Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Дьяконова, Ветвящиеся процессы в марковской случайной среде, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 3, 10–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1287>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 02:29:47

Ветвящиеся процессы в марковской случайной среде

© 2014 г. Е. Е. Дьяконова*

Рассматривается ветвящийся процесс в случайной марковской среде, обладающий свойством критичности. Доказаны условная функциональная предельная теорема для числа частиц в процессе и условный принцип инвариантности. Найдены асимптотики хвостов распределения максимума числа частиц в процессе и общего числа частиц в процессе.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы РАН "Динамические системы и теория управления".

Ключевые слова: ветвящиеся процессы, функциональная предельная теорема, марковская случайная среда.

1. Введение и основные результаты

Впервые ветвящийся процесс в случайной среде был рассмотрен в основополагающей работе Смита и Вилкинсона [1] для случая среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Затем Атрейя и Карлин [2] проанализировали свойства ветвящихся процессов, находящихся под влиянием среды более общего вида. С тех пор было опубликовано большое количество работ, посвященных изучению ветвящихся процессов в случайной среде (см., например, [6]-[22]). При этом в основном рассматривалась ситуация среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Именно для этой ситуации асимптотика вероятности невырождения критического ветвящегося процесса при условии конечности второго момента $EX^2 < \infty$ приращения X сопровождающего случайного блуждания была исследована в статьях [6] и [12]. В работах [7]-[9] также в предположении $EX^2 < \infty$ были доказаны теоремы, описывающие поведение числа частиц в критических процессах, в частности, найдены асимптотики хвостов распределений максимального числа частиц в процессе и общего числа частиц за время жизни процесса. В последующих работах [10], [14]-[16], [20] была получена асимптотика вероятности невырождения и изучено поведение числа частиц в процессе для гораздо более широкого класса критических ветвящихся процессов с одним типом частиц, эволюционирующих в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Для представителей этого класса не только конечность второго момента EX^2 не обязательна, но даже и существование математического ожидания у случайной величины X не является необходимым требованием.

*Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
e-mail: elena@mi.ras.ru

Для случайных сред более общего вида вероятность невырождения критических и докритических ветвящихся процессов с одним типом частиц в стационарной случайной среде изучалась в [22]. Асимптотика вероятности невырождения критического ветвящегося процесса с одним типом частиц для случая марковской среды с конечным множеством состояний была получена в статье [21]. В [18] была найдена асимптотика вероятности невырождения критического ветвящегося процесса с $p \geq 1$ типами частиц, эволюционирующего в марковской случайной среде со счетным множеством состояний, а затем в статье [19] исследовано предельное поведение числа частиц в этом процессе в момент времени n при $n \rightarrow \infty$.

В настоящей работе для ветвящегося процесса в случайной марковской среде со счетным множеством состояний, обладающего свойством критичности, получен ряд предельных теорем, характеризующих поведение числа частиц в процессе. В частности, мы обобщаем некоторые результаты работ [18] и [19], а также распространяем некоторые результаты статей [9] и [10] на случай марковской случайной среды со счетным множеством состояний.

Рассматриваемая нами модель ветвящегося процесса в случайной среде может быть описана следующим образом. Пусть $\mathbf{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \cup \{0\}$ и $\mathbf{e} = \{e_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ – неприводимая аperiодичная положительно возвратная цепь Маркова с множеством состояний $\mathbf{N}_0$. С каждым значением $i \in \mathbf{N}_0$ свяжем вероятностную производящую функцию $f^{(i)}(s)$, $s \in [0, 1]$. Последовательность случайных неотрицательных целочисленных случайных величин $\{Z_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ называется ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона в марковской случайной среде $\mathbf{e}$, если Z_0 не зависит от $\mathbf{e}$ и для всех $n \in \mathbf{N}_0$, $z \in \mathbf{N}_0$ и $i_0, i_1, \dots \in \mathbf{N}_0$

$$\mathcal{L}(Z_{n+1} \mid Z_n = z, \mathbf{e} = (i_0, i_1, \dots)) = \mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^z \xi_n^{(j)}\right), \quad (1)$$

где случайные целочисленные неотрицательные величины $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \dots, \xi_n^{(z)}$ независимы в совокупности и распределены согласно вероятностной производящей функции $f^{(i_n)}(s)$.

Соотношение (1) задает ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона в случайной марковской среде, в котором величина Z_n – число частиц в n -м поколении, причем частицы в этом процессе эволюционируют следующим образом. Если $e_n = i \in \mathbf{N}_0$, то все Z_n частиц n -го поколения производят потомков согласно вероятностному закону, заданному производящей функцией $f^{(i)}(s)$, независимо друг от друга и от предыстории процесса. Таким образом, размножение частиц из n -го поколения происходит согласно производящей функции

$$f_n(s) := f^{(e_n)}(s).$$

Будем называть средой случайную последовательность $(e_0, e_1, e_2, \dots)$. Предполагается, что процесс начался с одной частицы, т. е. $Z_0 = 1$.

Для любой вероятностной меры λ на $\mathbf{N}_0$ символы $\mathbf{E}^{(\lambda)}$ и $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ будут обозначать математическое ожидание и, соответственно, вероятность, относящиеся к рассматриваемому ветвящемуся процессу $\{Z_n\}$ в случайной среде, имеющей начальное распределение λ . Если при этом начальная мера λ целиком сосредоточена в точке $i \in \mathbf{N}_0$, то будем использовать символы $\mathbf{E}^{(i)}$ и $\mathbf{P}^{(i)}$ соответственно. Там, где это не приводит к недоразумениям, будем опускать верхние индексы в этих обозначениях

писать просто **Е** и **Р**. Символы $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$ и $\mathbb{D}$, играющие существенную роль в последующих рассуждениях, используются для обозначения условной вероятности, условного математического ожидания и условной дисперсии при фиксированной среде $(e_0, e_1, e_2, \dots)$.

Положим для $0 \leq k < n - 1$

$$f_{k,n}(s) := f_k(f_{k+1}(\dots(f_{n-1}(s))\dots)), \quad f_{n-1,n}(s) := f_{n-1}(s).$$

Далее, если не оговорено противное, будем считать, что начальное состояние $e_0 = 0$. Обозначим $\nu \geq 1$ момент первого возвращения марковской цепи $\{e_n\}$ в состояние 0. Пусть

$$f_{0,\nu}(s) := f_0(f_1(\dots(f_{\nu-1}(s))\dots))$$

– итерации, построенные по последовательности производящих функций $f_0(s), f_1(s), \dots, f_{\nu-1}(s)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для всех $i \in \mathbf{N}_0$ у производящей функции $f^{(i)}(s)$ существуют конечные производные первого и второго порядков в точке 1, причем производные первого порядка положительны. Положим

$$X := \ln f'_{0,\nu}(1), \quad \eta := \frac{f''_{0,\nu}(1)}{(f'_{0,\nu}(1))^2}.$$

Будем предполагать, что ветвящийся процесс $\{Z_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ в случайной среде $\mathbf{e}$ удовлетворяет следующим условиям.

Условие А1. Найдется такое $\delta > 0$, что

$$\mathbf{E}\nu^{2+\delta} < \infty.$$

Условие А2. Выполняются соотношения

$$\mathbf{E}X = 0, \quad 0 < \sigma^2 := \mathbf{E}X^2 < \infty, \quad (2)$$

$$\mathbf{E} \ln^q(\max\{\eta, 1\}) < +\infty, \quad (3)$$

для некоторого $q > 2$.

