Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Закон больших чисел для перманентов случайных матриц, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 4, 59–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 09:59:13

Закон больших чисел для перманентов случайных матриц

© 2005 г. А. Н. Тимашёв

Рассматривается класс случайных матриц $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, \dots, N$, элементы которых — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение, совпадающее с распределением случайной величины ξ , для которой $E\xi^2 > 0$. Как обычно, $\text{per } C$ обозначает перманент матрицы C . В схеме серий, когда $\xi = \xi_N$, $E\xi_N \neq 0$ при $N = 1, 2, \dots$ и $D\xi_N = o((E\xi_N)^2)$ при $N \rightarrow \infty$, доказывается, что последовательность случайных величин $\text{per } C / (N! (E\xi_N)^N)$ сходится по вероятности к единице при $N \rightarrow \infty$. Аналогичный результат устанавливается и в более общем случае, когда строки матрицы C — независимые N -мерные случайные векторы, имеющие одинаковое распределение, совпадающее с распределением некоторого случайного вектора μ , компоненты которого одинаково распределены, но, вообще говоря, зависимы. Приводятся достаточные условия справедливости закона больших чисел для последовательности $\text{per } C / E \text{per } C$ в случае, когда вектор μ совпадает с вектором частот исходов равновероятной полиномиальной схемы с N исходами и n испытаниями, а также в предположении, что μ — случайное равновероятное решение уравнения $k_1 + \dots + k_N = n$ в целых неотрицательных числах $k_1, \dots, k_N$.

Рассмотрим класс неотрицательных $N \times N$ матриц $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, N$, строки которых — независимые N -мерные случайные величины, распределение которых совпадает с распределением вектора $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ частот исходов равновероятной полиномиальной схемы с N исходами и n испытаниями, $n, N \geq 2$. Тогда $\xi_1 + \dots + \xi_N = n$ и $E\xi_i = n/N$, $i = 1, \dots, N$.

Пусть $\text{per } A$ обозначает перманент матрицы A , тогда

$$E \text{per } A = \sum_{(i_1, \dots, i_N)} E a_{1i_1} \dots E a_{Ni_N} = N! \left(\frac{n}{N} \right)^N, \quad (1)$$

где суммирование осуществляется по всем $N!$ перестановкам $(i_1, \dots, i_N)$ чисел $1, \dots, N$.

Для подсчета второго момента $E(\text{per } A)^2$ используем метод, по-видимому, впервые реализованный О'Нейлом (см., например, [1], с. 80). Известно (см., например, [2], с. 471), что для $i, j = 1, \dots, N$, $i \neq j$,

$$E(\xi_i \xi_j) = \frac{n(n-1)}{N^2}, \quad E\xi_i^2 = \frac{n(n-1)}{N^2} + \frac{n}{N}. \quad (2)$$

Из равенства

$$\text{per } A = \sum_{(i_1, \dots, i_N)} a_{1i_1} \dots a_{Ni_N}$$

следует, что

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = \sum_{(i_1, \dots, i_N), (j_1, \dots, j_N)} \mathbf{E}(a_{1i_1} a_{1j_1}) \dots \mathbf{E}(a_{Ni_N} a_{Nj_N}), \quad (3)$$

где суммирование осуществляется по всем $(N!)^2$ упорядоченным парам перестановок $(i_1, \dots, i_N)$ и $(j_1, \dots, j_N)$ чисел $1, \dots, N$.

Пусть m — расстояние между соответствующими подстановками, то есть

$$m = \text{card}\{v \mid 1 \leq v \leq N, i_v \neq j_v\}.$$

Известно (см. [1], с. 80), что число всевозможных подстановок, находящихся на расстоянии m от любой фиксированной подстановки степени N , равно

$$(N)_m S_m = \frac{N!}{(N-m)!} S_m, \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (4)$$

где

$$S_m = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Из соотношений (2)–(4) получаем, что

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = N! \sum_{m=0}^N (N)_m S_m (\mathbf{E}(\xi_1 \xi_2))^m (\mathbf{E}\xi_1^2)^{N-m}. \quad (6)$$

Подставляя в (6) значения $\mathbf{E}(\xi_1 \xi_2)$ и $\mathbf{E}\xi_1^2$ из (2), приходим к равенству

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = N! \left(\frac{n}{N}\right)^N \left(1 + \frac{n-1}{N}\right)^N \sum_{m=0}^N (N)_m S_m \left(\frac{n-1}{N+n-1}\right)^m. \quad (7)$$

В настоящей работе с использованием соотношений (1), (5), (7) доказывается закон больших чисел для перманента случайной матрицы A , аналогичный законам больших чисел для перманента случайных $(0, 1)$ -матриц с заданным числом единиц и с заданными суммами элементов по строкам и столбцам, доказанным в [3, 4] (см. также [1]). Ранее похожие задачи рассматривались в [5] для классов случайных $(0, 1)$ -матриц с заданным числом единиц в каждой строке и случайных стохастических матриц с независимыми одинаково распределенными строками, имеющими симметричное распределение Дирихле.

