Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Катышев, В. Т. Марков, А. А. Нечаев, Использование неассоциативных группоидов для реализации процедуры открытого распределения ключей, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 3, 45–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:49:41

Использование неассоциативных группоидов для реализации процедуры открытого распределения ключей

© 2014 г. С. Ю. Катышев*, В. Т. Марков**, А. А. Нечаев[§]

Изучается возможность использования неассоциативных группоидов для реализации процедуры открытого распределения ключей на основе алгоритма, обобщающего хорошо известный алгоритм Диффи-Хеллмана. Доказано существование неассоциативных группоидов, обладающих необходимым для этого свойством перестановочности степеней, и не являющихся группоидами с ассоциативными степенями.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-6260.2012.10 и Академии криптографии РФ.

Ключевые слова: открытое распределение ключей, алгоритм Диффи-Хеллмана, неассоциативные группоиды, медиальные квазигруппы, конечномерные алгебры.

Введение

Мы изучаем возможность обобщения хорошо известного алгоритма Диффи-Хеллмана [7], использующего циклические группы для реализации протокола открытого распределения ключей, на случай, когда вместо группы используется неассоциативный группоид. Введём соответствующие определения.

Для элемента g конечного группоида $(\Omega, *)$ и заданных $r, l \in \mathbb{N}$ определим *правую r -ю и левую l -ю степени* соответственно равенствами:

$$g^{[r]} = \underbrace{(\dots((g * g) * g) \dots)}_{r \text{ сомножителей}}, \quad {}^{[l]}g = \underbrace{(\dots(g * (g * g)) \dots)}_{l \text{ сомножителей}}.$$

Назовем g элементом с перестановочными правыми степенями или ППС-элементом, если

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : g^{[m][n]} = g^{[n][m]}. \quad (1)$$

*Место работы: ООО "Центр сертификационных исследований
e-mail: sairos87@mail.ru

**Место работы: МГУ имени М.В. Ломоносова,
e-mail: vtmarkov@yandex.ru

[§]Место работы: Академия криптографии Российской Федерации,
e-mail: alexnechaev@inbox.ru

Если это тождество выполняется для всех элементов $g \in \Omega$, то будем называть $(\Omega, *)$ *ППС- группоидом*. Аналогично, с использованием тождества

$$\forall m, n \in \mathbb{N}: [m][n]g = [n][m]g,$$

определяются элементы и группоиды с перестановочными левыми степенями, ПЛС-элементы и ПЛС-группоиды, соответственно.

Алгоритм №1 открытого распределения ключей. Выбрав (несекретный) ППС-элемент g группоида Ω , абоненты A и B независимо друг от друга выбирают произвольные числа $r_A, r_B \in \mathbb{N}$, соответственно, и обмениваются элементами $g^{[r_A]}$ и $g^{[r_B]}$. Затем формируют общий секретный ключ $g^{[r_A][r_B]} = g^{[r_B][r_A]}$.

Сложность восстановления наблюдателем секретного ключа по открытой информации $g, g^{[r_A]}, g^{[r_B]}$ не превосходит сложности задачи правого дискретного логарифмирования в группоиде, т. е. сложности решения уравнения

$$g^{[x]} = h. \quad (2)$$

Естественным обобщением данного подхода к построению процедур открытого распределения ключей является комбинирование правых и левых степеней.

Будем говорить, что группоид $(\Omega, *)$ есть *группоид с перестановочными степенями* (ПС-группоид), если он является ПЛС- и ППС-группоидом, а также для любого $g \in \Omega$ и любых $l, r \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$[l](g^{[r]}) = ([l]g)^{[r]}.$$

Будем говорить, что элемент g произвольного группоида $(\Omega, *)$ есть *ПС-элемент*, если он порождает ПС-группоид.

С использованием ПС-элемента g можно предложить

Алгоритм №2 открытого распределения ключей. Абонент A выбирает пару чисел

$$(l_A, r_A), \quad l_A, r_A \in \mathbb{N},$$

а абонент B — пару

$$(l_B, r_B), \quad l_B, r_B \in \mathbb{N}.$$

Абоненты A и B открыто обмениваются элементами $[l_A]g^{[r_A]}$ и $[l_B]g^{[r_B]}$. В качестве общего ключа выбирается элемент

$$[l_A]([l_B]g^{[r_B]})^{[r_A]} = [l_B]([l_A]g^{[r_A]})^{[r_B]}.$$

При такой процедуре сложность вычисления общего секретного ключа наблюдателем оценивается сверху сложностью решения задачи лево-правое логарифмирование, т. е. сложностью решения уравнения с двумя неизвестными x, y :

$$[x]g^{[y]} = h. \quad (3)$$

Естественным обобщением последнего алгоритма является

Алгоритм №3 открытого распределения ключей. Абоненты A и B независимо друг от друга выбирают натуральные числа r, m, s, n такие, что $r \leq m, s \leq n$ и наборы чисел, соответственно,

$$a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}; \quad \text{и} \quad b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N};$$

обмениваются сообщениями

$$K_A = [a_1] \dots [a_r] g^{[a_{r+1}] \dots [a_m]}, \quad \text{и} \quad K_B = [b_1] \dots [b_s] g^{[b_{s+1}] \dots [b_n]}.$$

Абоненты A и B вырабатывают общий ключ K_{AB} :

$$[a_1] \dots [a_r] K_B^{[a_{r+1}] \dots [a_m]} = [b_1] \dots [b_s] K_A^{[b_{s+1}] \dots [b_n]}. \quad (4)$$

В разделе 2.2 будет показано, что нахождение общего секретного ключа в алгоритме 3 не сложнее решения задачи обобщенного дискретного логарифмирования, т.е. нахождения хотя бы одной пары натуральных чисел u , v и набора $(x_1, \dots, x_v)$ $x_i \in \mathbb{N}$, $i \in \overline{1, v}$, удовлетворяющих равенству

$$[x_1] \dots [x_u] g^{[x_{u+1}] \dots [x_v]} = h, \quad (5)$$

если такие существуют.

Сложность решения уравнений (2), (3), (5) определяют, прежде всего, два фактора:

- (i) выбор *алгебраического носителя алгоритма*: группоид $(\Omega, *)$ и элемента g , обеспечивающий стойкость алгоритма по отношению к методам, связанным с факторизацией группоидов и перебором;
- (ii) выбор *способа представления алгебраического носителя*, при котором функция возведения в правую (левую) степень однонаправленная.

В качестве верхней оценки стойкости алгоритма Диффи-Хеллмана, с учетом этих двух факторов, принято выбирать сложность логарифмирования на произвольной циклической группе порядка n . Будем обозначать сложность такого логарифмирования через $Lg(n)$. Известна следующая общая оценка этой функции: $Lg(n) = O(\sqrt{n})$ (сложность логарифмирования методом согласования [7, 2]). В настоящее время эта оценка понижена для ряда значений числа n и способов представления абелевой группы до субэкспоненциальной (от размера задачи $\log_2 n$) оценки. Однако она остается лучшей в классе детерминированных алгоритмов для случая, когда n — простое и $n - 1 = 2p$, p — простое.

Следует отметить, что последняя оценка является классическим примером экспертной оценки, т. е. не доказано то, что она является нижней, но многочисленные усилия ученых не привели к её уменьшению способом, не зависящим от способа представления алгебраического носителя (см. (ii)).

В данной статье, прежде всего, доказываются существование нужных для алгоритмов 1-3 алгебраических носителей: ПС-группоидов с неассоциативными степенями $(g^{[m][n]} \neq g^{[mn]})$. Дается описание некоторых классов таких группоидов, интересных для дальнейшего изучения с точки зрения возможности реализации достаточно стойкого алгоритма открытого распределения ключей.

1. Построение классов ПС-группоидов

1.1. Числовые характеристики элемента конечного группоидов Пусть $(\Omega, *)$ — произвольный конечный группоид. Для произвольного элемента $g \in \Omega$ обозначим через $g^{\mathbb{N}} = \{g^{[n]}\}_{n \in \mathbb{N}}$ последовательность его степеней.