Таким образом, условие А2 постулирует критичность рассматриваемого процесса. Пусть

$$X_i := \ln f'_{i-1}(1), \quad i \in \mathbf{N}. \quad (4)$$

Положим

$$S_0 := 0, \quad S_n := X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Введем случайные величины

$$\eta_i := \frac{f''_i(1)}{(f'_i(1))^2}, \quad i \in \mathbf{N}_0, \quad \mu := \sum_{i=0}^{\nu-1} (\eta_i + 1) e^{-S_i}, \quad (5)$$

$$\chi := \max_{i=0, \dots, \nu-1} |S_i|. \quad (6)$$

Положим при $x > 0$

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mu \geq x, \nu > k), \quad \phi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\chi \geq x, \nu > k).$$

Условие А3. Существует $\beta > 1/2$ такое, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta g(x) = 0. \quad (7)$$

Условие А4. Выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \phi(x) = 0.$$

Положим для $t \in [0, 1]$

$$Y_{nt} := \frac{Z_{nt}}{\exp \{S_{nt}\}}, \quad Y_{nt} := \{Y_n, t \in [0, 1]\}.$$

Здесь и далее в аналогичных ситуациях мы будем понимать nt как целую часть числа nt , чтобы не загромождать формулы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия А1 – А3. Тогда

$$\{Y_{nt}, t \in (0, 1] | Z_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{G_t, t \in (0, 1]\}, \quad (8)$$

где предельный процесс $\{G_t\}$ является процессом с п.н. постоянными положительными траекториями, т.е.

$$\mathbf{P}(G_t = G \text{ для всех } t \in (0, 1]) = 1,$$

причем

$$\mathbf{P}(0 < G < \infty) = 1.$$

Сходимость в (8) означает слабую сходимость в пространстве $D[u, 1]$ с топологией Скорохода [3] при любом $u \in (0, 1)$.

Пусть $\{W^+(t), t \in [0, 1]\}$ — броуновская извилина [3]. Мы будем понимать под $W^+(t)$ при $t > 1$ стандартное броуновское движение, начинающееся из $W^+(1)$ и не зависящее от траектории процесса $\{W^+(t)\}$ до момента времени 1, и использовать обозначение $W^+ = \{W^+(t), t \in [0, \infty]\}$. Пусть

$$\tau := \inf \{t > 0 : W^+(t) = 0\}. \quad (9)$$

Отметим, что $\tau > 1$ так как $W^+(t) > 0$ при $t \in (0, 1]$. Положим $V := \mathbf{E}\nu$.

Следующее утверждение является принципом инвариантности для ветвящегося процесса в марковской среде.

Теорема 2. Пусть выполнены условия А1 – А4. Тогда

$$\left\{ \frac{\ln Z_{nt}}{\sigma \sqrt{n}}, t \in [0, 1] | Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{W^+(t)}{\sqrt{V}}, t \in [0, 1] \right\}. \quad (10)$$

Сходимость в (10) означает слабую сходимость в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода.

2. Вспомогательные результаты

Пусть

$$\nu(0) := 0, \nu(n+1) := \min \{k > \nu(n) : e_k = 0\}, n \in \mathbf{N}_0,$$

– последовательность моментов попадания марковской цепи $\{e_n\}$ в начальное состояние $e_0 = 0$. Очевидно, что последовательность $\{\nu(n)\}$ образует процесс восстановления, приращения которого $\nu(n+1) - \nu(n)$, $n \in \mathbf{N}_0$, распределены так же, как и случайная величина $\nu := \nu(1)$, причем ее среднее $V := \mathbf{E}\nu \geq 1$. Введем вложенный ветвящийся процесс (см. [18], [19]):

$$Z_n^* := Z_{\nu(n)}, n \in \mathbf{N}_0.$$

Ясно, что процесс $\{Z_n^*, n \in \mathbf{N}_0\}$ является ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона, функционирующим в случайной среде с независимыми одинаково распределенными компонентами. При этом размножение частиц n -го поколения процесса $\{Z_n^*\}$ описывается производящей функцией

$$f_{*n}(s) := f_{\nu(n)}(f_{\nu(n)+1}(\dots(f_{\nu(n+1)-1}(s))\dots)). \quad (11)$$

Положим

$$X_k^* := \ln f_{*k-1}(s), \eta_{k+1}^* := \frac{f_{*k}''(1)}{(f_{*k}'(1))^2}, k \in \mathbf{N}_0.$$

Очевидно, что $X_j^* \stackrel{d}{=} X_1^* := \ln f'_{0,\nu-1}(1)$. Введем для процесса $\{Z_n^*\}$ сопровождающее его случайное блуждание

$$S_0^* = 0, S_n^* = X_1^* + \dots + X_n^*, n \in \mathbf{N}.$$

Заметим, что $S_n^* = S_{\nu(n)}$. Определим при $n \in \mathbf{N}_0$ случайные величины $r = r(n)$ и $m = m(n)$ соотношениями

$$r(n) := \max \{k : \nu(k) \leq n\}, \quad (12)$$

$$m(n) := \max \{k \leq n : e_k = 0\}. \quad (13)$$

Отметим, что $S_{r(n)}^* = S_{m(n)}$, $Z_{r(n)}^* = Z_{m(n)}$. Ясно, что

$$S_n = S_{r(n)}^* + \ln f'_{m(n),n}(1),$$

где $\ln f'_{n,n}(s) := 0$. Для $t \in [0, 1]$ положим

$$Y_{nt}^* := \frac{Z_{nt}^*}{\exp \{S_{nt}^*\}}, Y_n^* := \{Y_{nt}^*, t \in [0, 1]\}.$$

Лемма 1. Пусть выполнено условие A2. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(Z_n^* > 0) \sim c_0 n^{-1/2}, \quad (14)$$

где $c_0 > 0$, а также

$$\{Y_{nt}^*, t \in (0, 1] | Z_n^* > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{G_t, t \in (0, 1]\}, \quad (15)$$

где предельный процесс $\{G_t\}$ является процессом с п.н. постоянными положительными траекториями, т.е.

$$\mathbf{P}(G_t = G \text{ для всех } t \in (0, 1]) = 1,$$

причем

$$\mathbf{P}(0 < G < \infty) = 1.$$

Кроме того, при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{S_{nt}^*}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid Z_n^* > 0 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (16)$$

где σ – из (2), $W^+(\cdot)$ – броуновская извилина.

Для доказательства достаточно заметить, что из выполнения условия A2 следует, что случайная величина X_1^* принадлежит области притяжения нормального распределения и процесс $\{Z_n^*\}$ удовлетворяет условиям теорем 1.3, 1.5 и следствия 1.2 из [10], согласно которым справедливы соотношения (14) – (16).

Нам также понадобится следующее утверждение, являющееся комбинацией следствия 1 из [18] и леммы 4 из [19].

Лемма 2. Пусть выполнены условия A1 и A2. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(Z_n > 0) \sim c_1 n^{-1/2}, \quad (17)$$

где $c_1 = c_0\sqrt{V}$, а c_0 – из леммы 1.

Лемма 3. Пусть выполнены условия A1 и A2. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{S_{r(nt)}^*}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{W^+(t)}{\sqrt{V}}, t \in [0, 1] \right\}. \quad (18)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$, произвольные $k \in \mathbf{N}$, $x_i \geq 0$ и $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$. Пусть

$$n^- := n(1 - \varepsilon_0)/V, n^+ := n(1 + \varepsilon_0)/V. \quad (19)$$

Для $t > 0$ введем интервал

$$U_{nt} = U_{nt}(\varepsilon_0) := [n^-t, n^+t], U_n := U_{n1}. \quad (20)$$

Из формул (26), (36) и (37) работы [18] следует, что для любого фиксированного $u \in (0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$

$$n^{\delta+1} \mathbf{P}(r(nt) \notin U_{nt}) \rightarrow 0 \quad (21)$$

равномерно по $t \in [u, 1]$, где величина δ та же, что и в условии A1. Откуда

$$\begin{aligned} & \sqrt{n} \mathbf{P} \left(\frac{S_{r(nt_i)}^*}{\sigma\sqrt{n}} > x_i, i = 1, \dots, k, Z_n > 0 \right) \\ & \sim \sqrt{n} \mathbf{P} \left(\frac{S_{r(nt_i)}^*}{\sigma\sqrt{n}} > x_i, r(nt_i) \in U_{nt_i}, i = 1, \dots, k, r(n) \in U_n, Z_n > 0 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Учитывая, что

$$\left\{ Z_{r(n)}^* > 0 \right\} \supseteq \left\{ Z_n > 0 \right\} \supseteq \left\{ Z_{r(n)+1}^* > 0 \right\}, \quad (23)$$

несложно видеть, что в силу произвольности ε_0 и непрерывности почти всех траекторий процесса $\{W^+(t)\}$ из (14), (16), (17), (22), (23) следует сходимость конечномерных распределений последовательности процессов $\left\{ \frac{S_{r(n)t}^*}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid Z_n > 0 \right\}$ к конечномерным распределениям процесса $\left\{ \frac{W^+(t)}{\sqrt{V}} \right\}$.

