Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Башов, С. Н. Селезнева, О длине функций k -значной логики в классе полиномиальных нормальных форм по модулю k , *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 3, 3–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1286>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:31:18

О длине функций k -значной логики в классе полиномиальных нормальных форм по модулю k

© 2014 г. М. А. Башов*, С. Н. Селезнева**

В работе рассматриваются полиномиальные нормальные формы для функций k -значных логик (при простых k). Полиномиальная нормальная форма по модулю k (п.н.ф.) – это сумма по модулю k произведений переменных или переменных с одним или несколькими отрицаниями Поста, взятых с некоторыми коэффициентами. Длиной п.н.ф. называется число ее различных слагаемых с ненулевыми коэффициентами. Если k – простое число, то каждая функция k -значной логики может быть представлена различными п.н.ф. Длиной функции k -значной логики в классе п.н.ф. называется минимальная длина среди всех п.н.ф., представляющих эту функцию. Функция Шеннона $L_k^{p.n.f.}(n)$ длины функций k -значной логики в классе п.н.ф. – это максимальная длина функции в классе п.н.ф. среди всех функций k -значной логики, зависящих от n переменных. В работе устанавливается порядок функции Шеннона $L_k^{p.n.f.}(n)$ (при простых k): $L_k^{p.n.f.}(n) = \Theta\left(\frac{k^n}{n}\right)$.

Работа поддержана РФФИ, грант 13-01-00958-а и частично грант 13-01-00684-а.

Ключевые слова: функция k -значной логики, булева функция, полиномиальное представление, полиномиальная нормальная форма, длина, функция Шеннона, затеняющее множество, покрытие, минимальное покрытие.

1. Введение

Полиномиальные формы являются одним из способов представления булевых и конечнозначных функций. Полиномиальные представления булевых функций находят применения при синтезе схем, в программируемых логических матрицах (ПЛМ) [1, 2]. Эффективность ПЛМ зависит от числа слагаемых в полиномиальной форме, по которой она построена. В ряде работ изучается сложность представления булевых функций и функций k -значной логики полиномиальными формами различных видов [5, 6, 7, 8].

Полиномиальные нормальные формы (п.н.ф.) для булевых функций – это представление булевых функций суммами по модулю два элементарных конъюнкций. Это представление булевых функций аналогично дизъюнктивным нормальным формам (д.н.ф.), только вместо операции дизъюнкции применяется операция сложения

*Место работы: МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: max.bashov@gmail.com

**Место работы: МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: selezn@cs.msu.su

по модулю два. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что представление булевых в виде п.н.ф. более эффективно, чем в виде д.н.ф.: и в худшем случае (при росте числа переменных функций), и для функций малого числа переменных п.н.ф. имеют меньшее число слагаемых, чем соответствующие д.н.ф. [2, 7]. Полиномиальные нормальные формы по модулю k для функций k -значной логики обобщают понятие п.н.ф. для булевых функций.

В [7] была получена верхняя оценка длины п.н.ф. булевых функций (в худшем случае), в [8] была получена аналогичная верхняя оценка для п.н.ф. функций k -значной логики (при простых k). Значения этих верхних оценок зависят от мощности некоторых определенных комбинаторных множеств. В настоящей работе мы улучшаем оценку из [8] и получаем порядок функции Шеннона длины функций k -значной логики в классе п.н.ф. (при простых k).

2. Основные понятия

Пусть $k \geq 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Определим на наборах из множества E_k^n частичный порядок: если $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ и $\beta = (b_1, \dots, b_n) \in E_k^n$, то $\alpha \leq \beta$ при $a_i \leq b_i$ $i = 1, \dots, n$. Весом набора $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ назовем число $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$ (здесь рассматривается сумма целых чисел). Если $\alpha, \beta \in E_k^n$, то $\alpha + \beta, \alpha - \beta \in E_k^n$ – это наборы, полученные соответственно покомпонентной суммой и разностью по модулю k наборов α и β .