Заметим, что если каждый элемент матрицы A разделить на n , то получится случайная стохастическая матрица A' , для которой согласно (1) и (7)

$$\mathbf{E}(\text{per } A') = N! N^{-N}, \quad \mathbf{E}(\text{per } A')^2 = n^{-2N} \mathbf{E}(\text{per } A)^2.$$

Далее рассматривается класс неотрицательных $N \times N$ матриц

$$B = (b_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

строки которых — независимые N -мерные случайные величины. Предполагается, что распределение каждой из них совпадает с распределением случайного вектора $(x_1, \dots, x_N)$ такого, что

$$\mathbf{P}\{x_1 = k_1, \dots, x_N = k_N\} = \binom{n + N - 1}{N - 1}^{-1}$$

при любом выборе упорядоченного набора $(k_1, \dots, k_N)$ неотрицательных целых чисел, для которых $k_1 + \dots + k_N = n$, $n, N \geq 2$. Тогда $x_1 + \dots + x_N = n$ и $\mathbf{E}x_i = n/N$, $i = 1, \dots, N$. Поэтому аналогично (1)

$$\mathbf{E} \text{per } B = N! \left(\frac{n}{N} \right)^N. \quad (8)$$

Нетрудно показать, что при $i, j = 1, \dots, N$, $i \neq j$,

$$\mathbf{E}(x_i x_j) = \frac{n(n-1)}{N(N+1)}, \quad \mathbf{E}x_i^2 = \frac{n(2n+N-1)}{N(N-1)}. \quad (9)$$

Используя (6) с заменой $\mathbf{E}(\xi_1 \xi_2)$ и $\mathbf{E}\xi_1^2$ на $\mathbf{E}(x_1 x_2)$ и $\mathbf{E}x_1^2$ и учитывая (9), получаем, что

$$\mathbf{E}(\text{per } B)^2 = N! \left(\frac{n}{N} \right)^N \left(1 + \frac{2(n-1)}{N-1} \right)^N \sum_{m=0}^N (N)_m S_m \left(\frac{n-1}{2n+N-1} \right)^m. \quad (10)$$

С использованием формул (5), (8), (10) в работе доказывается закон больших чисел для перманента случайной матрицы B .

Заметим, что если каждый элемент матрицы B разделить на n , то получится случайная стохастическая матрица B' , для которой согласно (8) и (10)

$$\mathbf{E} \text{per } B' = N! N^{-N}, \quad \mathbf{E}(\text{per } B')^2 = n^{-2N} \mathbf{E}(\text{per } B)^2.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = (N!)^2 \left(\frac{n(n-1)}{N^2} \right)^N \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} \left(\frac{N}{n-1} \right)^m. \quad (11)$$

Доказательство. В [5] установлено, что при $0 < p \leq 1$

$$\sum_{m=0}^N (N)_m S_m p^m = N! p^N \sum_{m=0}^N \frac{(p^{-1} - 1)^m}{m!}. \quad (12)$$

Полагая $p = (n-1)/(N+n-1)$ и учитывая (7) и (12), получаем (11). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При $n \rightarrow \infty$ и $N = o(n)$*

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = (N!)^2 N^{-2N} (n(n-1))^N (1 + O(N/n)). \quad (13)$$

Доказательство. При выполнении условий леммы

$$\sum_{m=0}^N \frac{(N/(n-1))^m}{m!} = 1 + O(N/n).$$

Подставляя эту оценку в (11), получаем (13). Лемма 2 доказана.