Для $\delta > 0$ и функции $F = F(t) \in D[a, b], 0 \leq a < b < \infty$, введем модуль непрерывности

$$w_F(\delta, a, b) := \sup_{\substack{|x-s| < \delta, \\ x, s \in [a, b]}} |F(x) - F(s)|.$$

Положим для $t \in [0, 1]$

$$\mathcal{S}_n^*(t) := \frac{S_{r(nt)}^*}{\sigma\sqrt{n}}, \quad \mathcal{S}_n^{**}(t) := \frac{S_{nt}^*}{\sigma\sqrt{n}},$$

$$\mathcal{S}_n^* := \{\mathcal{S}_n^*(t), t \in [0, 1]\}, \quad \mathcal{S}_n^{**} := \{\mathcal{S}_n^{**}(t), t \in [0, 1]\}.$$

Докажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{\mathcal{S}_n^*}(\delta, 0, 1) > \varepsilon \mid Z_n > 0) = 0. \quad (24)$$

Покажем, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P}(w_{\mathcal{S}_n^*}(\delta, 0, 1) > \varepsilon, Z_{r(n)}^* > 0) = 0. \quad (25)$$

Из леммы 1 следует, что для любого $\varepsilon' > 0$ существует такое $\delta' \in (0, 1/V)$, что при

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P}(w_{\mathcal{S}_n^{**}}(\delta', 0, 1) > \varepsilon \sqrt{V/2}, Z_n^* > 0) \leq \frac{\varepsilon'}{\sqrt{2V}},$$

а значит, существует такое $n_0 > 0$, что при $n > n_0$

$$\mathbf{P}(w_{\mathcal{S}_n^{**}}(\delta', 0, 1) > \varepsilon \sqrt{V/2}, Z_n^* > 0) \leq \frac{\varepsilon'}{\sqrt{2Vn}}. \quad (26)$$

Зададим значение величины ε_0 в (19)

$$\varepsilon_0 := \frac{\delta' V}{4}.$$

Положим $m := [1/\varepsilon_0] + 1$, где $[x]$ – целая часть числа x . Пусть

$$y_i = \frac{i}{m}, \quad i = 0, \dots, m,$$

а интервалы $U_{ny_i} = U_{ny_i}(\varepsilon_0), i = 1, \dots, m$, – те же, что и в (20). В силу (21) для $\delta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P}(w_{\mathcal{S}_n^*}(\delta, 0, 1) > \varepsilon, Z_{r(n)}^* > 0) \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P}(w_{\mathcal{S}_n^*}(\delta, 0, 1) > \varepsilon, Z_{r(n)}^* > 0, r(ny_i) \in U_{ny_i}, i = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (27)$$

Для $s \in [0, 1]$ положим

$$y^-(s) := \max_i \{y_i : y_i \leq s\}, \quad y^+(s) := \min_i \{y_i : y_i \geq s\}.$$

Так как $r(n_1) \leq r(n_2)$ при $n_1 \leq n_2$, то при $r(ny_i) \in U_{ny_i}, i = 1, \dots, m$, для таких x, s , что $0 \leq s \leq x \leq 1, x - s \leq \delta_0 := 1/m$,

$$\begin{aligned} r(nx) - r(ns) &\leq r(ny^+(x)) - r(ny^-(s)) \\ &\leq y^+(x) \frac{n(1 + \varepsilon_0)}{V} - y^-(s) \frac{n(1 - \varepsilon_0)}{V} \\ &\leq \frac{n}{V} \left(\frac{2}{m} + 2\varepsilon_0 \right) \leq n\delta'. \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку $\varepsilon_0 \leq 1/2$, и, значит, при $r(n) \in U_n$

$$\frac{n}{2V} \leq r(n) \leq \frac{2n}{V}, \quad (29)$$

из (28) следует, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(w_{S_n^*}(\delta_0, 0, 1) > \varepsilon, Z_{r(n)}^* > 0, r(ny_i) \in U_{ny_i}, i = 1, \dots, m) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\frac{w_{S_n^*}(\delta_0, 0, 1)\sqrt{n}}{\sqrt{r(n)}} > \varepsilon\sqrt{V/2}, Z_{r(n)}^* > 0, r(ny_i) \in U_{ny_i}, i = 1, \dots, m\right) \\ &\leq \sup_{k \in U_n} \mathbf{P}\left(w_{S_k^*}(\delta', 0, 1) > \varepsilon\sqrt{V/2}, Z_k^* > 0\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Из (26) и (29) вытекает, что при $n > 2Vn_0$

$$\sup_{k \in U_n} \mathbf{P}\left(w_{S_k^*}(\delta', 0, 1) > \varepsilon\sqrt{V/2}, Z_k^* > 0\right) \leq \frac{\varepsilon'}{\sqrt{n}}. \quad (31)$$

Из (27), (30) и (31) получаем, что при $n > 2Vn_0$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P}(w_{S_n^*}(\delta_0, 0, 1) > \varepsilon, Z_{r(n)}^* > 0) \leq \varepsilon',$$

откуда вытекает равенство (25), которое в силу (17), (21) и (23) влечет справедливость (24). Из сходимости конечномерных распределений и формулы (24) следует (см. [3] § 15) соотношение (18).

Лемма доказана.

Лемма 4. При выполнении условий A1 – A4

$$\left\{ \frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{W^+(t)}{\sqrt{V}}, t \in [0, 1] \right\}. \quad (32)$$

Доказательство. Положим для $t \in [0, 1]$

$$\Delta_{n,t} := S_{nt} - S_{r(nt)}^*$$

$$S_n(t) := \frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad \mathcal{R}_n(t) := \frac{\Delta_{n,t}}{\sigma\sqrt{n}},$$

$$\mathcal{S}_n := \{\mathcal{S}_n(t), t \in [0, 1]\}, \quad \mathcal{R}_n := \{\mathcal{R}_n(t), t \in [0, 1]\}.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n^* + \mathcal{R}_n. \quad (33)$$

Поэтому в силу лемм 2 и 3 для доказательства сходимости (32) достаточно показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} |\mathcal{R}_n(t)| > \varepsilon, Z_n > 0 \right) \rightarrow 0. \quad (34)$$

Ясно, что

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} |\mathcal{R}_n(t)| > \varepsilon, Z_n > 0 \right) \leq \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} |\Delta_{n,t}| > \varepsilon \sigma \sqrt{n} \right). \quad (35)$$

Положим для $i = 0, 1, \dots$

$$\chi_i := \max_{j=\nu(i), \dots, \nu(i+1)-1} |S_j - S_{\nu(i)}^*|, \quad \nu_i := \nu(i+1) - \nu(i).$$

Несложно видеть, что $(\chi_0, \nu_0), (\chi_1, \nu_1), \dots$ образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных двумерных векторов, причем $(\chi_i, \nu_i) \stackrel{d}{=} (\chi, \nu)$, где χ из (6).