Предложение 1. *Последовательность $g^{\mathbb{N}}$ периодическая.*

Доказательство. Для любых $a_1, \dots, a_n \in \Omega$ введём обозначение

$$\rho_n(a_1, \dots, a_n) = (\dots((a_1 * a_2) * a_3) \dots) * a_n. \quad (6)$$

Заметим, что при этом $a_1 * a_2 = \rho_2(a_1, a_2)$ и, в частности, если $a \in \Omega$, $1 < k < n$, то

$$a^{[n]} = \rho_n(a, \dots, a) = \rho_{n-k+1}(\rho_k(a, \dots, a), a, \dots, a) = \rho_{n-k+1}(a^{[k]}, a, \dots, a). \quad (7)$$

Тогда для любых $n, k, x \in \mathbb{N}$ справедлива импликация:

$$g^{[n]} = g^{[k]} \Rightarrow g^{[n+x]} = g^{[k+x]},$$

так как $g^{[n+x]} = \rho_{x+1}(g^{[n]}, g, \dots, g) = \rho_{x+1}(g^{[k]}, g, \dots, g) = g^{[k+x]}$

Остается заметить, что в силу конечности группоида $(\Omega, *)$ в последовательности $g^{\mathbb{N}}$ встретятся повторяющиеся элементы.

Определим *правый дефект* $D_r(g)$ и *правый период* $T_r(g)$ элемента g соответственно как дефект и период последовательности $g^{\mathbb{N}}$:

$$D_r(g) = \min \{l \in \mathbb{N}_0 : \exists t \in \mathbb{N} \forall i \in \mathbb{N} \quad g^{[l+i+t]} = g^{[l+i]}\},$$

$$T_r(g) = \min \{t \in \mathbb{N} : \forall i \in \mathbb{N} \quad g^{[D_r(g)+i+t]} = g^{[D_r(g)+i]}\}.$$

Аналогично определим левые дефект — $D_l(g)$ и период — $T_l(g)$.

Хорошо известные свойства периодических последовательностей (см., например, [5]) обосновывают следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть g — элемент произвольного конечного группоида $(\Omega, *)$. Тогда:

1) Если $t, t' \in \mathbb{N}$, и $t' > t$, то

$$g^{[t]} = g^{[t']} \Leftrightarrow t \geq D_r(g), T_r(g) | t' - t.$$

2) Справедливо неравенство $D_r(g) + T_r(g) \leq |\Omega|$ ($D_l(g) + T_l(g) \leq |\Omega|$).

Определим *правый потенциал* (*левый потенциал*) произвольного элемента $g \in \Omega$ как $t \in \mathbb{N}$ такое наибольшее, что все элементы $g, g^{[2]}, \dots, g^{[t]}$ ($g, {}^{[2]}g, \dots, {}^{[t]}g$) различны. Обозначим эту величину $\text{pot}_r g$ ($\text{pot}_l g$), или $\text{pot}_{r*} g$ ($\text{pot}_{l*} g$), когда необходимо подчеркнуть зависимость от операции $*$.

Справедливы равенства

$$D_r(g) + T_r(g) = \text{pot}_r(g), \quad D_l(g) + T_l(g) = \text{pot}_l(g). \quad (8)$$

Будем называть элемент $g \in \Omega$ *реверсивным (справа)*, если $D_r(g) = 0$, т. е. $g^{[t+1]} = g$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$, или, другими словами, $T_r(g) = \text{pot}_r(g)$.

Из предложения 2 видно, что функция "потенциал" для реверсивных элементов группоида обладает свойством, аналогичным основному свойству функции "порядок" для элементов группы.

Предложение 3. Пусть g — реверсивный элемент группоида $(\Omega, *)$. Тогда

$$\forall t, t' \in \mathbb{N} : g^{[t]} = g^{[t']} \Leftrightarrow \text{pot}_r g | t' - t.$$

Следствие 1. Если $(\Omega, *)$ — квазигруппа с единицей e (луна), то

$$\forall g \in \Omega, \quad t \in \mathbb{N}_0 \quad g^t = e \Leftrightarrow \text{pot}_r g | t.$$

В определении перестановочности степеней элемента g группоида $(\Omega, *)$ формально используется бесконечное число тождеств. Покажем, что для проверки того, что g — ПС-элемент, достаточно проверить конечное число тождеств.

Определим *правый дефект* $D_r = D_r(\Omega)$ группоида $(\Omega, *)$ и его *правый период* T_r соотношениями

$$D_r = \max\{D_r(g), g \in \Omega\}, \quad T_r = \text{НОК}\{T_r(g), g \in \Omega\}.$$

Для каждого элемента g группоида выполнены соотношения

$$\forall i > D_r : g^{[i]} = g^{[i+T_r]}.$$

Предложение 4. Элемент g группоида $(\Omega, *)$ является ППС-элементом тогда и только тогда, когда

$$\forall n, k \in \overline{1, D_r + T_r} : (g^{[n]})^{[k]} = (g^{[k]})^{[n]}. \quad (9)$$

Доказательство. Необходимость (9) для (1) очевидна. Покажем достаточность. Для $n \in \mathbb{N}$ определим значение $\rho(n)$ условиями

$$\rho(n) = \begin{cases} n, & \text{если } n \leq D_r + T_r; \\ n - kT_r, & \text{где } k \in \mathbb{N}_0 \text{ и } (n - kT_r) \in \overline{D_r, D_r + T_r}, \text{ если } n > D_r + T_r. \end{cases}$$

Очевидно, для любых $g \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $g^{[n]} = g^{[\rho(n)]}$. Следовательно для любых $n, k \in \mathbb{N}$ верна цепочка равенств

$$(g^{[n]})^{[k]} = (g^{[\rho(n)]})^{[k]} = (g^{[\rho(n)]})^{[\rho(k)]} = (g^{[\rho(k)]})^{[\rho(n)]} = (g^{[k]})^{[\rho(n)]} = (g^{[k]})^{[n]}.$$

Аналогично формулируются критерии перестановочности левых и лево-правых степеней.

В следующих параграфах покажем, что существуют широкие классы ПС-группоидов (возможных алгебраических носителей процедуры открытого формирования ключа) произвольно большой мощности.

1.2. Локально-медиальные группоиды В данном параграфе обобщены частные неопубликованные результаты А. Н. Дмитриевской, Е. Н. Дмитриевской, Ф. К. Зоркого.

Пусть $(\Omega, \cdot)$ — произвольная конечная полугруппа с единицей e . Всюду далее будем считать, что $g^0 = e$ для любого $g \in \Omega$. Пусть $(\Omega^\Omega, \circ)$ — полугруппа всех отображений $\Omega \rightarrow \Omega$ и $\widetilde{\text{Aut}}(\Omega) = \widetilde{\text{Aut}}(\Omega, \cdot)$ — подгруппа полугруппы $(\Omega^\Omega, \circ)$, состоящая из всех автоморфизмов и антиавтоморфизмов полугруппы $(\Omega, \cdot)$.

Зафиксируем два коммутирующих (анти-)автоморфизма

$$\sigma, \tau \in \widetilde{\text{Aut}}(\Omega), \quad \sigma\tau = \tau\sigma, \quad (10)$$

и зададим на Ω новую операцию $*$ условием:

$$\forall x, y \in \Omega \quad x * y = \sigma(x) \cdot \tau(y). \quad (11)$$

Мы получим группоид $(\Omega, *)$, который является квазигруппой тогда и только тогда, когда $(\Omega, \cdot)$ — группа. Такие квазигруппы относят к классу *медиальных квазигрупп* [3].

Тогда по аналогии будем называть группоид $(\Omega, *)$ *медиальным*, если $(\Omega, \cdot)$ — абелева полугруппа.

Теорема 1. Если $(\Omega, \cdot)$ — абелева полугруппа и σ, τ — ее коммутирующие (анти-)автоморфизмы, то группоид $(\Omega, *)$ с операцией (11) есть ПС-группоид.

Доказательство. Нетрудно увидеть, что для $g \in (\Omega, *)$, $m \in \mathbb{N}$ выполнены равенства

$$g^{[m]} = \sigma^{m-1}(g) \cdot \sigma^{m-2}\tau(g) \cdot \dots \cdot \sigma\tau(g) \cdot \tau(g) = \sigma^{m-1}(g) \prod_{i=0}^{m-2} \sigma^i \tau(g), \quad (12)$$

$${}^{[m]}g = \sigma(g) \cdot \sigma\tau(g) \cdot \dots \cdot \sigma\tau^{m-2}(g) \cdot \tau^{m-1}(g) = \tau^{m-1}(g) \prod_{i=0}^{m-2} \tau^i \sigma(g). \quad (13)$$

Пользуясь (12), получаем, что для любых $k, m \in \mathbb{N}$

$$(g^{[k]})^{[m]} = \sigma^{m-1}(g^{[k]}) \prod_{i=0}^{m-2} \sigma^i (\tau(g^{[k]})). \quad (14)$$

Подставляя сюда вместо $g^{[k]}$ правую часть (12) при $m = k$, пользуясь коммутативностью полугруппы $(\Omega, \cdot)$ и перестановочностью автоморфизмов (10), получаем:

$$(g^{[k]})^{[m]} = \sigma^{m+k-2}(g) \prod_{j=0}^{k-2} \sigma^{m-1+j}(\tau(g)) \prod_{i=0}^{m-2} \sigma^{k-1+i}(\tau(g)) \prod_{i=0}^{m-2} \prod_{j=0}^{k-2} \sigma^{i+j}(\tau^2(g)). \quad (15)$$

Нетрудно заметить, что правая часть полученного выражения симметрична относительно k и m . Действительно, если заменить m на k и k на m , то первый множитель и произведение во второй строке в (15) не изменятся, а средние два произведения поменяются местами. Это не изменит значение в правой части, так как полугруппа $(\Omega, \cdot)$ абелева.