Замечание 1. Если при выполнении условий леммы 2 параметр $N \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = 2\pi N(ne^{-1})^{2N}(1 + O(N/n) + O(1/N)).$$

Лемма 3. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha = n/N \leq \alpha_1, \quad (14)$$

где α_0, α_1 — постоянные. Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = 2\pi N(ne^{-1})^{2N}(1 + O(1/N)). \quad (15)$$

Доказательство. При условиях (14) равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$(N!)^2 N^{-2N} (n(n-1))^N = 2\pi N(n/e)^{2N} e^{-1/\alpha} (1 + O(1/N)).$$

Кроме того,

$$\sum_{m=0}^N \frac{(N/(n-1))^m}{m!} = e^{1/\alpha} (1 + O(1/N))$$

равномерно в указанном выше смысле.

Из двух последних соотношений с учетом (11) следует оценка (15). Лемма 3 доказана.

Замечание 2. Леммы 2 и 3 в совокупности означают, что при $n, N \rightarrow \infty$ и $N = O(n)$

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = 2\pi N(ne^{-1})^{2N}(1 + o(1)). \quad (16)$$

Замечание 3. Если $n = 2$, то при $N \rightarrow \infty$ из (11) и равенства

$$\sum_{m=0}^N \frac{N^m}{m!} = \frac{1}{2} e^N (1 + o(1))$$

следует, что

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = \pi N \left(\frac{2}{e} \right) (1 + o(1)).$$

Лемма 4. При $N \rightarrow \infty, n = o(N), n \geq 3$

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = 2\pi N(n(n-1)e^{-2})^N e^{N/(n-1)} (1 + o(1)). \quad (17)$$

Доказательство. Используя формулу Стирлинга и учитывая (11), получаем, что

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = 2\pi N(n(n-1)e^{-2})^N \sum_{m=0}^N \frac{(N/(n-1))^m}{m!} (1 + O(1/N)). \quad (18)$$

Пусть $\lambda = N/(n-1) \rightarrow \infty$ и χ — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ . Тогда

$$\sum_{m=0}^N \frac{(N/(n-1))^m}{m!} = e^{N/(n-1)} \mathbf{P}\{(\chi - \lambda)/\sqrt{\lambda} \leq (n-2)\sqrt{\lambda}\} = e^{N/(n-1)} (1 + o(1)).$$

Из этой оценки и (18) получаем (17). Лемма 4 доказана.

Замечание 4. При условиях леммы 4 из (1) и (17) следует, что

$$\ln \mathbf{E} \left(\frac{\text{per } A}{\mathbf{E} \text{ per } A} \right)^2 = N(\ln(1 - 1/n) + 1/(n-1)) + o(1). \quad (19)$$

Теорема 1. Пусть $n \rightarrow \infty$ и $N = N(n)$ меняется так, что $N = o(n^2)$, $N \geq 2$. Тогда последовательность случайных величин

$$\eta_n = \frac{\text{per } A}{\mathbf{E} \text{ per } A}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

сходится по вероятности к единице.

Доказательство. Если $n \rightarrow \infty$ и $N \geq 2$ фиксировано, то согласно (1) и (13)

$$\mathbf{E} \eta_n^2 = \frac{\mathbf{E}(\text{per } A)^2}{(\mathbf{E} \text{ per } A)^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N (1 + O(1/n)) = 1 + O(1/n).$$

Если же $N \rightarrow \infty$ и $N = O(n)$, то из (1) и (16) получаем, что

$$\mathbf{E} \eta_n^2 = 1 + o(1). \quad (20)$$

Если, наконец, при $n \rightarrow \infty$ и $N = N(n) \rightarrow \infty$, $n = o(N)$ и $N = o(n^2)$, то из (19) и соотношения

$$\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{2n^2}(1 + O(1/n))$$

следует, что оценка (20) выполняется. Утверждение теоремы следует из неравенства Чебышева, поскольку $\mathbf{E} \eta_n = 1$, $n = 1, 2, \dots$, и $\mathbf{D} \eta_n = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1 доказана.

Замечание 5. Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $Nn^{-2} \rightarrow \beta$, $0 < \beta < \infty$, то согласно (19)

$$\mathbf{E}(\text{per } A)^2 = (\mathbf{E} \text{ per } A)^2 e^{\beta/2} (1 + o(1)).$$

Если же $n, N \rightarrow \infty$ так, что $Nn^{-2} \rightarrow \infty$, то

$$(\mathbf{E} \text{ per } A)^2 = o(\mathbf{E}(\text{per } A)^2).$$

Лемма 5. Справедливо равенство

$$\mathbf{E}(\text{per } B)^2 = (N!)^2 \left(\frac{n(n-1)}{N(N+1)} \right)^N \sum_{m=0}^N \frac{((n+N)/(n-1))^m}{m!}. \quad (21)$$