Для набора $\alpha \in E_k^n$ назовем его *тенью* «вниз» множество

$$\check{S}(\alpha) = \{\beta \in E_k^n : \beta \leq \alpha, |\beta| = |\alpha| - 1\}.$$

Заметим, что если $\beta \in \check{S}(\alpha)$, то $|\alpha - \beta| = 1$. Если $T \subseteq E_k^n$, то $\check{S}(T) = \bigcup_{\alpha \in T} \check{S}(\alpha)$.

Множество T , $T \subseteq E_k^n$, назовем *затеняющим* на множестве E_k^n , если $\check{S}(T) = E_k^n \setminus \widetilde{(k-1)}$, где $\widetilde{(k-1)} = (k-1, \dots, k-1)$ – наибольший набор из E_k^n . Множество T , $T \subseteq E_k^n$, назовем *покрытием* (асимметричным покрытием «вниз») множества E_k^n , если $T \cup \check{S}(T) = E_k^n$.

Моном $\prod_{a_i \neq 0} x_i^{a_i}$ назовем *соответствующим* набору $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ и обозначим через X_α . По определению положим, что константа 1 соответствует набору из всех нулей. Заметим, что если $\alpha, \beta \in E_k^n$, и $\beta \in \check{S}(\alpha)$, то моном $X_{\alpha-\beta}$ является некоторой переменной.

Функцией k -значной логики называется отображение $f^n : E_k^n \rightarrow E_k$, $n = 0, 1, \dots$. Множество всех k -значных функций обозначим через P_k , множество всех k -значных функций, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$, обозначим через P_k^n . Если k – простое число, то каждая функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть однозначно задана формулой вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in E_k^n : c_f(\alpha) \neq 0} c_f(\alpha) X_\alpha,$$

где $c_f(\alpha) \in E_k$ – коэффициенты, $\alpha \in E_k^n$, и операции сложения и умножения рассматриваются по модулю k [9]. Это представление функций k -значной логики называется ее *полиномом по модулю k* . При простых значениях числа k однозначно

определенный полином по модулю k для функции k -значной логики f будем обозначать $P(f)$.

Везде в дальнейшем в выражениях для функций k -значной логики под знаками $+$, $-$, $\cdot$, $/$ мы будем понимать сложение, вычитание, умножение и деление по модулю k соответственно (при простых k). В выражениях, не относящихся к функциям k -значных логик, под этими знаками будут пониматься соответствующие операции с действительными числами.

Определим полиномиальные нормальные формы по модулю k . Под *поляризованной переменной* x_i будем понимать выражение вида $x_i + h$, где $h \in E_k \setminus \{0\}$. Произведение вида $y_{i_1}^{m_1} \cdot \dots \cdot y_{i_r}^{m_r}$, где y_{i_j} есть либо переменная x_{i_j} , либо поляризованная переменная x_{i_j} , $y_{i_s} \neq y_{i_t}$ при $s \neq t$, $1 \leq m_1, \dots, m_r \leq k-1$, назовем *мономом с поляризованными переменными*. Обычный моном является частным случаем монома с поляризованными переменными.

Выражение вида $\sum_{i=1}^l c_i \cdot X_i$, где $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ – коэффициенты, X_i – различные мономы с поляризованными переменными, $i = 1, \dots, l$, назовем *полиномиальной нормальной формой по модулю k* (п.н.ф.). *Длиной* п.н.ф. называется число ее слагаемых с ненулевыми коэффициентами. Мы будем полагать константу 0 п.н.ф. с длиной, равной 0.

Каждую функцию k -значной логики (при простых k) можно представить различными п.н.ф. по модулю k . Назовем длиной функции f в классе п.н.ф. величину $l^{p.n.f.}(f)$, равную минимальной длине среди всех п.н.ф., представляющих функцию f . Пусть $L_k^{p.n.f.}(n) = \max l^{p.n.f.}(f)$, где максимум берется по всем функциям $f \in P_k^n$.