Аналогично, используя (12), (13), доказывается перестановочность левых степеней элемента g .

Теперь покажем, что для любых $l, r \in \mathbb{N}$, $g \in \Omega$ выполняется равенство

$${}^{[l]}(g^{[r]}) = ({}^{[l]}g)^{[r]}. \quad (16)$$

Из (13) получаем:

$${}^{[l]}(g^{[r]}) = \tau^{l-1}(g^{[r]}) \prod_{i=0}^{l-2} \tau^i \sigma(g^{[r]}).$$

Отсюда, пользуясь (12) и коммутативностью полугруппы $(\Omega, \cdot)$, имеем:

$$\begin{aligned} {}^{[l]}(g^{[r]}) &= \tau^{l-1} \left(\sigma^{r-1}(g) \prod_{j=0}^{r-2} \sigma^j \tau(g) \right) \prod_{i=0}^{l-2} \tau^i \sigma \left(\sigma^{r-1}(g) \prod_{j=0}^{r-2} \sigma^j \tau(g) \right) = \\ &= \left(\tau^{l-1} \sigma^{r-1}(g) \right) \left(\prod_{j=0}^{r-2} \sigma^j \tau^l(g) \right) \left(\prod_{i=0}^{l-2} \tau^i \sigma^r(g) \right) \left(\prod_{i=0}^{l-2} \prod_{j=0}^{r-2} \sigma^{j+1} \tau^{i+1}(g) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Из (12), (13) легко следует, что соответствующее равенство для $({}^{[l]}g)^{[r]}$ получается из правой части (17) перестановкой σ и τ , l и r .

Ввиду перестановочности автоморфизмов σ и τ после этих преобразований выражение в правой части равенства (17) не изменяется. Таким образом, $(\Omega, *)$ — ПС-группоид.

Локально-медиальные группоиды. Покажем, что условия коммутативности полугруппы в теореме 1 можно несколько ослабить. Пусть $(\Omega, \cdot)$ — произвольная полугруппа, выполнено условие (10) и $H = \langle \sigma, \tau \rangle$ — подгруппа группы $\widetilde{\text{Aut}}(\Omega)$, порожденная автоморфизмами σ, τ . Тогда для группоида $(\Omega, *)$ с операцией (11) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если для некоторого элемента $g \in \Omega$ элементы орбиты $H(g)$ попарно перестановочны в $(\Omega, \cdot)$, то g есть ПС-элемент. Если последнее условие перестановочности выполняется для всех $g \in \Omega$, то $(\Omega, *)$ есть ПС-группоид.*

Доказательство. Заметим, что подгруппоид, порожденный элементом g в группоиде $(\Omega, *)$, содержится в коммутативной подполугруппе S полугруппы $(\Omega, \cdot)$, порожденной множеством $H(g)$. Эта подполугруппа является также подгруппоидом в группоиде $(\Omega, *)$, и к ней можно применить теорему 5, рассматривая вместо σ и τ их ограничения на подполугруппу S .

Будем называть группоиды из последней теоремы *локально-медиальными на элементе g* и *локально-медиальными*, соответственно.

Пример 1. Пусть $(\Omega, \cdot)$ — произвольная конечная группа, $\sigma = \text{id}_\Omega$ — тождественный автоморфизм и τ — (анти)автоморфизм, вида $\tau(g) = g^{-1}$. Тогда группоид $(\Omega, *)$ с операцией (11) является локально-медиальным.

Дополнительно докажем следующее свойство потенциалов элементов локально-медиального группоида, построенного на группе.

Предложение 5. *Пусть $(\Omega, \cdot)$ группа. Если $(\Omega, *)$ — локально-медиальный группоид с операцией (11), то для любого $g \in \Omega$, справедливо соотношение*

$$\text{pot}_r g \mid \text{ord } \sigma \cdot \text{ord } g.$$

Доказательство. Пусть $\text{ord } \sigma = s, \text{ord } g = t$. Тогда $\sigma^s = \varepsilon$ — тождественный автоморфизм и $g^t = e$ — единица группы $(\Omega, \cdot)$. Используя (12), получаем:

$$g^{[st+1]} = \sigma^{st}(g) \cdot \sigma^{st-1}(\tau(g)) \cdot \sigma^{st-2}(\tau(g)) \cdot \dots \cdot \sigma(\tau(g)) \cdot \tau(g).$$

Отсюда, обозначая $h = \sigma^{s-1}(\tau(g)) \cdot \dots \cdot \sigma(\tau(g)) \cdot \tau(g)$ и пользуясь равенством $\sigma^s(h) = h$, приходим к равенствам $g^{[st+1]} = \sigma^{st}(g) \cdot h^t = \varepsilon^t(g) \cdot h^t = g \cdot h^t$. Так как рассматриваемый группоид локально-медиальный, то любые два элемента вида $\sigma^i(\tau(g)), \sigma^j(\tau(g))$ перестановочны и

$$\begin{aligned} h^t &= \sigma^{s-1}(\tau(g))^t \cdot \dots \cdot \sigma(\tau(g))^t \cdot \tau(g)^t = \sigma^{s-1}(\tau(g^t)) \cdot \dots \cdot \sigma(\tau(g^t)) \cdot \tau(g^t) = \\ &= \sigma^{s-1}(\tau(e)) \cdot \dots \cdot \sigma(\tau(e)) \cdot \tau(e) = e. \end{aligned}$$

Таким образом, $g^{[st+1]} = g$. Остается использовать предложение 3.

1.3. Оценка сложности вычисления степени элемента в локально-медиальном группоиде Из равенства (12) следует, что в группоиде с операцией (11) при вычислении правых степеней правый автоморфизм τ ведет себя "весьма пассивно". В связи с этим возникает вопрос: не будет ли этот группоид изоморфен некоторому группоиду $(\Omega, \star)$ с операцией

$$\forall x, y \in \Omega : \quad x \star y = \varphi(x)y, \quad \varphi \in \text{Aut}(\Omega)? \quad (18)$$

Предложение 6. Если $(\Omega, \cdot)$ — полугруппа с единицей e и операции (11), (18) таковы, что $(\Omega, *) \cong (\Omega, \star)$, то τ — тождественный автоморфизм.

Доказательство. Нетрудно проверить, что элемент e — единственная левая единица в группоиде $(\Omega, \star)$, а группоид $(\Omega, *)$ имеет левую единицу тогда и только тогда, когда $\tau = \varepsilon$.

Если $(\Omega, \star)$ — локально-медиальный группоид, то даже при $\tau \neq \varepsilon$ задачи о вычислении степеней и логарифмировании в этом группоиде можно свести к решению аналогичных задач в группоиде с операцией вида (18). Пусть $(\Omega, \star)$ — группоид с операцией

$$\forall x, y \in \Omega : \quad x \star y = \sigma(x) \cdot y. \quad (19)$$

Заметим, что если $(\Omega, *)$ — локально-медиальный группоид, то таков же и группоид $(\Omega, \star)$.

Для произвольного $\alpha \in \Omega$ обозначим через $\alpha^{[*n]}$ и $\alpha^{[*n]}$ правые n -е степени элемента α соответственно в $(\Omega, *)$ и в $(\Omega, \star)$. Заметим, что

$$\alpha^{[*n]} = \sigma^{n-1}(\alpha) \cdot \dots \cdot \sigma(\alpha) \cdot \alpha. \quad (20)$$

Предложение 7. Пусть $(\Omega, \cdot)$ — полугруппа с единицей e . Если g — обратимый элемент полугруппы $(\Omega, \cdot)$ и группоид $(\Omega, *)$ — локально-медиальный на элементе g с операцией (11), то для операции (19) при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$g^{[*n]} = g \cdot \alpha^{[*n-1]}, \quad (21)$$

где $\alpha = \sigma(g)\tau(g)g^{-1}$. В частности, $\text{pot}_{\tau*}g = \text{pot}_{\tau\star}g$.