Следовательно, при $x > 0$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} |\Delta_{n,t}| > x \right) \leq \sum_{i=0}^{r(n)} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\chi_i > x, \nu_i > k) \leq n \phi(x). \quad (36)$$

Из соотношений (35) и (36) в силу условия A4 следует (32). Лемма доказана.

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем $u \in (0, 1)$ и $t \in [u, 1]$. Покажем сначала, что для $x \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(Y_{nt} > x \mid Z_n > 0) \rightarrow \mathbf{P}(G_t > x), \quad (37)$$

где случайная величина G_t та же, что и в (15). Для этого воспользуемся схемой доказательства теоремы 1 в [19], в которой установлено соотношение (37) для случая $t = 1$. Здесь мы приведем соответствующие аргументы только для полноты изложения.

Для $0 \leq n_1 < n_2$ обозначим через $\xi^{(k)}(n_1, n_2)$ численность потомства в момент времени n_2 частицы, которая жила в n_1 -м поколении и была в нём k -й, $k = 1, \dots, Z_{n_1}$. Положим $\xi^{(k)}(n_2, n_2) = 1$. Рассмотрим величину

$$\mathbf{P}(Y_{nt} > x, Z_n > 0) = \mathbf{P}(Y_{r(nt)}^* + \varkappa_{r(nt)} > x, Z_n > 0), \quad (38)$$

где

$$\varkappa_{r(nt)} := Y_{nt} - Y_{r(nt)}^* = e^{-S_{r(nt)}^*} \sum_{k=1}^{Z_{r(nt)}^*} \left(\frac{\xi^{(k)}(m(nt), nt)}{e^{S_{nt} - S_{m(nt)}}} - 1 \right). \quad (39)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_{nt} > x, Z_n > 0) &= \mathbf{P}(Y_{nt} > x, Z_n > 0, r(nt) \in U_{nt}, r(n) \in U_n) \\ &\quad + \mathbf{P}(Y_{nt} > x, Z_n > 0, r(nt) \notin U_{nt}, r(n) \in U_n) \\ &\quad + \mathbf{P}(Y_{nt} > x, Z_n > 0, r(nt) \notin U_{nt}, r(n) \notin U_n) \\ &\quad + \mathbf{P}(Y_{nt} > x, Z_n > 0, r(nt) \in U_{nt}, r(n) \notin U_n), \end{aligned} \quad (40)$$

где интервалы U_{nt}, U_n те же, что и в (20). Из (17) и (21) следует, что для доказательства (37) достаточно рассмотреть первый член в правой части равенства (40). Для $i = 0, 1$ положим

$$\mathcal{A}_i := \mathbf{P}\left(Y_{nt} > x, Z_{r(n)+i}^* > 0, r(nt) \in U_{nt}, r(n) \in U_n\right).$$

Несложно видеть, что

$$\mathcal{A}_0 \geq \mathbf{P}(Y_{nt} > x, Z_n > 0, r(nt) \in U_{nt}, r(n) \in U_n) \geq \mathcal{A}_1.$$

Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{c_0 \sqrt{V}} \mathcal{A}_i = \mathbf{P}(G_t > x), \quad i = 0, 1, \quad (41)$$

где c_0 – из (14), G_t – из (15). Мы рассмотрим лишь случай $i = 0$, поскольку для $i = 1$ доказательство аналогично. Согласно (38)

$$\mathcal{A}_0 = \mathbf{P}\left(Y_{r(nt)}^* + \varkappa_{r(nt)} > x, Z_{r(n)}^* > 0, r(nt) \in U_{nt}, r(n) \in U_n\right). \quad (42)$$

Из леммы 1 и соотношения (21) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{c_0 \sqrt{V}} \mathbf{P}\left(Y_{r(nt)}^* > x, Z_{r(n)}^* > 0, r(nt) \in U_{nt}, r(n) \in U_n\right) = \mathbf{P}(G_t > x). \quad (43)$$

Покажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \mathbf{P}\left(|\varkappa_{r(nt)}| > \varepsilon, Z_{r(n)}^* > 0, r(nt) \in U_{nt}, r(n) \in U_n\right) \rightarrow 0 \quad (44)$$

равномерно по $t \in [u, 1]$. Пусть для целых неотрицательных k

$$\tau^*(k) := \min \{j \leq k : S_j^* = \min(S_0^*, \dots, S_k^*)\}$$

– самая левая точка, в которой случайное блуждание $\{S_j^*\}$ на интервале $[0, k]$ достигает минимума. Для $0 \leq l \leq k$ обозначим

$$L_{l,k}^* := \min_{0 \leq j \leq k-l} (S_{l+j}^* - S_l^*), \quad L_k^* := L_{0,k}^*, \quad (45)$$

т.е. L_k^* – минимум случайного блуждания $S_0^*, \dots, S_k^*$ на интервале $[0, k]$. Очевидно, что

$$\{\tau^*(k) = l\} = \{\tau^*(l) = l\} \cap \{L_{l,k}^* \geq 0\}. \quad (46)$$

Запишем величину β из условия АЗ в виде

$$\beta = \frac{1/2 + \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1}, \quad (47)$$

где $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ и $\varepsilon_2 > 0$. Для $M = [n^{\varepsilon_1/4}]$ (здесь и далее $[x]$ обозначает целую часть числа x) рассмотрим представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(|\varkappa_{r(nt)}| > \varepsilon, Z_{r(n)}^* > 0, r(nt) \in U_{nt}, r(n) \in U_n \right) \\ = & \mathbf{P} \left(|\varkappa_{r(nt)}| > \varepsilon, Z_{r(n)}^* > 0, \tau^*(r(nt)) > M, r(nt) \in U_{nt}, r(n) \in U_n \right) \\ & + \mathbf{P} \left(|\varkappa_{r(nt)}| > \varepsilon, Z_{r(n)}^* > 0, \tau^*(r(nt)) \leq M, r(nt) \in U_{nt}, r(n) \in U_n \right) \\ =: & \mathcal{H}(n, t, M) + \mathcal{C}(n, t, M). \end{aligned} \quad (48)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(n, t, M) & \leq \mathbf{P} \left(Z_{r(n)}^* > 0, \tau^*(r(nt)) > M, r(nt) \in U_{nt} \right) \\ & \leq \mathbf{P} \left(Z_{n-t}^* > 0, \tau^*(n^+t) > M, r(nt) \in U_{nt} \right) \\ & = \mathbf{P} \left(Z_{n-t}^* > 0, Z_{n^+t}^* > 0, \tau^*(n^+t) > M, r(nt) \in U_{nt} \right) \\ & \quad + \mathbf{P} \left(Z_{n-t}^* > 0, Z_{n^+t}^* = 0, \tau^*(n^+t) > M, r(nt) \in U_{nt} \right) \\ & \leq \mathcal{H}_1(n, t, M) + \mathcal{H}_2(n, t), \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$\mathcal{H}_1(n, t, M) := \mathbf{P} \left(Z_{n^+t}^* > 0, \tau^*(n^+t) > M \right), \quad (50)$$

$$\mathcal{H}_2(n, t) := \mathbf{P} \left(Z_{n-t}^* > 0, Z_{n^+t}^* = 0 \right). \quad (51)$$

Из формулы (4.3) работы [10] следует, что при $k \rightarrow \infty$

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt{n} \mathbf{P} \left(Z_{n^+t}^* > 0, \tau^*(n^+t) > k \right) \rightarrow 0$$

равномерно по $t \in [u, 1]$. Следовательно, существует такая положительная функция $\gamma(n)$, что при всех $t \in [u, 1]$

$$\sqrt{n} \mathcal{H}_1(n, t, M) \leq \gamma(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Поскольку

$$\mathcal{H}_2(n, t) = \mathbf{P} \left(Z_{n-t}^* > 0 \right) - \mathbf{P} \left(Z_{n^+t}^* > 0 \right)$$

и $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$, то, применяя (14), получаем, что

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \mathcal{H}_2(n, t) & \leq \frac{c_2}{4\sqrt{t}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_0}} - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_0}} \right) \\ & \leq \frac{c_2}{4\sqrt{u}} \left(\frac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0} - 1 \right) \leq \frac{c_2}{\sqrt{u}} \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (53)$$

для некоторого $c_2 > 0$. Из (49), (52) и (53), учитывая произвольность ε_0 , получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \mathcal{H}(n, t, M) \rightarrow 0 \quad (54)$$

равномерно по $t \in [u, 1]$.

