$

Используя (49), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_w^{(u)}(k, l) &= \begin{cases} \frac{\alpha_{N,1}^{k-2} \alpha_{N,2}^{l-k}}{(k-2)!(l-k)!} N^{l-2} \left(1 + O\left(\frac{c^l k^2}{N}\right)\right), & 1 \leq w \leq n_1 - u, \\ \frac{\alpha_{N,1}^k \alpha_{N,2}^{l-k-2}}{k!(l-k-2)!} N^{l-2} \left(1 + O\left(\frac{(l-k)^2}{N}\right)\right), & n_2 < w \leq n_1 + n_2 - u, \end{cases} \\ \sum_w^{(u)}(k, l) &\leq \frac{(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2})^{l-2}}{(l-2)!} N^{l-2}, \quad n_1 - u < w \leq n_2. \end{aligned}$$

Из этих оценок следует утверждение леммы 6.

3. Асимптотическая нормальность

Для проверки асимптотической нормальности вектора $\bar{\mu}_0$ воспользуемся приемом Крамера – Уолда, согласно которому для доказательства сходимости по распределению случайных векторов достаточно доказать сходимость по распределению всевозможных линейных комбинаций их координат (см. [8], с. 76).

Положим

$$Z_N = c_1 \varsigma_1 + c_2 \varsigma_2 + \dots + c_r \varsigma_r, \quad \varsigma_k = \mu_0(n(k)), \quad 1 \leq k \leq r. \quad (54)$$

При доказательстве асимптотической нормальности этой величины воспользуемся теоремой 2 работы [5]. Эта теорема является незначительной переформулировкой теоремы 1 работы [9], обобщающей теорему 2 работы [10].

Величину ς_k представим в виде

$$\varsigma_k = \sum_{i=1}^N \left(1 - H_i^{(k)}(1)\right) \dots \left(1 - H_i^{(k)}(n(r))\right),$$

где

$$H_i^{(k)}(t) = \begin{cases} h_i(t), & 1 \leq t \leq n(k), \\ e_i(t), & n(k) < t \leq n(r), \\ e_i(t) = 0, & i = 1, \dots, N, \quad 1 \leq t \leq n(r), \quad h_i(t) = \chi(x_t = i). \end{cases}$$

Отсюда получим следующее выражение:

$$\varsigma_k = N + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^{n(r)} (-1)^l \sum_{t(l) \in T_l(n(r))} H_i^{(k)}(t_1) \dots H_i^{(k)}(t_l), \quad k = 1, \dots, r, \quad (55)$$

где множество $T_l(n)$ определено равенством (5). Положим

$$\xi_l^{(k)}(t(l)) = (-1)^l \sum_{i=1}^N H_i^{(k)}(t_1) \dots H_i^{(k)}(t_l), \quad k = 1, \dots, r,$$

$$\xi_l(t(l)) = \sum_{k=1}^r c_k \xi_l^{(k)}(t(l)), \quad l \geq 1.$$

Используя эти обозначения и равенства (54), (55), запишем Z_N в виде

$$Z_N = N \sum_{k=1}^r c_k + \sum_{l=1}^{n(r)} \sum_{t(l) \in T_l(n(r))} \xi_l(t_l),$$

аналогичном виду $\mu_0(n, N)$, приведенному в формуле (4) работы [5]. Представим множество $T_l(n)$ в виде объединения трех не пересекающихся множеств

$$T_l(n) = T_l^{(1)}(n) \cup T_l^{(2)}(n) \cup T_l^{(3)}(n),$$

где

$$T_l^{(1)}(n) = \{t(l) : t(l) \in T_l(n), \tau(t_i) \cap \tau(t_j) = \emptyset, i \neq j\},$$

$$T_l^{(2)}(n) = \left\{ t(l) : t(l) \in T_l(n), \text{ среди } \tau(t_1), \dots, \tau(t_l) \right. \\ \left. \text{только одна пара множеств пересекается} \right\},$$

$$T_l^{(3)}(n) = T_l(n) \setminus \left(T_l^{(1)}(n) \cup T_l^{(2)}(n) \right).$$

Положим

$$Z_N^{(v)} = \chi(v=1)N \sum_{k=1}^r c_k + \sum_{l=1}^{\phi-1} \sum_{t(l) \in T_l^{(v)}(n(r))} \xi_l(t(l)), \quad v = 1, 2, 3,$$

$$\Delta_N = Z_N^{(2)} + Z_N^{(3)}.$$

Тогда $Z_N = Z_N^{(1)} + \Delta_N$. Аналогично рассуждениям работ [3, 5] проверяется, что $\Delta_N/\sqrt{N}$ стремится по вероятности к нулю при $N \rightarrow \infty$ в схеме серий (7), (8). В свою очередь, к $Z_N^{(1)}$ при $(c_1, \dots, c_r) \neq (0, \dots, 0)$ применяется теорема 2 работы [5]. Проверка выполнения условий этой теоремы в схеме серий (7), (8) для величины $Z_N^{(1)}$ проводится так же как в [3, 5].