Доказательство. При $n = 2$, пользуясь перестановочностью в $(\Omega, \cdot)$ элемента g с элементами $\sigma(g), \tau(g)$, имеем:

$$g^{[2]} = \sigma(g)\tau(g) = \sigma(g)\tau(g)gg^{-1} = g \cdot \sigma(g)\tau(g)g^{-1} = g \cdot \alpha.$$

Пусть утверждение верно для $n = k \geq 2$. Покажем что оно верно для $n = k + 1$. По определению $g^{[*k+1]} = g^{[*k]} * g = \sigma(g^{[*k]})\tau(g)$. Отсюда, пользуясь предположением индукции, получаем: $g^{[*k+1]} = \sigma(g^{[*k]})\tau(g) = \sigma(g\alpha^{[*k-1]})\tau(g)$.

Лемма 1. В условиях предложения 7 справедливы равенства

$$g\alpha^{[*k-1]} = \alpha^{[*k-1]}g, \quad g\sigma(\alpha^{[*k-1]}) = \sigma(\alpha^{[*k-1]})g.$$

Доказательство. Ввиду (20) достаточно доказать, что для любого $i \in \mathbb{N}_0$ элемент g коммутирует с элементом $\sigma^i(\alpha) = \sigma^{i+1}(g)\sigma^i(\tau(g))\sigma^i(g^{-1})$. Перестановочность g с первыми двумя сомножителями в этом произведении следует из локальной медиальности группоида $(\Omega, *)$ на элементе g . Остается заметить, что так как $(\Omega, \cdot)$ — конечная полугруппа, то $g^{-1} = g^t$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$, поэтому $g\sigma^i(g^{-1}) = g\sigma^i(g^t) = g(\sigma^i(g))^t = (\sigma^i(g))^t g = \sigma^i(g^{-1})g$.

С использованием леммы 1 доказательство предложения 7 завершается следующим образом:

$$\begin{aligned} g^{[*k+1]} &= \sigma(g\alpha^{[*k-1]})\tau(g) = \sigma(\alpha^{[*k-1]})\sigma(g)\tau(g) = \sigma(\alpha^{[*k-1]})\sigma(g)\tau(g)gg^{-1} = \\ &= g\sigma(\alpha^{[*k-1]})\sigma(g)\tau(g)g^{-1} = g\sigma(\alpha^{[*k-1]})\alpha = g((\alpha^{[*k-1]}) \star \alpha) = g\alpha^{[*k]}. \end{aligned}$$

Теперь докажем ряд вспомогательных утверждений.

Предложение 8. Если $(\Omega, *)$ — локально-медиальный группоид с операцией (11) и $\sigma, \tau \in \text{Aut}(\Omega, \cdot)$, то для любых $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Omega$, $n > 2$ в обозначениях (6) справедливо равенство

$$\rho_n(a_1, \dots, a_n) = \sigma^{n-2}(a_1) * \rho_{n-1}(a_2, \tau^{-1}(a_3), \dots, \tau^{-1}(a_n)). \quad (22)$$

Доказательство. Индукция по $n \geq 3$. Для $n = 3$ имеем:

$$\begin{aligned} \rho_3(a_1, a_2, a_3) &= (a_1 * a_2) * a_3 = \sigma(\sigma(a_1) \cdot \tau(a_2)) \cdot \tau(a_3) = \\ &= \sigma(\sigma(a_1)) \cdot \tau(\sigma(a_2) \cdot \tau(\tau^{-1}(a_3))) = \sigma(a_1) * (a_2 * \tau^{-1}(a_3)). \end{aligned}$$

Предположим, что утверждение верно для $n = k \geq 3$, то есть справедливо равенство

$$\rho_k(a_1, \dots, a_k) = \sigma^{k-2}(a_1) * \rho_{k-1}(a_2, \tau^{-1}(a_3), \dots, \tau^{-1}(a_k)).$$

Для доказательства шага индукции умножим обе части этого равенства на a_{k+1} справа и еще раз воспользуемся предположением индукции:

$$\begin{aligned} \rho_{k+1}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) &= \rho_k(a_1, \dots, a_k) * a_{k+1} = \\ &= (\sigma^{k-2}(a_1) * \rho_{k-1}(a_2, \tau^{-1}(a_3), \dots, \tau^{-1}(a_k))) * a_{k+1} = \\ &= \rho_3(\sigma^{k-2}(a_1), \rho_{k-1}(a_2, \tau^{-1}(a_3), \dots, \tau^{-1}(a_k)), a_{k+1}) = \\ &= \sigma(\sigma^{k-2}(a_1)) * \rho_2(\rho(a_2, \tau^{-1}(a_3), \dots, \tau^{-1}(a_k)), \tau^{-1}(a_{k+1})) = \\ &= \sigma^{(k+1)-2}(a_1) * \rho_k(a_2, \tau^{-1}(a_3), \dots, \tau^{-1}(a_{k+1})). \end{aligned}$$

Предложение 9. Пусть $(\Omega, *)$ — локально-медиальный группоид, определенный соотношениями (10), (11), и $a_1, a_2, \dots, a_n$ — произвольные элементы Ω . Тогда, если элементы множества $\mathcal{H} = H(a_1) \cup H(a_2) \cup \dots \cup H(a_n)$ попарно перестановочны, то для элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ справедливо равенство (22).

Доказательство. Если σ, τ — автоморфизмы, то требуемое равенство непосредственно следует из предложения 8. Если, например, σ антиавтоморфизм, то его действие на элементах множества $\mathcal{H}$ в локально-медиальном группоиде $(\Omega, *)$ выглядит следующим образом:

$$\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H} \quad \sigma(h_1 \cdot h_2) = \sigma(h_2) \cdot \sigma(h_1) = \sigma(h_1) \cdot \sigma(h_2).$$

А значит, на элементах множества $\mathcal{H}$ антиавтоморфизм σ ведет себя как автоморфизм. Поэтому для элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ доказательство равенства (22) дословно повторяет доказательство предложения 8.

Следствие 2. Если $(\Omega, \star)$ — локально-медиальный группоид с операцией (19), то для любых $g \in \Omega$, $n, k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $g^{[*n+k]} = \sigma^k(g^{[*n]}) \cdot g^{[*k]}$.

Доказательство. Операция $\star$ представляется в виде (11) при $\tau = \varepsilon$. Тогда $\tau^{-1} = \varepsilon$ и, применяя формулы (7) и (22), получаем:

$$g^{[\star n + k]} = \rho_{n+k}(g, \dots, g) = \rho_{k+1}(g^{[\star n]}, g, \dots, g) = \\ \sigma^{k-1}(g^{[\star n]}) \star \rho_k(g, \dots, g) = \sigma^k(g^{[\star n]}) \cdot g^{[k]}.$$

Далее используются следующие обозначения. Пусть $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее x . Для произвольных $h \in \Omega$ и $n, k \in \mathbb{N}$, где $n \leq 2^k$, введём обозначение

$$h^{\{n/i\}} = \sigma^{\lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor}(h) \cdot h. \quad (23)$$

Заметим, что выражение в правой части (23) определено корректно, так как $\lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor \in \mathbb{N}$.

Сложность возведения в степень (анти-)автоморфизма, заданного на полугруппе, зависит от способа его задания. Обозначим через $AUT(\sigma, t)$ трудоёмкость вычисления значения $\sigma^t(h)$ для произвольного элемента h полугруппы $(\Omega, \cdot)$.

Пусть элемент $g \in \Omega$ обратим в $(\Omega, \cdot)$. Для вычисления его степени в произвольном локально-медиальном группоиде предлагается следующий алгоритм.

Алгоритм 3.

Дано. Полугруппа $(\Omega, \cdot)$ с единицей e , (анти-)автоморфизмы $\sigma, \tau \in \widetilde{\text{Aut}}(\Omega, \cdot)$, элемент $g \in \Omega$, обратимый в $(\Omega, \cdot)$, $m \in \mathbb{N}$.

Выход. Элемент $g^{[\star m]}$.

Шаг 0. Если $m = 1$, то вывести ответ g , иначе — шаг 1.