К.Д. Кириченко [7] была исследована длина булевых функций в классе п.н.ф. и получена оценка $L_2^{p.n.f.}(n) \leq 2 \cdot \frac{2^n}{n} (\log_2 n + 1)$. Эта оценка была получена методом построения п.н.ф. на основе затеняющего множества на E_2^n . С учетом результата из [10] можно получить, что $L_2^{p.n.f.}(n) = O(\frac{2^n}{n})$. В [8] доказана оценка длины k -значных функций в классе п.н.ф. по модулю k (при простых k): $L_k^{p.n.f.}(n) \leq (2 + o(1)) \cdot \frac{k^n}{n} \cdot \ln n$. В [8] при построении затеняющего множества на E_k^n был применен градиентный алгоритм.

В настоящей работе мы обобщаем результат из [10] на множество E_k^n и получаем порядок функции Шеннона $L_k^{p.n.f.}(n)$ при простых k .

3. Верхняя оценка сложности функций k -значной логики в классе п.н.ф.

Теорема 1. Пусть k – простое число. Если $T, T \subseteq E_k^n$, – покрытие множества E_k^n , то для каждой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k^n$ можно построить п.н.ф. по модулю k , ее представляющую, с длиной, не большей $2 \cdot |T|$.

Доказательство. Пусть $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{|T|}\}$ – покрытие множества E_k^n , причем $|\alpha_i| \geq |\alpha_j|$ при всех i, j , $1 \leq i < j \leq |T|$.

Мы опишем алгоритм, в котором последовательно выполняются шаги $1, 2, \dots, |T|$. После шага j мы будем получать такие полином P_j и п.н.ф. Q_j , что $f(x_1, \dots, x_n) = Q_j + P_j$. Кроме того, для каждого слагаемого X_β , $\beta \in E_k^n$, с ненулевым коэффициентом в полиноме P_j будет верно, что $\beta \notin \bigcup_{i=1}^j (\{\alpha_i\} \cup \check{S}(\alpha_i))$.

Перед началом работы алгоритма положим $Q_0 = 0$, $P_0 = P(f)$.

Шаг j .

1) Пусть $\alpha_j = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$. Пусть для каждого $\beta \in \{\alpha_j\} \cup \check{S}(\alpha_j)$ моном X_β входит в полином P_{j-1} с коэффициентом c_β .

Для каждого набора $\beta \in \check{S}(\alpha_j)$ рассмотрим набор $\alpha - \beta \in E_k^n$. Этот набор имеет вид

$$\alpha - \beta = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

Пусть i_β , $1 \leq i_\beta \leq n$, номер единственной позиции в наборе $\alpha - \beta$, в которой находится единица. Положим $\check{X}_{\alpha_j} = \prod_{\beta \in \check{S}(\alpha_j)} (X_{\alpha-\beta} + \frac{c_\beta}{a_{i_\beta}})^{a_{i_\beta}}$. Заметим, что $\check{X}_{\alpha_j}$ — это моном с поляризованными переменными.

2) Пусть P_j есть полином, полученный в результате приведения подобных слагаемых в полиномиальном выражении $P_{j-1} + (1 - c_{\alpha_j})X_{\alpha_j} - P(\check{X}_{\alpha_j})$. Пусть Q_j — это п.н.ф. $Q_{j-1} + \check{X}_{\alpha_j} + (c_{\alpha_j} - 1)X_{\alpha_j}$.

Заметим, что полином $P(\check{X}_{\alpha_j})$ содержит слагаемое X_{α_j} с коэффициентом 1 и все слагаемые X_β , где $\beta \in \check{S}(\alpha_j)$, с коэффициентами c_β . По построению все они сокращаются в полиноме P_j . Все другие слагаемые полинома $P(\check{X}_{\alpha_j})$ имеют вес, не больший $|\alpha_j| - 2$. Поэтому в полиноме P_j не могут входить мономы, соответствующие наборам из $\check{S}(\alpha_j)$. Если X_β , $\beta \in E_k^n$, является слагаемым с ненулевым коэффициентом в полиноме P_{j-1} , то $\beta \notin \bigcup_{i=1}^{j-1} (\{\alpha_i\} \cup \check{S}(\alpha_i))$. Так как $|\alpha_i| \geq |\alpha_j|$ для всех $i = 1, \dots, j-1$, то если X_β , $\beta \in E_k^n$, является слагаемым с ненулевым коэффициентом в полиноме P_j , то $\beta \notin \bigcup_{i=1}^j (\{\alpha_i\} \cup \check{S}(\alpha_i))$.