Доказательство. Формула (21) следует из (10) и (12), если положить

$$p = (n-1)/(2n+N-1).$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. При $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $N \geq 2$

$$\mathbf{E}(\text{per } B)^2 = (N!)^2 \left(\frac{n}{N} \right)^{2N} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right)^N \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} (1 + O(1/n)). \quad (22)$$

Доказательство. При выполнении условий леммы 6

$$\sum_{m=0}^N \frac{((n+N)/(n-1))^m}{m!} = \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} (1 + O(1/n)).$$

Подставляя эту оценку в (21) и проводя элементарные преобразования, получаем соотношение (22). Лемма 6 доказана.

Лемма 7. При $n, N \rightarrow \infty$ и $N = o(n)$

$$\mathbf{E}(\text{per } B)^2 = 2\pi N(n/e)^{2N} (1 + o(1)). \quad (23)$$

Доказательство. Оценка (23) получается из (21) с использованием формулы Стирлинга, если учесть, что в рассматриваемом случае

$$\sum_{m=0}^N \frac{((n+N)/(n-1))^m}{m!} = e(1 + o(1)).$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. При выполнении условий леммы 3 справедлива оценка (23).

Доказательство соотношения (23) проводится аналогично доказательству справедливости оценки (15).

Замечание 6. Леммы 7 и 8 в совокупности означают, что при $n, N \rightarrow \infty$ и $N = O(n)$ оценка (23) остается справедливой.

Замечание 7. Если $n = 2$, то при $N \rightarrow \infty$ из (21) и равенства

$$\sum_{m=0}^N \frac{(N+2)^m}{m!} = \frac{1}{2} e^{N+2} (1 + o(1))$$

следует, что

$$\mathbf{E}(\text{per } B)^2 = \pi e N (2/e)^N (1 + o(1)).$$

Лемма 9. При выполнении условий леммы 4

$$\mathbf{E}(\text{per } B)^2 = 2\pi N(n(n-1)e^{-2})^N e^{(N+1)/(n-1)} (1 + o(1)). \quad (24)$$

Доказательство соотношения (24) проводится аналогично доказательству справедливости оценки (17), если положить $\lambda = (n+N)/(n-1)$.

Замечание 8. При выполнении условий леммы 9 из (8) и (24) следует, что

$$\ln \mathbf{E} \left(\frac{\text{per } B}{\mathbf{E} \text{ per } B} \right)^2 = N \left(\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n-1} \right) + \frac{1}{n-1} + o(1). \quad (25)$$

Теорема 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N = o(n^2)$. Тогда последовательность случайных величин

$$\theta_n = \frac{\text{per } B}{\mathbf{E} \text{ per } B}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

сходится по вероятности к единице.

Доказательство. Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N = O(n)$, то согласно (8) и замечанию 6

$$\mathbf{E}\theta_n^2 = 1 + o(1). \quad (26)$$

Если же $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n = o(N)$ и $N = o(n^2)$, то из (25) следует, что оценка (26) остается справедливой. Поэтому при выполнении условий теоремы 2 равенство (26) выполняется, то есть $\mathbf{D}\theta_n \rightarrow 0$. Теорема 2 доказана.

Замечание 9. Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $Nn^{-2} \rightarrow \beta$, $0 < \beta < \infty$, то

$$\mathbf{E}\theta_n^2 = e^{\beta/2}(1 + o(1)),$$

то есть

$$\mathbf{E}(\text{per } B)^2 = (\mathbf{E} \text{per } B)^2 e^{\beta/2}(1 + o(1)).$$

Если же $n, N \rightarrow \infty$ так, что $Nn^{-2} \rightarrow \infty$, то

$$(\mathbf{E} \text{per } B)^2 = o(\mathbf{E}(\text{per } B)^2).$$

Замечание 10. Если $N \geq 2$ фиксировано, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\theta_n^2 = \left(1 - \frac{1}{N+1}\right)^N \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} > 1,$$

поэтому последовательность случайных величин θ_n , $n = 2, 3, \dots$, не удовлетворяет закону больших чисел. Так, например, при $N = 2$, используя тот факт, что $x_1/n \rightarrow \xi$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$, где ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, нетрудно убедиться в том, что последовательность случайных величин $n^{-2} \text{per } B$ имеет в пределе сосредоточенное на отрезке $[0, 1]$ распределение, совпадающее с распределением суммы $\xi + \eta - 2\xi\eta$, где случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены. Это означает, что при $N = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{n^{-2} \text{per } B < x\} = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x = 1/2, \\ x + (1/2 - x) \ln |1 - 2x|, & \text{если } x \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]. \end{cases}$$