Рассмотрим теперь величину $\mathcal{C}(n, t, M)$. Ясно, что

$$\mathcal{C}(n, t, M) \leq \mathbf{P} \left(|\varkappa_{r(nt)}| > \varepsilon, \tau^*(r(nt)) \leq M, r(nt) \in U_{nt} \right) =: \mathcal{C}_0(n, t, M). \quad (55)$$

Для $N = \lfloor n^{\varepsilon_1/2} \rfloor$ запишем представление

$$\mathcal{C}_0(n, t, M) = \mathcal{C}_1(n, t, M, N) + \mathcal{C}_2(n, t, M, N), \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(n, t, M, N) &:= \sum_{l=0}^M \mathbf{P} \left(|\varkappa_{r(nt)}| > \varepsilon, e^{-S_l^*} > N, \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right), \\ \mathcal{C}_2(n, t, M, N) &:= \sum_{l=0}^M \mathbf{P} \left(|\varkappa_{r(nt)}| > \varepsilon, e^{-S_l^*} \leq N, \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Положим

$$f_{*,l,k}(s) := f_{*,l}(f_{*,l+1}(\dots(f_{*,k-1}(s))\dots)), \quad 0 \leq l \leq k-2, \quad f_{*,k-1,k}(s) := f_{*,k-1}(s),$$

где $f_{*,k}(s)$ — из (11). Ясно, что $f'_{*,k}(1) = e^{S_{\nu(k+1)} - S_{\nu(k)}}$, $f'_{*,0,k}(1) = e^{S_k^*}$. Заметим, что (см. (46))

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(n, t, M, N) &\leq \sum_{l=0}^M \mathbf{P} \left(Z_{r(nt)}^* > 0, e^{-S_l^*} > N, \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right) \\ &= \mathbf{E} \left[\sum_{l=0}^M \mathbb{P} \left(Z_{r(nt)}^* > 0, e^{-S_l^*} > N, \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right) \right] \\ &\leq \mathbf{E} \left[\sum_{l=0}^M (1 - f_{*,0,r(nt)}(0)) I \left\{ e^{-S_l^*} > N, \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right\} \right] \\ &\leq \mathbf{E} \left[\sum_{l=0}^M e^{S_l^*} (1 - f_{*,l,r(nt)}(0)) I \left\{ e^{-S_l^*} > N, \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right\} \right] \\ &\leq \frac{1}{N} \mathbf{E} \left[\sum_{l=0}^M (1 - f_{*,l,r(nt)}(0)) I \left\{ \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right\} \right] \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{l=0}^M \mathbf{P}(\tau^*(l) = l) \mathbf{E} \left[(1 - f_{*,l,r(nt)}(0)) ; L_{l,r(nt)}^* \geq 0, r(nt) \in U_{nt} \right], \end{aligned} \quad (58)$$

где $I\{\mathcal{B}\}$ — индикатор события $\mathcal{B}$, а величина $L_{l,k}^*$ та же, что и в (45). Из формул (1.7) и (4.8) в [10] следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n^* > 0, L_n^* \geq 0) &= \mathbf{E}[\mathbb{P}(Z_n^* > 0, L_n^* \geq 0)] \\ &= \mathbf{E}[(1 - f_{*,0,n}(0)) I\{L_n^* \geq 0\}] \sim c_3 \mathbf{P}(Z_n^* > 0), \end{aligned} \quad (59)$$

где $c_3 > 0$, а величина L_n^* та же, что и в (45). Так как при $l \in \{0, 1, \dots, M\}$

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[1 - f_{*,l,r(nt)}(0) ; L_{l,r(nt)}^* \geq 0, r(nt) \in U_{nt} \right] \\ &\leq \mathbf{E} \left[1 - f_{*,l,n-t}(0) ; L_{l,n-t}^* \geq 0 \right], \end{aligned} \quad (60)$$

то объединяя (58) – (60) и используя (14), получаем, что для некоторого $c_4 > 0$

$$C_1(n, t, M, N) \leq \frac{M+1}{N} c_4 (1 - \varepsilon_0)^{-1/2} u^{-1/2} n^{-1/2} = o(n^{-1/2}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (61)$$

Обозначим через

$$m^+(nt) := \min \{k \geq nt : e_k = 0\}$$

следующий после $m(nt)$ момент попадания цепи $\{e_n\}$ в состояние 0. Пусть

$$\Xi(nt) := \sum_{k=m(nt)}^{nt} \left(\frac{f_k''(1)}{(f_k'(1))^2} + 1 \right) e^{-S_k}, \quad \Xi^{(1)}(nt) := \sum_{k=m(nt)}^{m^+(nt)} \left(\frac{f_k''(1)}{(f_k'(1))^2} + 1 \right) e^{-S_k}. \quad (62)$$

Положим $x_{n,t} := (nt)^{1-\varepsilon_1}$, где ε_1 – из (47). Представим $C_2(n, M, N)$ из (57) в виде суммы

$$C_2(n, t, M, N) = C_2^{(1)}(n, t, M, N) + C_2^{(2)}(n, t, M, N), \quad (63)$$

где

$$C_2^{(1)}(n, t, M, N) := \sum_{l=0}^M \mathbf{P} \left(|\varkappa_{r(nt)}| > \varepsilon, e^{-S_l^*} \leq N, \Xi(nt) > x_{n,t}, \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right),$$

$$C_2^{(2)}(n, t, M, N) := \sum_{l=0}^M \mathbf{P} \left(|\varkappa_{r(nt)}| > \varepsilon, e^{-S_l^*} \leq N, \Xi(nt) \leq x_{n,t}, \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right).$$

Поскольку $\Xi^{(1)}(nt) \geq \Xi(nt)$, то

$$\begin{aligned} C_2^{(1)}(n, t, M, N) &\leq \mathbf{P}(\Xi(nt) > x_{n,t}, r(nt) \in U_{nt}) \\ &\leq \mathbf{P}(\Xi^{(1)}(nt) > x_{n,t}, r(nt) \in U_{nt}) =: C_2^{(1,1)}(n, t). \end{aligned} \quad (64)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \nu_{nt}^- &:= nt - \nu(r(nt)), \quad A(y) := \mathbf{P}(\nu \leq y), \\ H(k) &:= \sum_{l=1}^{\infty} A^{l*}(k), \quad h(k+1) := H(k+1) - H(k), \quad k \in \mathbf{N}_0, \end{aligned}$$

где $A^{l*}(y)$ – l -кратная свертка функции распределения $A(y)$ с собой.

Так как $\nu(n) \geq n$ и $\nu(r(n)) \leq n$, то

$$\begin{aligned} C_2^{(1,1)}(n, t) &\leq \mathbf{P}(\Xi^{(1)}(nt) > x_{n,t}, n^-t \leq r(nt)) \\ &\leq \mathbf{P}(\Xi^{(1)}(nt) > x_{n,t}, n^-t \leq \nu(r(nt)) \leq nt) \\ &= \sum_{k=0}^{nt-n^-t} \mathbf{P}(\Xi^{(1)}(nt) > x_{n,t}, \nu_{nt}^- = k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{nt-n^-t} h(nt-k) \mathbf{P}(\mu > x_{n,t}, \nu > k) =: C_2^{(1,2)}(n, t), \end{aligned} \quad (65)$$

где величина n^- та же, что и в (19). По теореме восстановления (см. [13], гл. 9, §2) при достаточно больших n имеем для $t \in [u, 1]$

$$\mathcal{C}_2^{(1,2)}(n, t,) \leq \frac{2}{V} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mu > x_{n,t}, \nu > k) \leq \frac{2}{V} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mu > x_{n,u}, \nu > k). \quad (66)$$

Из (64), (65) и (66) в силу условия АЗ следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}\mathcal{C}_2^{(1)}(n, t, M, N) \rightarrow 0 \quad (67)$$

равномерно по $t \in [u, 1]$.