Шаг 1. Вычислить элемент α по формуле

$$\alpha = \sigma(g)\tau(g)g^{-1}.$$

Шаг 2. Присвоить $h = \alpha^{n_k}$, $i = k$, где k и n_k — элементы двоичного разложения числа $n = m - 1$:

$$n = \sum_{i=0}^k n_i 2^i, \quad k = k(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor. \quad (24)$$

Шаг 3. Пока $i > 0$: повторять:

- 1) Возвести автоморфизм σ в степень $t = \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$: $\delta = \sigma^t$;
- 2) Вычислить новое значение элемента h : $h = \sigma(\delta(h) \cdot h) \cdot \alpha^{n_{i-1}}$;
- 3) Присвоить: $i = i - 1$.

Шаг 4. Вывести ответ $g^{[m]} = gh$.

Для доказательства корректности работы алгоритма докажем лемму.

Лемма 2. Если $(\Omega, \star)$ — локально медиальный группоид с операцией (19), то для любых $\alpha \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}$ с разложением (24) справедливо равенство

$$\alpha^{[\star n]} = (\dots((\alpha^{n_k})^{\{n/k\}} \star \alpha^{n_{k-1}})^{\{n/k-1\}} \star \dots \star \alpha^{n_1})^{\{n/1\}} \star \alpha^{n_0}. \quad (25)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по параметру $k = k(n) \geq 0$ в разложении (24). Если $k = 0$, то $n = n_0 = 1$ и равенство (25) очевидно.

Пусть $m > 0$ и утверждение верно для всех таких n , что $k(n) < m$ в разложении (24), покажем что тогда утверждение верно для любого числа n , в двоичном разложении которого $k(n) = m$.

Рассмотрим число $n' = \sum_{i=0}^{k-1} n_{i+1} 2^i$, Тогда

$$n = 2n' + n_0 \quad (26)$$

и очевидно справедливо $k(n') = m-1 < m$. Заметим, что при этом для любых $h \in \Omega$ и $i \in \overline{0, m-1}$ выполнено соотношение

$$h^{\{n/(i+1)\}} = h^{\{n'/i\}}. \quad (27)$$

Используя следствие 2, находим

$$\alpha^{[*n]} = \alpha^{[*2n']} \star \alpha^{n_0} = (\sigma^{n'}(\alpha^{[*n']}) \cdot \alpha^{[*n']}) \star \alpha^{n_0}.$$

Выражая n' через n из равенства (26), получаем:

$$\alpha^{[*n]} = (\sigma^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\alpha^{[*n']}) \cdot \alpha^{[*n']}) \star \alpha^{n_0} = (\alpha^{[*n']})^{\{n/1\}} \star \alpha^{n_0}.$$

Воспользовавшись предположением индукции, справедливым для числа n' , получаем:

$$\alpha^{[*n]} = ((\dots((\alpha^{n_k})^{\{n'/k-1\}} \star \alpha^{n_{k-1}})^{\{n'/(k-2)\}} \star \dots \star \alpha^{n_2})^{\{n'/1\}} \star \alpha^{n_1})^{\{n/1\}} \star \alpha^{n_0}.$$

Отсюда и из соотношения (27) следует искомое равенство (25).

Теорема 4. Пусть $(\Omega, \cdot)$ — полугруппа с единицей, g — обратимый элемент. Для локально-медиального группоида $(\Omega, *)$ с операцией (11), где σ, τ удовлетворяют (10), Алгоритм 3 вычисляет степень $g^{[m]}$ со сложностью $O(AUT(\sigma, n) \log_2 n)$ операций в полугруппе $(\Omega, \cdot)$.

Доказательство. Вначале заметим, что на шаге 3.2 происходит изменение элемента h по правилу

$$h = h^{\{n/i\}} \star \alpha^{n_{i-1}}.$$

Поэтому в результате выполнения шага 3 происходит вычисление правой части выражения (25). По лемме 2 после шага 3 для элемента h выполнено равенство

$$h = \alpha^{[*n]}.$$

Применяя предложение 7, получаем

$$g^{[m]} = gh.$$

Таким образом, корректность алгоритма доказана.

Оценим трудоёмкость алгоритма. Шаги 1, 2 и 4 имеют трудоёмкость $Q_1 = Q_2 = Q_4 = O(1)$ операций в полугруппе Ω .

Трудоёмкость шага 3 оценивается величиной

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} AUT(\sigma, (\lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor)) = O(AUT(\sigma, n) \log_2 n).$$

Итоговая трудоёмкость алгоритма — это сумма трудоёмкостей шагов 1-4:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = O(AUT(\sigma, n) \log_2 n).$$

Тогда трудоёмкость составляет $O(AUT(\sigma, n) \log_2 n)$ операций в полугруппе $(\Omega, \cdot)$.

Замечание 1. Традиционно автоморфизмы задаются действием на образующих элементах. В этом случае трудоёмкость возведения в степень, а значит, и алгоритмов 1-3 оценивается величиной $O(\log^2 |\Omega|)$. Если автоморфизмы σ, τ имеют небольшой по сравнению с мощностью группы порядок, то эта величина становится равной оценке сложности реализации протокола Диффи-Хеллмана.

Сложность возведения в левую степень оценивается аналогично.

2. Первые оценки стойкости предложенных алгоритмов

2.1. Решение задачи дискретного логарифмирования на локально-медиальном группоиде В данном разделе методы дискретного логарифмирования, использующие идеи согласования и сведения к собственным подгруппам, обобщаются на локально-медиальные группоиды. Таким образом, из методов логарифмирования на произвольной абелевой группе остается не обобщенным только ρ -метод Полларда.

Модификация алгоритма Гельфонда-Шенкса. Результат предложения 9 позволяет использовать для логарифмирования в локально-медиальном группоиде с операцией (11) идеи алгоритма Гельфонда-Шенкса [6].

Алгоритм 5.

Дано. $(\Omega, \cdot)$ — полугруппа с единицей, g, h — обратимые элементы полугруппы $(\Omega, \cdot)$, (анти-) автоморфизмы $\sigma, \tau \in \widetilde{\text{Aut}}(\Omega, \cdot)$.

Выход. Решение x уравнения (2)

$$g^{[x]} = h.$$

Шаг 1. Положим $d := \lfloor \sqrt{\text{pot}_r g} \rfloor + 1$.

Шаг 2. Выделим память. Поставим в соответствие элементам группоиды ячейки памяти, размером, необходимым для хранения индекса $i \in \overline{1, d}$. Заполним память нулями.

1. Положим $g_0 = g^{[0]} = e$
2. Вычислим элемент $c = \rho_d(g, \tau^{-1}(g), \dots, \tau^{-1}(g))$.
3. Для $i \in \overline{1, d}$ вычислим элементы $g_i = g^{[id]}$, воспользовавшись формулой (22):

$$g_i = \sigma^{d-1}(g_{i-1}) * c,$$

и по адресу g_i запишем в память число i .

Шаг 3. Для $j \in \overline{1, d}$ будем вычислять элементы $\beta_j = \rho_{j+1}(h, g, \dots, g)$ и проверять память по адресу β_j .

Если по адресу β_j записано $i > 0$, то выведем ответ $n = id - j$.

Шаг 4. Если ни для одного из j мы не нашли в памяти ненулевого числа, то выводим ответ "Нет решений."

Теорема 6. Алгоритм 5 работает корректно, при этом для реализации алгоритма требуется $O(\sqrt{\text{pot}_r g})$ операций в полугруппе $(\Omega, \cdot)$ и память объемом $O(\sqrt{\text{pot}_r g} \cdot \log_2(\sqrt{\text{pot}_r g}))$.

Доказательство. Доказательство корректности алгоритма состоит из двух частей. Во-первых, покажем, что если уравнение дискретного логарифмирования (2) имеет решение, то для некоторого $j \in \overline{1, d}$ в памяти по адресу β_j будет ненулевое значение. Для любого натурального n элемент $g^{[n]}$ можно представить в виде $g^{[id-j]}$, где j меньше d . Для этого достаточно поделить n на d с остатком. А значит,

$$g^{[id-j]} = h;$$

домножив обе части на g по j раз, получаем:

$$g_i = g^{[id]} = ((h * g) * \dots) * g = \beta_j.$$

Тогда если решение (2) существует, то на шаге 3 для некоторого $j \in \overline{1, d}$ в памяти по адресу β_j будет ненулевое значение.