Кроме того

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= P_{j-1} + Q_{j-1} = P_{j-1} + Q_{j-1} + \\ &\quad + ((1 - c_{\alpha_j})X_{\alpha_j} - P(\check{X}_{\alpha_j})) + (\check{X}_{\alpha_j} + (c_{\alpha_j} - 1)X_{\alpha_j}) = \\ &= P_j + Q_j. \end{aligned}$$

3) Теперь если $j < |T|$, то переходим к шагу $j + 1$; если $j = |T|$, то алгоритм завершает работу.

Если моном X_β , $\beta \in E_k^n$, в полиноме $P_{|T|}$ является слагаемым с ненулевым коэффициентом, то $\beta \notin \bigcup_{i=1}^{|T|} (\{\alpha_i\} \cup \check{S}(\alpha_i))$. Но множество T является покрытием множества E_k^n . Значит, полином $P_{|T|}$ не содержит слагаемых с ненулевыми коэффициентами, т.е. $P_{|T|} = 0$. Поэтому

$$f(x_1, \dots, x_n) = P_{|T|} + Q_{|T|} = Q_{|T|} = \sum_{j=1}^{|T|} (c_j X_{\alpha_j} + d_j \check{X}_{\alpha_j}),$$

где $c_1, \dots, c_{|T|}, d_1, \dots, d_{|T|} \in E_k$ — некоторые коэффициенты.

Таким образом мы нашли некоторую п.н.ф., представляющую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, и длина этой п.н.ф. не превосходит $2 \cdot |T|$.

Теорема доказана.

4. Оценка мощности асимметричного покрытия «ВНИЗ»

Теперь оценим мощность покрытия множества E_k^n с помощью конструкции, обобщающей метод доказательства [10] верхней оценки мощности когда, асимметрически покрывающего булев куб.

Обозначим через $w(\alpha)$ количество элементов набора $\alpha \in E_k^n$, не равных $k-1$. Отметим, что число $w(\alpha)$ равно количеству наборов, в тень «вниз» которых входит набор α .

Пусть $T \subseteq E_k^n$ – произвольное множество наборов. Будем говорить, что множество наборов T *покрывает* множество T' , $T' \subseteq E_k^n$, если $T' \subseteq T \cup \dot{S}(T)$. Обозначим через $C(T)$ множество $E_k^n \setminus (\dot{S}(T) \cup T)$ наборов, *не покрываемых* множеством T .

Пусть $\delta \geq 0$ – действительное число. Назовём δ -*весом* множества T число $W_\delta(T) = |T| + \delta \cdot |C(T)|$, и пусть $p_k(n, \delta) = \min_{T \subseteq E_k^n} W_\delta(T)$. Заметим, что число $p_k(n, 1)$ совпадает с мощностью *минимального покрытия* множества E_k^n (т.е. покрытия с минимальной мощностью).

Кроме того, поскольку каждый набор из $T \setminus \{\widetilde{(k-1)}\}$ может быть затенён одним набором, получаем, что мощность минимального затеняющего множества на E_k^n не превосходит $2 \cdot p_k(n, 1)$.

Пусть $\alpha \in E_k^n$, $\beta \in E_k^m$, где $n, m \geq 1$. Через $\alpha \sqcup \beta$ обозначим набор из множества E_k^{n+m} , являющийся конкатенацией набора α и набора β . Если $T' \subseteq E_k^n$, $T'' \subseteq E_k^m$, то через $T' \sqcup T''$ обозначим множество $\{\alpha \sqcup \beta \mid \alpha \in T', \beta \in T''\} \subseteq E_k^{n+m}$.