Для оценки величины $\mathcal{C}_2^{(2)}(n, t, M, N)$ воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_2^{(2)}(n, t, M, N) \\ &= \mathbf{E} \left[\sum_{l=0}^M \mathbb{P} \left(|\varkappa_{r(nt)}| > \varepsilon, e^{-S_l^*} \leq N, \Xi(nt) \leq x_{n,t}, \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right) \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

Положим для $n_1 \leq n_2$

$$\rho^{(k)}(n_1, n_2) := \frac{\xi^{(k)}(n_1, n_2)}{\exp\{S_{n_2} - S_{n_1}\}} - 1, \quad k = 1, \dots, Z(n_1),$$

где $\xi^{(k)}(n_1, n_2)$ были определены перед (38). Ясно, что при фиксированной среде случайные величины $\xi^{(k)}(n_1, n_2), k = 1, \dots, Z(n_1)$, независимы и одинаково распределены. Так как $\mathbb{E}[Z_{m(nt)}] = e^{S_{r(nt)}^*}$ и

$$\varkappa_{r(nt)} = \frac{1}{e^{S_{r(nt)}^*}} \sum_{k=1}^{Z_{m(nt)}} \rho^{(k)}(m(nt), nt),$$

то в силу неравенства Чебышева

$$\mathbb{P}(|\varkappa_{r(nt)}| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 e^{2S_{r(nt)}^*}} e^{S_{r(nt)}^*} \mathbb{D} \left[\rho^{(1)}(m(nt), nt) \right]. \quad (69)$$

Несложно видеть, что $\mathbb{E}[\xi^{(k)}(n_1, n_2)] = e^{S_{n_2} - S_{n_1}}$ и

$$\mathbb{E} \left[\xi^{(k)}(n_1, n_2) \left(\xi^{(k)}(n_1, n_2) - 1 \right) \right] = e^{2(S_{n_2} - S_{n_1})} \sum_{k=n_1}^{n_2-1} \frac{f_k''(1)}{(f_k'(1))^2} e^{-(S_k - S_{n_1})}, \quad (70)$$

то есть

$$\mathbb{D} \left[\rho^{(1)}(m(nt), nt) \right] \leq \Xi(nt), \quad (71)$$

где $\Xi(nt)$ – из соотношения (62). Объединяя (68) – (71), получаем

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_2^{(2)}(n, t, M, N) \\ & \leq \sum_{l=0}^M \mathbf{E} \left[\frac{e^{-S_l^*}}{\varepsilon^2 e^{S_{r(nt)}^* - S_l^*}} \Xi(nt); e^{-S_l^*} \leq N, \Xi(nt) \leq x_{n,t}, \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right] \\ & \leq \frac{Nx_{n,t}}{\varepsilon^2} \sum_{l=0}^M \mathbf{E} \left[e^{-(S_{r(nt)}^* - S_l^*)}; \tau^*(r(nt)) = l, r(nt) \in U_{nt} \right]. \end{aligned} \quad (72)$$

В силу утверждения 2.1 работы [11]

$$\mathbf{E} \left[e^{-S_k^*}, L_k^* \geq 0 \right] \sim c_5 k^{-3/2}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (73)$$

где $c_5 > 0$. Из (72) и (73) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$C_2^{(2)}(n, t, M, N) \leq \frac{c_6 N (M+1) x_{n,t}}{\varepsilon^2} n^{-3/2} \leq \frac{c_6 N (M+1)}{\varepsilon^2} n^{1-\varepsilon_1-3/2} = o\left(n^{-1/2}\right), \quad (74)$$

где $c_6 > 0$. Из соотношений (55), (56), (67) и (74), учитывая произвольность ε_0 , получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \mathcal{C}(n, t, M) \rightarrow 0 \quad (75)$$

равномерно по $t \in [u, 1]$. Соотношения (48), (54) и (75) влекут выполнение (44).

Теперь, объединяя (42) – (44), получаем (41) для случая $i = 0$. Из (40), (41) в силу произвольности ε_0 следует (37).

Рассмотрим теперь конечномерные распределения процесса $\{Y_{nt} \mid Z_n > 0\}$. Зафиксируем $k \in \mathbf{N}$, $x_i \geq 0$ и $t_i \in [u, 1]$, $i = 1, \dots, k$, причем $u \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$. Из соотношения (21) следует, что

$$\begin{aligned} & \sqrt{n} \mathbf{P}(Y_{nt_i} > x_i, i = 1, \dots, k, Z_n > 0) \\ & \sim \sqrt{n} \mathbf{P}(Y_{nt_i} > x_i, r(nt_i) \in U_{nt_i}, i = 1, \dots, k, r(n) \in U_n, Z_n > 0). \end{aligned} \quad (76)$$

Так как $Y_{nt_i} = Y_{r(nt_i)}^* + \varkappa_{r(nt_i)}$ и для произвольного $\varepsilon > 0$, $i = 1, \dots, k$, в силу (44)

$$\mathbf{P}(\exists j \in \{1, \dots, k\} : |\varkappa_{r(nt_j)}| > \varepsilon, r(nt_i) \in U_{nt_i}, i = 1, \dots, k, r(n) \in U_n, Z_n > 0)$$

$$\leq \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(|\varkappa_{r(nt_i)}| > \varepsilon, r(nt_i) \in U_{nt_i}, r(n) \in U_n, Z_n > 0) = o\left(n^{-1/2}\right), \quad (77)$$

то из (17), (76), (77) и леммы 1 следует, что конечномерные распределения последовательности процессов $\{Y_{nt} \mid Z_n > 0\}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям процесса $\{G_t\}$.

Для завершения доказательства осталось убедиться, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, u, 1) > \varepsilon \mid Z_n > 0) = 0. \quad (78)$$

Из леммы 1 и соотношения (21), применяя рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве соотношения (25), заключаем, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P}(w_{Y_n^*}(\delta, u, 1) > \varepsilon, Z_{r(n)}^* > 0) = 0.$$

Откуда, учитывая соотношения (14), (17), (21), (39) и (44), несложно получить (78). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Если $Z_n > 0$, то положим при $t \in [0, 1]$

$$\mathcal{X}_{n,t} := \frac{\ln Y_{nt}}{\sigma \sqrt{n}}, \quad \mathcal{Z}_{n,t} := \frac{\ln Z_{nt}}{\sigma \sqrt{n}}, \quad \mathcal{X}_n = \{\mathcal{X}_{n,t}, t \in [0, 1]\}, \quad \mathcal{Z}_n = \{\mathcal{Z}_{n,t}, t \in [0, 1]\}.$$

Из теоремы 1 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{\mathcal{X}_{n,t}, t \in (0, 1] \mid Z_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0. \quad (79)$$

Откуда, применяя лемму 4, получаем

$$\{\mathcal{Z}_{n,t}, t \in (0, 1] \mid Z_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{W^+(t)}{\sqrt{V}}, t \in (0, 1] \right\}.$$

Таким образом, для завершения доказательства осталось показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{\mathcal{Z}_n}(\delta, 0, u) > \varepsilon \mid Z_n > 0) = 0. \quad (80)$$