Во-вторых, обоснуем корректность выводимого ответа, то есть что из равенства

$$g_i = \beta_j \tag{28}$$

следует, что $(id - j)$ — решение. Заметим, что так как g — обратимый элемент в $(\Omega, \cdot)$, то уравнение $x * g = f$ для произвольного $f \in \Omega$ имеет единственное решение. А тогда из равенства (28) получаем:

$$g^{[id-j]} = h.$$

На каждом из шагов 2 и 3 выполняется по $O(\sqrt{\text{pot}_r g})$ операций в полугруппе $(\Omega, \cdot)$. Также на шаге 2 используется память, в которую записывается $\sqrt{\text{pot}_r g}$ значений длины $\log_2(\sqrt{\text{pot}_r g})$. Значит, для реализации алгоритма потребуется $O(\sqrt{\text{pot}_r g})$ операций в полугруппе Ω и память объемом $O(\sqrt{\text{pot}_r g} \cdot \log_2(\sqrt{\text{pot}_r g}))$.

Обобщение метода сведения к собственным подгруппам. Пусть $(\Omega, \cdot) = (G, \cdot)$ — абелева группа, $(G, *)$ — медиальная квазигруппа с операцией (11). Для решения задачи логарифмирования правых степеней по предложению 7 можем полагать, что автоморфизм τ — тождественный.

Непосредственной проверкой доказывается следующее предложение, необходимое для описания метода.

Предложение 10. Для произвольного элемента $g \in G$ и для произвольных натуральных n и k выполнено равенство:

$$(g^{[n]})^k = (g^k)^{[n]}$$

Перейдем к описанию метода. Пусть g, h — произвольные элементы квазигруппы $(G, *)$. Решается уравнение вида $g^{[x]} = h$.

1. Рассмотрим первый случай: порядок группы G представим в виде $|G| = pq$, где p и q взаимно простые числа; тогда как следствие нашего уравнения получаем систему

$$\begin{cases} (g^{[x]})^p = h^p, \\ (g^{[x]})^q = h^q. \end{cases}$$

Очевидно, что $(g^{[x]})^p \in pG$, где $pG = \{w^p | w \in G\}$ — подгруппа мощности $|pG| = q$. Автоморфизм σ оставляет эту подгруппу на месте. По предложению 10 степень в медиальной квазигруппе перестановочна с групповой степенью. Таким образом,

если x — решение исходного уравнения, то x — решение уравнения $(g^p)^{[x]} = h^p$ в подквазигруппе $(pG, *)$. Потенциал элемента g^p в подквазигруппе $(pG, *)$ по предложению 5 будет делить $q \text{ ord } \sigma$. Аналогичные рассуждения проводятся для подгруппоида $(qG, *)$. А значит, решая уравнения в группоидах $(pG, *)$ и $(qG, *)$, находим все наборы решений вида:

$$\begin{cases} x \equiv x_p \pmod{(q \text{ ord } \sigma)}, \\ x \equiv x_q \pmod{(p \text{ ord } \sigma)}. \end{cases}$$

Данная система имеет решение по модулю $pq \text{ ord } \sigma$ тогда и только тогда, когда разрешимо исходное уравнение дискретного логарифмирования.

Таким образом, если исходное уравнение над группоидом $(G, *)$ мощности $|G| = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_t^{k_t}$ имеет решение, то его нахождение можно свести к решению уравнений над группоидами примарной мощности.

2. Рассмотрим второй случай: порядок группы $|G|$ имеет вид $|G| = p^n$. Пусть экспонента группы $\exp G = p^k$. Возведя обе части уравнения в степень p^{k-1} , получим уравнение (2) над группоидом $(p^{k-1}G, *)$. Интересно, что $(p^{k-1}G, \cdot) \cong \mathbb{Z}_p + \dots + \mathbb{Z}_p$. Таким образом, порядок любого элемента группоида $(p^{k-1}G, *)$ по предложению 5 делит $p \text{ ord } \sigma$. Находим все решения x_0 по модулю $p \text{ ord } \sigma$.

Решение исходного уравнения представим в виде: $x = x_0 + x_1 p \text{ ord } \sigma$. Тогда исходное уравнение представляется в виде

$$g^{[x_0 + x_1 p \text{ ord } \sigma]} = h,$$

по следствию 2 данное равенство можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \sigma^{x_0} (g^{[x_1 p \text{ ord } \sigma]}) &= h (g^{[x_0]})^{-1}, \\ (g^{[\text{ord } \sigma]})^{p x_1} &= \sigma^{-x_0} (h (g^{[x_0]})^{-1}). \end{aligned}$$

Обозначив $g_1 = (g^{[\text{ord } \sigma]})^p$, $h_1 = \sigma^{-x_0} (h (g^{[x_0]})^{-1})$, получим уравнение

$$g_1^{x_1} = h_1.$$

Для решения этого уравнения относительно x_1 в циклической группе $\langle g_1 \rangle$ порядка p^{k-1} можно использовать идеи метода Гельфонда.

Подведём итог. Принципиальное отличие в сложности правого логарифмирования на медиальном группоиде есть лишь на этапе логарифмирования в медиальном группоиде, построенном над группой, изоморфной $\mathbb{Z}_p + \dots + \mathbb{Z}_p$.

Очевидно, что для логарифмирования левых степеней можно привести алгоритмы и методы, аналогичные вышеприведенным, имеющие точно такую же сложность.

2.2. Верхняя оценка стойкости процедур открытого распределения ключей Пусть $(\Omega, *)$ — произвольный ПС-группоид. Рассмотрим алгоритм 3 открытого распределения ключей.

Назовём отображение δ группоида $(\Omega, *)$ на себя *отображением, имитирующим секретный ключ* $(r, n, a_1, \dots, a_m)$ абонента A , если для любого секретного ключа $(s, n, b_1, \dots, b_n)$ абонента B выполняется равенство

$$\delta([b_1] \dots [b_s] g^{[b_{s+1}] \dots [b_n]}) = [a_1] \dots [a_r] [b_1] \dots [b_s] g^{[b_{s+1}] \dots [b_n] [a_{r+1}] \dots [a_m]}, \quad (29)$$

т. е. если при использовании преобразования δ вместо преобразования, задаваемого ключом абонента A , мы все равно получим истинное значение общего ключа. Кратко будем называть δ имитирующим отображением.

Предложение 11. *Отображение δ , заданное на $(\Omega, *)$, является имитирующим тогда и только тогда, когда отображение δ перестановочно с операциями возведения в правую и левую степень и выполняется равенство*

$$[a_1] \dots [a_r] g^{[a_{r+1}] \dots [a_m]} = \delta(g). \quad (30)$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (30). Тогда для любого секретного ключа абонента В общий ключ, построенный при помощи отображения δ имеет вид

$$\delta([b_1] \dots [b_s](g)^{[b_{s+1}] \dots [b_n]}) = [b_1] \dots [b_s](\delta(g))^{[b_{s+1}] \dots [b_n]}.$$

Из (30) получаем:

$$[b_1] \dots [b_s](\delta(g))^{[b_{s+1}] \dots [b_n]} = [b_1] \dots [b_s]([a_1] \dots [a_r] g^{[a_{r+1}] \dots [a_m]})^{[b_{s+1}] \dots [b_n]}.$$

А это — истинный ключ. Отсюда следует, что δ — имитирующее отображение.

Обратно, из условий следует равенство (30), так как последнее равносильно (29) при $b_1 = \dots = b_n = 1$. Осталось доказать перестановочность с операциями возведения в степень. При $n = 1$, $s = 1$, для любого натурального b_1 выполнена цепочка тождеств

$$\delta([b_1](g)) = [a_1] \dots [a_r]([b_1]g)^{[a_{r+1}] \dots [a_m]} = [b_1]([a_1] \dots [a_r] g^{[a_{r+1}] \dots [a_m]}) = [b_1](\delta(g)).$$

Аналогично доказывается перестановочность с правыми степенями.

Так как $(\Omega, *)$ — ПС-группоид, то нахождение общего секретного ключа в алгоритме 3 не сложнее решения задачи *обобщённого дискретного логарифмирования*, т.е. нахождения хотя бы одной пары натуральных чисел u, v и набора $(x_1, \dots, x_v)$, $x_i \in \mathbb{N}$, $i \in \overline{1, v}$, удовлетворяющих равенству (5):

$$[x_1] \dots [x_u] g^{[x_{u+1}] \dots [x_v]} = h,$$

где $h = [a_1] \dots [a_r] g^{[a_{r+1}] \dots [a_m]}$.

Например, если выполнено соотношение $g^{[r]} = [a_1] \dots [a_r] g^{[a_{r+1}] \dots [a_m]}$, то операция возведения в правую степень r есть имитирующее отображение.

Основываясь на этом, можно предложить следующую атаку.

Алгоритм 7.

Дано. Группоид $(\Omega, *)$, открытый ключ абонента A вида $K_A = [a_1] \dots [a_r] g^{[a_{r+1}] \dots [a_m]}$.