Лемма 1. При всех натуральных $k \geq 2$, $m \geq 1$, $n \geq 1$ выполнено неравенство $p_k(n+m, 1) \leq k^n \cdot p_k\left(m, \frac{p_k(n, 1)}{k^n}\right)$.

Доказательство. Пусть T' – множество мощности $p_k(n, 1)$, покрывающее множество E_k^n , а T'' – подмножество E_k^m , имеющее минимальный δ -вес при $\delta = \frac{p_k(n, 1)}{k^n}$. Так как множество $T' \sqcup C(T'')$ покрывает множество $E_k^n \sqcup C(T'')$, а множество $E_k^n \sqcup T''$ покрывает множество $E_k^n \sqcup (E_k^m \setminus C(T''))$, верно, что множество $(T' \sqcup C(T'')) \cup (E_k^n \sqcup T'')$ покрывает множество E_k^{n+m} .

Осталось заметить, что мощность множества $(T' \sqcup C(T'')) \cup (E_k^n \sqcup T'')$ равна

$$|T'| \cdot |C(T'')| + k^n \cdot |T''| = k^n \left(|T''| + \frac{|T'|}{k^n} |C(T'')| \right) = k^n \cdot p_k\left(m, \frac{p_k(n, 1)}{k^n}\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $k \geq 2$, и $c_k = 1 + \frac{1}{k-1}$. Тогда если $\delta \geq \frac{c_k}{n}$, то $p_k(n, \delta) \leq c_k \cdot \frac{k^n}{n} \cdot \ln \frac{e\delta n}{c_k}$, где $e = 2,71 \dots$ – основание натурального логарифма.

Доказательство. Построим случайное множество $T \subseteq E_k^n$, независимо выбирая в него наборы $\alpha \in E_k^n$ с вероятностью $q_{w(\alpha)} = \min \left\{ 1, \frac{1}{w(\alpha)+1} \cdot \ln \frac{\delta n}{c_k} \right\}$. Для доказательства леммы достаточно показать, что математическое ожидание δ -веса построенного множества не превосходит $c_k \cdot \frac{k^n}{n} \cdot \ln \frac{e\delta n}{c_k}$.

Воспользуемся фактами:

- 1) количество наборов α из E_k^n , для которых $w(\alpha) = i$, равно $\binom{n}{i} \cdot (k-1)^i$;
- 2) набор α покрывается $w(\alpha) + 1$ наборами;
- 3) $q_{i+1} \leq q_i$;

- 4) $\alpha \in \check{S}(\beta)$ влечет $w(\alpha) \geq w(\beta)$;
 5) $(1 - q_i)^{i+1} \leq \frac{c_k}{\delta n}$.

Получаем:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}W_\delta(T) &= \mathbf{E}|T| + \delta \cdot \mathbf{E}|C(T)| = \\
 &= \sum_{\alpha \in E_k^n} q_{w(\alpha)} + \delta \cdot \sum_{\alpha \in E_k^n} \mathbf{P}(\alpha \in C(T)) \leq \\
 &\leq \ln \frac{\delta n}{c_k} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (k-1)^i \frac{1}{i+1} + \delta \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (k-1)^i \cdot (1 - q_i)^{i+1} \leq \\
 &\leq \ln \frac{\delta n}{c_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{k-1}\right) \cdot \frac{k^n}{n+1} + \delta \cdot \frac{c_k}{\delta n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (k-1)^i \leq \\
 &\leq c_k \cdot \frac{k^n}{n} \left(\ln \frac{\delta n}{c_k} + 1\right).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

При каждом натуральном k , $k \geq 2$, положим $c'_k = 2c_k \cdot (-W_{-1}(-\frac{1}{2e}))$, где $W_{-1}(-\frac{1}{2e}) \approx -2.67835$ – значение второй ветви W -функции Ламберта [11]: $W_{-1}(-\frac{1}{2e}) \cdot e^{W_{-1}(-\frac{1}{2e})} = -\frac{1}{2e}$. Отметим, что c'_k является решением уравнения $c'_k = 2c_k \ln \frac{ec'_k}{c_k}$.