Легко видеть, что

$$w_{\mathcal{Z}_n}(\delta, 0, u) \leq \sup_{t \in [0, u]} \frac{\ln Z_{nt}}{\sigma \sqrt{n}} \leq \sup_{t \in [0, u]} \frac{S_{nt}}{\sigma \sqrt{n}} + \sup_{t \in [0, u]} \frac{\ln Y_{nt}}{\sigma \sqrt{n}}. \quad (81)$$

Заметим, что для $\varepsilon > 0$ в силу леммы 4 и непрерывности траекторий броуновской извилины

$$\lim_{u \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} \frac{S_{nt}}{\sigma \sqrt{n}} > \varepsilon \mid Z_n > 0\right) = \lim_{u \downarrow 0} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W^+(t) > \varepsilon\right) = 0. \quad (82)$$

Так как $\mathbb{E}[Z_n e^{-S_n}] = 1$ и при фиксированной случайной среде последовательность $\{Z_n e^{-S_n}, n \in \mathbf{N}\}$ образует мартингал, то в силу неравенства Дуба получаем, что для $\varepsilon > 0$ и $u \in (0, 1)$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} \frac{\ln Y_{nt}}{\sigma \sqrt{n}} > \varepsilon, Z_n > 0\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{k \leq n} \frac{Z_k}{e^{S_k}} > e^{\varepsilon \sigma \sqrt{n}}\right) \leq e^{-\varepsilon \sigma \sqrt{n}},$$

то есть

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} \frac{\ln Y_{nt}}{\sigma \sqrt{n}} > \varepsilon, Z_n > 0\right) = \mathbf{E}\left[\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} \frac{\ln Y_{nt}}{\sigma \sqrt{n}} > \varepsilon, Z_n > 0\right)\right] \leq e^{-\varepsilon \sigma \sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (83)$$

при $n \rightarrow \infty$. Из (17), (81)–(83) следует (80). Теорема доказана.

4. Некоторые важные следствия

Далее мы будем предполагать, что выполняется следующее условие.

Условие A0. Цепь Маркова $\{e_n\}$ удовлетворяет условию Деблина [5], является аperiодичной и у нее существует только один эргодический класс.

Известно [5], что если выполнено условие A0, то цепь $\{e_n\}$ имеет стационарную меру $\pi := \{\pi(i)\}_{i=0}^\infty$, причем $|p(n, i, j) - \pi(j)| \leq C\theta^n$, где $p(n, i, j) := \mathbf{P}(e_n = j \mid e_0 = i)$, $C > 0$, $\theta \in (0, 1)$. Для $j \in \mathbf{N}_0$ будем снабжать верхним индексом (j) обозначения случайных элементов, связанных с цепью $\{e_n\}$, если $e_0 = j$ (например, $Z_n^{(j)}, S_n^{(j)} = X_1^{(j)} + \dots + X_n^{(j)}$ и т.д.)

Заметим, что случайные величины $X_i, i \in \mathbf{N}$, и $\eta_j, j \in \mathbf{N}_0$, (см. (4) и (5)) являются функциями от состояний e_{i-1} и e_j соответственно. Известно [5], что если

$$\mathbf{E}^{(\pi)} \eta_1 < \infty, \quad (84)$$

то с вероятностью 1

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \eta_i^{(j)} \rightarrow \mathbf{E}^{(\pi)} \eta_1 \quad (85)$$

равномерно по $j \in \mathbf{N}_0$. Предположим, что справедливы соотношения

$$\mathbf{E}^{(\pi)} X_1 = 0, \quad (86)$$

и для некоторого $\delta_0 > 0$

$$\mathbf{E}^{(\pi)} |X_1|^{2+\delta_0} < \infty. \quad (87)$$

Известно также [5], что из (86) и (87) следует, что с вероятностью 1

$$\frac{S_n^{(j)}}{n} \rightarrow 0$$

равномерно по $j \in \mathbf{N}_0$ и что существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{(\pi)} \left(n^{-1/2} S_n \right)^2 =: \sigma_1^2,$$

причем если

$$\sigma_1 > 0, \quad (88)$$

то (см. [4],[5]) равномерно по $j \in \mathbf{N}_0$

$$\left\{ \frac{S_{nt}^{(j)}}{\sigma_1 \sqrt{n}}, t \in [0, 1] \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W(t), t \in [0, 1]\}, \quad (89)$$

где $W(t)$ – стандартное броуновское движение.

В дальнейшем будем предполагать, что вместо условий A2 и A3 выполняются следующие условия A2* и A3*.

Условие A2*. Справедливы соотношения (84), (86), (87) и (88).

Условие A3*. Существует $\beta > 2$ такое, что $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta g(x) = 0$.

Утверждение 1. Если выполнены условия A0, A1, A2*, A3* и A4, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln(Z_{nt} + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t \wedge \tau), t \in [0, \infty)\}, \quad (90)$$

$$\left\{ \frac{\ln(Z_{nt} + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}}, \frac{tT}{n}, t \in [0, \infty) \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t \wedge \tau), t\tau, t \in [0, \infty)\}, \quad (91)$$

$$\left\{ \frac{\ln(Z_{tT} + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{W^+(t)}{\alpha}, t \in [0, 1] \right\}, \quad (92)$$

где τ – из (9), α – случайная величина, имеющая равномерное распределение на $(0, 1)$ и не зависящая от W^+ .

Прежде чем переходить к доказательству утверждения 1, установим следующую вспомогательную лемму.

Лемма 5. Пусть выполнены условия A0 и A2*. Тогда при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} \sup_{j \in \mathbf{N}_0} \mathbf{E} \left[\left(\mathbb{P} \left(Z_{n\delta}^{(j)} = 0 \right) \right)^{\exp(\varepsilon \delta \sqrt{n})} \right] = 0. \quad (93)$$

Доказательство. Известно (формула (3.4) из [10]), что для $\delta \in (0, 1)$

$$\mathbb{P} \left(Z_{n\delta}^{(j)} = 0 \right) \leq 1 - \frac{1}{a_{n\delta}^{(j)} + b_{n\delta}^{(j)}},$$

где

$$a_{n\delta}^{(j)} := \exp \left\{ -S_{n\delta}^{(j)} \right\}, \quad b_{n\delta}^{(j)} := \sum_{i=0}^{n\delta-1} \eta_i^{(j)} \exp \left\{ -S_i^{(j)} \right\}.$$

Далее надо, исходя из соотношений (89) и (85), практически дословно повторить доказательство леммы 4 из [9]. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 1. Заметим сначала, что условия A0, A1, A2* влекут справедливость (2), причем

$$\sigma_1 = \sigma V^{-1/2}. \quad (94)$$

Несложно видеть, что

$$\eta = \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{f_i''(1)}{(f_i'(1))^2} e^{-S_i}.$$

Значит, из условия A2* следует, что выполняется соотношение (3) с $q = \beta$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.