Выход. Общий секретный ключ K_{AB} .

Шаг 1. Решаем уравнение

$$g^{[x]} = K_A,$$

используя алгоритмы, рассмотренные в разделе 2.1.

Шаг 2. Если решение существует, находим общий ключ $([b_1] \dots [b_s](g)^{[b_{s+1}] \dots [b_n]})^{[x]}$.
Иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3. Решаем уравнение

$$[x]g = K_A,$$

используя алгоритмы, рассмотренные в разделе 2.1.

Шаг 4. Если решение существует, то находим общий ключ $[x]([b_1] \dots [b_s](g)^{[b_{s+1}] \dots [b_n]})$.

Трудоёмкость Q метода определяется сложностью решения уравнений на первом и третьем шагах и составляет $O(Lg(\Omega, *))$, где $Lg(\Omega, *)$ — трудоёмкость одностороннего логарифмирования. Надежность оценивается снизу величиной

$$\mathcal{P} = \frac{|^{[N]}g \cup g^{[N]}|}{|\Omega|}.$$

Таким образом, стойкость (отношение трудоёмкости алгоритма к его надежности) оценивается сверху величиной

$$Lg(\Omega, *) \frac{|\Omega|}{|^{[N]}g \cup g^{[N]}|}.$$

Для локально-медиального группоида удастся показать достижимость максимума стойкости алгоритма 2 открытого распределения ключей относительно данной атаки.

Теорема 8. *Максимум стойкости Алгоритма 2 открытого распределения ключей относительно алгоритма 7 достигается при $\text{pot}_r g \sim \text{pot}_l g \sim \sqrt{|\Omega|}$, $\text{pot}_{lr} g \sim |\Omega|$ и равен $O(|\Omega|^{\frac{3}{4}})$.*

Доказательство. Трудоёмкость Q метода определяется сложностью решения уравнений на первом и третьем шагах и согласно алгоритму 5

$$Q = O(\sqrt{\text{pot}_r g}) + O(\sqrt{\text{pot}_l g}) = O(\sqrt{\max\{\text{pot}_r g, \text{pot}_l g\}}).$$

Таким образом, для некоторой константы $a \in \mathbb{R}$

$$Q = a\sqrt{\max\{\text{pot}_r g, \text{pot}_l g\}}. \quad (31)$$

Очевидно, выполняются неравенства

$$\text{pot}_{lr} g \leq \text{pot}_l g \cdot \text{pot}_r g; \quad \text{pot}_{lr} g \leq |\Omega|.$$

Вероятность $\mathcal{P}$ нахождения истинного общего ключа с помощью предложенного алгоритма есть вероятность разрешимости уравнений на первом или третьем шагах:

$$\mathcal{P} = \frac{\text{pot}_r g}{\text{pot}_{lr} g} + \frac{\text{pot}_l g}{\text{pot}_{lr} g} \geq \frac{\max\{\text{pot}_r g, \text{pot}_l g\}}{\text{pot}_{lr} g}.$$

Тогда, пользуясь (31), стойкость процедуры относительно данного метода можно оценить следующим образом:

$$\frac{Q}{\mathcal{P}} \leq \frac{a\sqrt{\max\{\text{pot}_r g, \text{pot}_l g\}}}{\max\{\text{pot}_r g, \text{pot}_l g\}} \text{pot}_{lr} g = \frac{a \text{pot}_{lr} g}{\sqrt{\max\{\text{pot}_r g, \text{pot}_l g\}}}.$$

При потенциалах элемента g , близких к $|\Omega|$, имеем соотношение

$$\frac{Q}{\mathcal{P}} = O(\sqrt{|\Omega|}),$$

а это — оценка сложности логарифмирования в "классическом" случае.

Найдём максимум величины $\frac{Q}{\mathcal{P}}$. Имеем соотношение

$$\frac{Q}{\mathcal{P}} = \frac{a \text{pot}_{lr} g}{\sqrt{\max\{\text{pot}_r g, \text{pot}_l g\}}} \leq \frac{\text{pot}_{lr} g}{\sqrt{(\text{pot}_r g + \text{pot}_l g)/2}}.$$

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем:

$$\frac{Q}{P} \leq \frac{a \operatorname{pot}_{lr} g}{\sqrt{\sqrt{(\operatorname{pot}_r g \cdot \operatorname{pot}_l g)}}} = \frac{a \operatorname{pot}_{lr} g}{(\operatorname{pot}_r g \cdot \operatorname{pot}_l g)^{1/4}}.$$

Отсюда следуют соотношения:

$$\frac{Q}{P} \leq \begin{cases} \frac{a|G|}{|\Omega|^{1/4}} \leq a|\Omega|^{3/4}, & \text{если } (\operatorname{pot}_r g \cdot \operatorname{pot}_l g) \geq |\Omega|, \\ a(\operatorname{pot}_r g \cdot \operatorname{pot}_l g)^{3/4} \leq a|\Omega|^{3/4}, & \text{если } (\operatorname{pot}_r g \cdot \operatorname{pot}_l g) \leq |\Omega|. \end{cases}$$

Очевидно, что оценка $\frac{Q}{P} \leq a|\Omega|^{3/4}$ достижима при $\operatorname{pot}_r g \sim \operatorname{pot}_l g \sim \sqrt{|\Omega|}$ и $\operatorname{pot}_{lr} g \sim |G|$.

Группоиды, в которых оценка достижима, существуют.

Пример 2. Пусть $\langle a \rangle$ — циклическая группа порядка m , и $(\Omega, \cdot) = \langle a \rangle \otimes \langle a \rangle$ — внешнее прямое произведение групп. Тогда группоид $(\Omega, *)$, определяемый равенством (11) при $\tau = \operatorname{id}_\Omega$, — тождественный автоморфизм, и $\sigma(x, y) = (y, x)$, — медиальная квазигруппа.

Рассмотрим элемент $g = (a, e) \in \Omega$. Нетрудно показать, что $\operatorname{pot}_r g = m$, $\operatorname{pot}_l g = 2m$ и $\operatorname{pot}_{lr} g > \phi(m)m$, где $\phi(m)$ — функция Эйлера.

Наряду с возведением в степень в локально-медиальном группоиде в качестве имитирующего гомоморфизма может быть использована операция возведения в степень в исходной полугруппе. Такая атака успешна в случае, когда, например, каждый из автоморфизмов (10), задающих операцию в группоиде, есть возведение в степень.

3. Медиальная квазигруппа на группе точек эллиптической кривой

Пусть $p > 2$ — простое число, $q = p^k$, F_q — поле Галуа и $A, B \in F_q$. Эллиптическая кривая $E = E(F_q)$ есть множество решений $P = (a, b) \in F_q^2$ уравнения

$$y^2 = x^3 + Ax + B \quad (32)$$

в совокупности с бесконечно удаленной точкой Θ . В соответствии с [11] на $E(F_q)$ определяется структура абелевой группы $(E, \oplus)$ с нейтральным элементом Θ . Сложность реализации операции $\oplus$ оценивается величиной $O(1)$ операций в поле F_q .

В общем случае трудоёмкость задачи дискретного логарифмирования на группе точек эллиптической кривой имеет корневую оценку. В связи с этим, медиальные квазигруппы, построенные на них, могут оказаться подходящими алгебраическими структурами для построения алгоритма открытого распределения ключа с большей стойкостью.

При условии $A, B \in F_p$ существует автоморфизм σ группы $(E, \oplus)$, определяемый равенством

$$\sigma((x, y)) = (x^p, y^p). \quad (33)$$

Пусть τ — тождественный автоморфизм этой группы. Зададим на E операцию $*$ равенством (11), тогда $(E, *)$ — медиальная квазигруппа.

Оценим стойкость алгоритма 2 открытого распределения ключей, реализованного на ПС-группоиде $(E, *)$.

Очевидно, что построение имитирующего отображения в случае, когда $\sigma(P) = kP$, равносильно логарифмированию на группе точек эллиптической кривой, а значит, с точки зрения анализа интерес представляет случай, когда автоморфизм Фробениуса σ на кривой $E(F_q)$ не соответствует умножению точки ни на какое целое число. В дальнейшем будем рассматривать только такие кривые.

Группа эллиптической кривой $E(F_q)$ порядка m изоморфна группе $\mathbb{Z}_{m_1} \dot{+} \mathbb{Z}_{m_2}$, где $m = m_1 m_2$, $m_2 | (m_1, q - 1)$.

Если $m_2 = 1$, то $(E, \oplus)$ — циклическая группа. В этом случае стойкость общего секретного ключа из алгоритмов 1-3 не превосходит трудоёмкости дискретного логарифмирования на кривой $(E(F_q), \oplus)$.