Лемма 3. Пусть $k \geq 2$ и r – целое неотрицательное число. Тогда выполнено неравенство $p_k(2^r, 1) \leq \frac{c'_k \cdot k^{2^r}}{2^r}$.

Доказательство. Докажем утверждение леммы индукцией по r . При $r = 0$ утверждение выполнено, поскольку $p_k(2^0, 1) = \lceil \frac{k}{2} \rceil \leq c'_k k$. Теперь предположим, что $p_k(2^r, 1) \leq \frac{c'_k \cdot k^{2^r}}{2^r}$, и оценим $p_k(2^{r+1}, 1)$. Используя лемму 1, полагая в ней $m = n = 2^r$, а затем лемму 2 при $\delta = \frac{c'_k}{2^r} \geq \frac{c_k}{2^r}$ и $n = 2^r$, получаем

$$\begin{aligned}
 p_k(2^{r+1}, 1) &\leq k^{2^r} \cdot p_k\left(2^r, \frac{p_k(2^r, 1)}{k^{2^r}}\right) \leq \\
 &\leq k^{2^r} \cdot p_k\left(2^r, \frac{c'_k}{2^r}\right) \leq \\
 &\leq \frac{c_k \cdot k^{2^{r+1}}}{2^r} \cdot \ln \frac{ec'_k}{c_k} = \frac{c'_k \cdot k^{2^{r+1}}}{2^{r+1}}.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 2. При каждом натуральном $k \geq 2$ и при каждом целом $n \geq 0$ существует множество мощности $\frac{2c'_k \cdot k^n}{n}$, покрывающее множество E_k^n .

Доказательство. Докажем, что $p_k(n, 1) \leq \frac{2c'_k \cdot k^n}{n}$. Выберем такое целое неотрицательное число r , что $2^r \leq n < 2^{r+1}$. Заметим, что если T покрывает множество $E_k^{2^r}$, то $T \sqcup E_k^{n-2^r}$ покрывает множество E_k^n , и поэтому

$$p_k(n, 1) \leq p_k(2^r, 1) \cdot k^{n-2^r} \leq \frac{c'_k \cdot k^n}{2^r} \leq \frac{2c'_k \cdot k^n}{n}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Если k – простое число, то $L_k^{p.n.f.}(n) = O\left(\frac{k^n}{n}\right)$.

Теорема 3 следует из теорем 1 и 2.

Применяя нижнюю мощностную оценку для $L_k^{p.n.f.}(n)$ из [8], получаем окончательный результат.

Теорема 4. Если k – простое число, то $L_k^{p.n.f.}(n) = \Theta\left(\frac{k^n}{n}\right)$.

Список литературы

1. Угрюмов Е. П., *Цифровая схемотехника*, СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
2. Astola J. T., Stankovich R. S., *Fundamentals of Switching Theory and Logic Design*, Springer, Dordrechht, The Netherlands, 2006.
3. Sasao T., Besslich P., "On the complexity of mod-2 sum PLA's", *IEEE Trans. Comput.*, **39**:2 (1990), 262–266.
4. Супрун В. П., "Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов", *Дискретная математика*, **5**:2 (1993), 111–115.
5. Перязев Н. А., "Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм", *Алгебра и логика*, **34**:3 (1995), 323–326.
6. Селезнева С. Н., "О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами", *Дискретная математика*, **14**:2 (2002), 48–53.
7. Кириченко К. Д., "Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций", *Дискретная математика*, **17**:3 (2005), 80–88.
8. Селезнева С. Н., Дайняк А. Б., "О сложности обобщенных полиномов k -значных функций", *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*, 2008, № 3, 34–39.
9. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*, М.: Высшая школа, 2001.
10. Cooper J. N., Ellis R. B., Kahng A. B., "Asymmetric binary covering codes", *J. Comb. Theory, Ser. A*, **100**:2 (2002), 232–249.
11. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E., Jeffrey D. J., Knuth D. E., "On the LambertW function. *Adv. Comput. Math.*", **5**:1 (1996), 329–359.

Статья поступила 11.12.2013.