Эти рассуждения вместе с приемом Крамера – Уолда приводят к следующему утверждению.

Теорема 3. Если в схеме серий (7), (8) при $N \rightarrow \infty$ определитель $d_r = \det(\sigma_{ij})$ ковариационной матрицы (σ_{ij}) отделен от нуля ($d_r \geq \varepsilon > 0$), то распределение вектора

$$\frac{1}{\sqrt{N}} (\mu_0(n) - NE_1(\alpha_{N,1}), \mu_0(n_1 + n_2) - NE_1(\alpha_{N,1} + \alpha_{N,2}), \dots, \mu_0(n_1 + \dots + n_r) - NE_1(\alpha_{N,1} + \dots + \alpha_{N,r}))$$

сходится к невырожденному r -мерному нормальному распределению с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей (σ_{ij}) , определенными равенствами (14).

Замечание 1. Используя (2), (8), (13) и равенства

$$\frac{1}{N^2} \sum_{u,v=1}^N b_{uv} a_u = \frac{1}{N^2} \sum_{u,v=1}^N b_{uv} a_v = a^2, \quad a^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k^2$$

при $\bar{\alpha} \rightarrow 0$, $\underline{\alpha}/\bar{\alpha} \geq \varepsilon > 0$, получаем:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \alpha^2(i) a^2 + O(\bar{\alpha}^3)$$

Используя это равенство, вычислим определитель матрицы (σ_{ij}) . Для этого вынесем из матрицы постоянный множитель $\frac{1}{2} a^2$ и вычтем первый столбец из второго. Затем вычтем второй столбец из третьего и т.д. В итоге в матрице все элементы, стоящие выше главной диагонали, станут равны нулю. Перемножив элементы, находящиеся на главной диагонали, получим, что

$$\det(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2^r} a^{2r} \alpha_{N,1}^2 \alpha_{N,2} \dots \alpha_{N,r} \times (\alpha(1) + \alpha(2)) (\alpha(2) + \alpha(3)) \dots (\alpha(r-1) + \alpha(r)) (1 + O(\bar{\alpha})). \quad (56)$$

Из (56) следует, что условие положительности определителя в теореме 3 выполнено, по крайней мере, при достаточно малых значениях $\bar{\alpha}$.

Авторы благодарны В. Г. Михайлову за интерес к работе и полезные замечания.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*, М.: Наука, 1976.
2. Тихомирова М. И., Чистяков В. П., “Об асимптотике моментов числа появившихся s -цепочек”, *Дискретная математика*, **9**:1 (1997), 12–29.
3. Тихомирова М. И., “Асимптотическая нормальность числа появившихся несплошных цепочек исходов независимых испытаний”, *Дискретная математика*, **21**:2 (2009), 112–125.
4. Зубков А. М., “Цепи Маркова, близкие к последовательности независимых испытаний”, *Математические заметки*, **25**:3 (1979), 465–474.
5. Тихомирова М. И., Чистяков В. П., “Асимптотическая нормальность числа появившихся значений t -зависимых случайных величин”, *Математические вопросы криптографии*, **2**:1 (2011), 119–129.
6. Михайлов В. Г., “Асимптотическая нормальность в схеме конечно-зависимого размещения частиц по ячейкам”, *Математический сборник*, **119(161)**:4(12) (1982), 509–520.
7. Шойтов А. М., “Нормальное приближение в задачах об эквивалентных цепочках”, *В сб.: Труды по дискретной математике*, **10**, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, 326–349.
8. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*, М.: Наука, 1977.
9. Михайлов В. Г., “Об одной теореме Янсона”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **36** (1991), 168–170.
10. Janson S., “Normal convergence by higher semi invariants with applications to sums dependent random variables and random graphs”, *Ann. Probab.*, **16**:1 (1988), 305–312.

Статья поступила 11.12.2013.