Рассмотрим интересный частный случай.

Пример 3. Пусть эллиптическая кривая $E(F_{p^2})$, заданная уравнением (32) при $A, B \in F_p$, изоморфна группе $\mathbb{Z}_n \dot{+} \mathbb{Z}_n$, $n \in \{p - 1, p + 1\}$. Такие кривые относятся к классу суперсингулярных [11]. Тогда автоморфизм σ , задаваемый равенством (33), имеет порядок 2, и можно показать, что медиальная квазигруппа $(E, *)$ содержит такой элемент g , что $\text{pot}_l g = n$, $\text{pot}_r g = 2n$, $\text{pot}_{lr} g \geq \varphi(n)n$, где φ — функция Эйлера.

Таким образом, стойкость алгоритма 2 относительно алгоритма 7 в данном примере будет достигать своего максимума $O(n^{3/2})$.

Замечание 2. Порядки точек эллиптической кривой из предыдущего примера не превосходят n . Таким образом, стойкость процедуры Диффи-Хеллмана, построенной на $(E, \oplus)$, оценивается сверху величиной $n^{1/2}$.

Однако для медиальных группоидов, построенных на группе точек эллиптической кривой, можно предложить другие атаки, основанные на построении имитирующего отображения.

Атака 1. Любая комбинация правых и левых степеней элемента g такого группоида представляется в виде

$$[l]P^{[r]} = k_1 P \oplus k_2 \sigma(P)$$

для некоторых натуральных k_1, k_2 .

Гомоморфизм δ , действующий на элементах группы E по правилу

$$\delta(Q) = k_1 Q \oplus k_2 \sigma(Q), \quad (34)$$

очевидно перестановочен с автоморфизмом σ и тождественным τ . А значит, δ будет имитирующим гомоморфизмом.

Таким образом, задача нахождения общего секретного ключа сводится к задаче построения представления элемента K_A в виде (34) в подгруппе абелевой группы E , порожденной элементами P и $\sigma(P)$.

Данная задача является частным случаем задачи двумерного дискретного логарифмирования (см., например, [8]), которая в случае группы точек эллиптической кривой формулируется как нахождение коэффициентов k_1, k_2 , удовлетворяющих равенству

$$Q = [k_1]P \oplus [k_2]S$$

для некоторых фиксированных точек $P, S, Q \in E$.

Для решения данной задачи в работе [9] предложен алгоритм, использующий идеи метода согласования. Алгоритм требует $O(\sqrt{|E|})$ операций в поле F_{q^m} и $O(\sqrt{|E|})$ ячеек памяти.

Позднее, в работе [8] Gaudry и Schost предложили вероятностный алгоритм, основанный на парадоксе дней рождений, его трудоемкость оценивается величиной $O(\sqrt{|E|})$.

Для описания следующей атаки введём определение.

Пусть $m = |E(F_q)|$ и $(m, p) = e$. Обозначим $E(\overline{F_q})$ кривую, заданную уравнением (32), над алгебраическим замыканием поля $\overline{F_q}$. Тогда каждая точка кривой $E(F_q)$ является одновременно точкой кривой $E(\overline{F_q})$, так как поле $\overline{F_q}$ содержит поле F_q .

Положим $E[m] = \{P \in E(\overline{F_q}) : [m]P = \Theta\}$. В [11] показано, что $E[m]$ является подгруппой группы точек эллиптической кривой $E(F_{q^t})$ для некоторого натурального t .

Очевидно, справедливы неравенства $E(F_q) < E[m] < E(F_{q^t})$.

Пусть $M_m = \{\mu \in F_{q^t} : \mu^m = 1\}$ — множество корней из 1 порядка m поля F_{q^t} . В монографии [11] вводится билинейное отображение $e_m : E[m] \times E[m] \rightarrow M_m$, называемое *спариванием Вейля*. Показывается, что существует такая точка $T \in E(F_q)$, что отображение $\psi : E[m] \rightarrow F_{q^t}$, задаваемое по правилу $\psi(S) = e_m(S, T)$, есть изоморфное вложение. Параметр t этого отображения называют *MOV (Menezes-Okamoto-Vanstone)-степенью* группы $E(F_q)$.

Замечание 3. Эффективные алгоритмы вычисления значения спаривания Вейля предложены в [10].

Если MOV-степень t рассматриваемой эллиптической кривой невелика, то можно предложить следующую атаку.

Докажем вспомогательное утверждение.

Предложение 12. Для любой такой точки P порядка m , что $\sigma(P) \neq kP$, $\forall k \in \mathbb{N}$, группы E выполнено:

$$e_m(P, \sigma(P)) \neq 1.$$

Доказательство. Так как спаривание Вейля не вырождено, то существуют такие точки $S, T \in E$ порядка m , что $e_m(S, T) \neq 1$. Точки S, T представляются в виде $S = t_1P \oplus t_2\sigma(P)$, $T = t_3P \oplus t_4\sigma(P)$. Следовательно,

$$e_m(S, T) = e_m(P, \sigma(P))^{t_1t_4 - t_2t_3} \neq 1.$$

А значит, $e_m(P, \sigma(P)) \neq 1$.

Атака 2. Будем искать имитирующий гомоморфизм δ вида (34).

Для нахождения k_1, k_2 рассмотрим следующие спаривания:

$$e_m([l]P^{[r]}, \sigma P) = e_m(k_1P + k_2\sigma(P), \sigma(P)) = e_m(P, \sigma(P))^{k_1},$$

$$e_m([l]P^{[r]}, P) = e_m(k_1P + k_2\sigma(P), P) = e_m(\sigma(P), P)^{k_2}.$$

Получаем два логарифмических уравнения над полем $GF(q^{2t})$

$$e_m(P, \sigma(P))^{k_1} = e_m([l]P^{[r]}, \sigma(P)),$$

$$e_m(\sigma(P), P)^{k_2} = e_m([l]P^{[r]}, P).$$

Таким образом, мы получаем информацию о коэффициентах k_1, k_2 . Трудоемкость атаки равна сложности двух логарифмирований в поле F_{q^t} .

Если исходная кривая суперсингулярная, то трудоемкость атаки не превосходит сложности двух логарифмирований в поле F_{q^2} .

Остается отметить, что трудоемкость построения суперсингулярных кривых с требуемыми свойствами требует минимальных затрат на предварительном этапе, в то время как построение кривых, использующихся в российских стандартах цифровой подписи (ГОСТ 34.10), — это трудоемкий процесс, занимающий длительное время.

Список литературы

1. *Словарь криптографических терминов*, под ред. Погорелова Б. А. и Сачкова В. Н., МЦНМО, Москва, 2006, 94 с.
2. Алфёров А. П., Зубов А. Ю., Кузьмин А. С., Черемушкин А. В., *Основы криптографии*, Гелиос АРВ, Москва, 2005, 480 с.
3. Белявская Г. Б., Табаров А. Х., “Тождества с подстановками, приводящие к линейности квазигрупп”, *Дискретная математика*, **21:1** (2009), 36–51.
4. Василенко О. Н., *Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии*, 2-е изд., МЦНМО, Москва, 2007, 328 с.
5. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А., *Алгебра*, т. 2, Гелиос АРВ, Москва, 2003, 414 с.
6. Глухов М. М., Круглов И. А., Пичкур А. Б., Черемушкин А. В., *Введение в теоретико-числовые методы криптографии*, учебное пособие, Лань, Санкт-Петербург, 2010, 400 с.
7. Diffie W., Hellman M. E., “New directories in cryptography”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1976, 29–40.
8. Gaudry P. and Schost E., “TA low-memory parallel version of Matsuo, Chao and Tsujii’s algorithm”: in D. A. Buell, editor, *Proceedings of Algorithm Number Theory Symposium – ANTS VI*, volume 3076 of LNCS, Springer-Verlag, 2004, 200–222.
9. Matsuo K., Chao J., and Tsujii S., “An improved baby step giant step algorithm for point counting of hyperelliptic curves over Finite Fields”: In C. Fiecker and D. Kohel, editors, *Proceedings of Algorithm Number Theory Symposium – ANTS V*, volume 2369 of LNCS, Springer-Verlag, 2004, 461–474.
10. Menezes A., P. van Oorschot, Vanstone S., “Reducing elliptic curve logarithms to logarithms in a finite field”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1993, 1639–1646.
11. Silverman J., *The Arithmetic of the Elliptic Curves*, Springer, 1986, 513 pp.

Статья поступила 11.05.2014.