Чтобы установить сходимость (90), достаточно доказать сходимость конечномерных распределений последовательности случайных процессов

$$\mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}_{n,t} := \frac{\ln(Z_{nt} + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}}, \quad t \in [0, \infty), \quad n \in \mathbf{N}_0,$$

рассматриваемых при условии $Z_n > 0$, и проверить, что при любом фиксированном $b > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{\mathcal{Y}_n}(\delta, 0, b) > \varepsilon \mid Z_n > 0) = 0. \quad (95)$$

Зафиксируем $k \in \mathbf{N}$, неотрицательные $x_i, i = 1, \dots, k$, и $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$. Из теоремы 2 и равенства (94) следует, что при $t_k \leq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_{n,t_i} > x_i, i = 1, \dots, k \mid Z_n > 0) = \mathbf{P}(W^+(t_i \wedge \tau) > x_i, i = 1, \dots, k), \quad (96)$$

а при $b \leq 1$ выполняется соотношение (95). В общем случае проверка справедливости соотношений (96) и (95) практически совпадает с проверкой аналогичных утверждений при доказательстве теоремы 3 в [9] с той лишь разницей, что при упоминании о явном виде асимптотики вероятности невырождения процесса надо сослаться на лемму 2 (или на [18]), а также заметить, что для рассматриваемой нами марковской среды справедлив приводимый ниже аналог формулы (29) из [9], выведенной для случая среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. А именно, пусть $\delta \in (0, 1)$,

$$t_1 := 1 + (k-1)\delta, \quad t_2 := t_1 + 2\delta, \quad \varepsilon > 0, \quad x(\varepsilon, n) := \exp(\varepsilon \sigma_1 \sqrt{n}) - 1,$$

$T_{x(\varepsilon, n)} := \inf \{n \geq nt_1 : Z_n \in (x(\varepsilon, n), \infty)\}$ – первый момент достижения полуоси $(x(\varepsilon, n), \infty)$ процессом $\{Z_n, n \geq nt_1\}$, $\sum_{i,m,l}$ – знак суммирования по наборам $i \in \mathbf{N}_0$,

$m \in [nt_1, nt_2], l \in (x(\varepsilon, n), \infty)$. Тогда

$$\mathbf{P}(\exists n_1, n_2 \in [nt_1, nt_2] : Z_{n_1} > \exp(\varepsilon \sigma_1 \sqrt{n}) - 1, Z_{n_2} = 0)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E} \sum_{i,m,l} \mathbb{P} (T_{x(\varepsilon,n)} = m, Z_m = l, e_m = i) \mathbb{P} \left(Z_{nt_2-m}^{(i)} = 0 \right)^l \\
&\leq \sum_{i,m,l} \mathbf{P} (T_{x(\varepsilon,n)} = m, Z_m = l, e_m = i) \mathbf{E} \left(Z_{3\delta n}^{(i)} = 0 \right)^{\exp(\varepsilon\sigma_1\sqrt{n})} \\
&\leq \sup_{i \in \mathbf{N}_0} \mathbf{E} \left(Z_{3\delta n}^{(i)} = 0 \right)^{\exp(\varepsilon\sigma_1\sqrt{n})} \mathbf{P} (T > nt_1). \tag{97}
\end{aligned}$$

Известно (см. доказательство теорем 3, 4, 5 в [9]), что из соотношений (93) и (97) следует сходимость (90), которая, в свою очередь, влечет справедливость соотношений (91) и (92).

Утверждение 2. Если выполнены условия $A0$, $A1$, $A2^*$, $A3^*$ и $A4$, то при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{n \in \mathbf{N}_0} Z_n > x \right) \sim \frac{c}{\ln x}, \tag{98}$$

где $c > 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $x > 0$, $d := \exp x - 1$, $T_d := \inf \{n \geq 0 : Z_n \in (d, \infty)\}$, $\sum_{i,k,l}$ – знак суммирования по наборам $i \in \mathbf{N}_0$, $k \in [0, \varepsilon x^2]$, $l \in (d, \infty)$. Справедливость (98) выводится из соотношений (17), (92) и (93) с помощью практически тех же рассуждений, которые были проведены при доказательстве теоремы 1 в [9], при этом нужно учесть, что ввиду (??) (аналогично (97)) выполняется соотношение

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P} \left(\sup_{n \in \mathbf{N}_0} Z_n > d, T \leq \varepsilon x^2 \right) \\
&= \mathbf{E} \sum_{i,k,l} \mathbb{P} (T_d = k, Z_k = l, e_k = i) \mathbb{P} \left(Z_{\varepsilon x^2-k}^{(i)} = 0 \right)^l \\
&= \sum_{i,k,l} \mathbf{P} (T_d = k, Z_k = l, e_k = i) \mathbf{E} \left[\mathbb{P} \left(Z_{\varepsilon x^2-k}^{(i)} = 0 \right)^l \right] \\
&\leq \sup_{i \in \mathbf{N}_0} \mathbf{E} \left(1 - \frac{1}{a_{\varepsilon x^2}^{(i)} + b_{\varepsilon x^2}^{(i)}} \right)^{\exp x - 1} \mathbf{P} \left(\sup_{n \in \mathbf{N}_0} Z_n > d \right),
\end{aligned}$$

и применить лемму 5.

Следствие 1. Если выполнены условия $A0$, $A1$, $A2^*$, $A3^*$ и $A4$, то при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left(\sum_{n=0}^{\infty} Z_n > x \right) \sim \frac{c}{\ln x}, \tag{99}$$

где $c > 0$ то же, что и в утверждении 2.

Доказательство. Известно (см. доказательство теоремы 2 в [9]), что соотношения (17), (98) влекут (99).

Автор выражает благодарность рецензенту, замечания которого способствовали улучшению работы.

Список литературы

1. Smith W.L., Wilkinson W., "On branching processes in random environment", *Ann. Math. Statist.*, **40**:3 (1969), 814–827.
2. Athreya K. B., Karlin S., "On branching processes with random environments: I,II.", *Ann. Math. Statist.*, **42**:5, 6 (1971), 1499–1520, 1843–1858.
3. Биллингсли П., "Сходимость вероятностных мер", 1977.
4. Billingsley P., "The invariance principle for dependent random variables", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83**:1 (1956), 250–268.
5. Дуб Дж. Л., *Вероятностные процессы*, ИЛ, Москва, 1956.
6. Козлов М.В., "Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде", *Теория вероятн. и ее применен.*, **21**:4 (1976), 813–825.
7. Афанасьев В.И., "Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде", *Дискретная математика*, **5**:1 (1993), 45–58.
8. Афанасьев В.И., "Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде", *Дискретная математика*, **9**:3 (1997), 52–67.
9. Афанасьев В.И., "О максимуме критического ветвящегося процесса в случайной среде", *Дискретная математика*, **11**:2 (1999), 86–102.
10. Afanasyev V.I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V.A., "Criticality for branching processes in random environment", *Ann. Prob.*, **33**:2 (2005), 645–673.
11. Afanasyev V.I., Böinghoff K., Kersting G., Vatutin V.A., "Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment", *J. Theoret. Probab.*, **25**:3 (2012), 703–732.
12. Geiger J., Kersting G., "The survival probability of a critical branching process in random environment", *Теория вероятн. и ее применен.*, **45**:3 (2000), 607–615.
13. Боровков А.А., *Теория вероятностей*, М.: Наука, 1999.
14. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е., "Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона в случайной среде, I: предельные теоремы", *Теория вероятн. и ее применен.*, **48**:2 (2003), 274–300.
15. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е., "Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона в случайной среде, II: конечномерные распределения", *Теория вероятн. и ее применен.*, **49**:2 (2004), 231–268.
16. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е., "Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций", *Теория вероятн. и ее применен.*, **51**:1 (2006), 22–46.
17. Ватутин В.А., Вахтель В.И., "Внезапное вырождение критического ветвящегося процесса в случайной среде", *Теория вероятн. и ее применен.*, **54**:3 (2009), 417–438.
18. Дьяконова Е.Е., "Многотипные ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона в марковской случайной среде", *Теория вероятн. и ее применен.*, **55**:3 (2011), 592–601.
19. Дьяконова Е.Е., "Многотипные ветвящиеся процессы, эволюционирующие в марковской случайной среде", *Дискретная математика*, **24**:3 (2012), 130–151.
20. Dyakonova E.E., Geiger J., Vatutin V.A., "On the survival probability and a functional limit theorem for branching processes in random environment", *Markov Process. Related Fields*, **10**:2 (2004), 289–306.
21. Le Page E., Ye Y., "The survival probability of a critical branching process in a Markovian random environment", *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **348**, 2010, 301–304.
22. D' Souza J.C., Hambly B.M., "On the survival probability of a branching process in a random environment", *Adv. Appl. Prob.*, **29**:1 (1997), 38–55.