Далее рассматривается класс случайных матриц вида $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, \dots, N$, где элементы c_{ij} — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение, совпадающее с распределением случайной величины ξ , для которой $\mathbf{E}\xi^2 > 0$. Заменяя в (6) матрицу A на C , $\mathbf{E}\xi_1^2$ на $\mathbf{E}\xi^2$ и $\mathbf{E}(\xi_1\xi_2)$ на $(\mathbf{E}\xi)^2$, получаем равенство

$$\mathbf{E}(\text{per } C)^2 = N! (\mathbf{E}\xi^2)^N \sum_{m=0}^N (N)_m S_m p^m,$$

где $p = (\mathbf{E}\xi)^2 (\mathbf{E}\xi^2)^{-1} \in [0, 1]$.

Если $\mathbf{E}\xi \neq 0$, то $p > 0$. В этом случае из (12) следует равенство

$$\mathbf{E}(\text{per } C)^2 = (N!)^2 (\mathbf{E}\xi)^{2N} \sum_{m=0}^N \frac{\gamma^m}{m!}, \quad (27)$$

где

$$\gamma = p^{-1} - 1 = \mathbf{D}\xi(\mathbf{E}\xi)^{-2}. \quad (28)$$

Поскольку

$$\mathbf{E} \text{ per } C = N! (\mathbf{E}\xi)^N,$$

согласно (27)

$$\mathbf{E}(\text{per } C)^2 = (\mathbf{E} \text{ per } C)^2 \sum_{m=0}^N \frac{\gamma^m}{m!}. \quad (29)$$

Полагая

$$\chi_N = \frac{\text{per } C}{\mathbf{E} \text{ per } C}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

получаем, что $\mathbf{E}\chi_N = 1$ и согласно (29)

$$\mathbf{E}\chi_N^2 = \sum_{m=0}^N \frac{\gamma^m}{m!}, \quad (30)$$

где значение γ определено в (28).

Если же $\mathbf{E}\xi = 0$, то

$$\mathbf{E} \text{ per } C = 0, \quad \mathbf{E}(\text{per } C)^2 = N! (\mathbf{E}\xi^2)^N. \quad (31)$$

Будем рассматривать схему серий, когда $\xi = \xi_N$, $N = 1, 2, \dots$. В этом случае

$$\gamma = \gamma_N = \mathbf{D}\xi_N(\mathbf{E}\xi_N)^{-2},$$

если только $\mathbf{E}\xi_N \neq 0$, $N = 1, 2, \dots$

Теорема 3. Пусть $\mathbf{E}\xi_N \neq 0$, $\mathbf{D}\xi_N > 0$, и пусть

$$\beta_N = \frac{|\mathbf{E}\xi_N|}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_N}} (N - \mathbf{D}\xi_N(\mathbf{E}\xi_N)^{-2}), \quad N = 1, 2, \dots$$

Если $\beta_N \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{E}(\text{per } C)^2 = (N!)^2 (\mathbf{E}\xi)^{2N} \exp\{\mathbf{D}\xi_N(\mathbf{E}\xi_N)^{-2}\} (1 + o(1)). \quad (32)$$

Если $\lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N = x \in \mathbf{R}$, то

$$\mathbf{E}(\text{per } C)^2 = (N!)^2 (\mathbf{E}\xi)^{2N} \exp\{\mathbf{D}\xi_N(\mathbf{E}\xi_N)^{-2}\} \Phi(x) (1 + o(1)), \quad (33)$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Если же $\beta_N \rightarrow -\infty$ при $N \rightarrow \infty$, то

$$(N!)^{-2} (\mathbf{E}\xi)^{-2N} \mathbf{E}(\text{per } C)^2 = o(\exp\{\mathbf{D}\xi_N(\mathbf{E}\xi_N)^{-2}\}). \quad (34)$$

Доказательство. Согласно (28)

$$\gamma = \gamma_N = \mathbf{D}\xi_N(\mathbf{E}\xi_N)^{-2}, \quad (35)$$

и поэтому

$$\beta_N = (\gamma_N)^{-1/2}(N - \gamma_N), \quad N = 1, 2, \dots$$

Если последовательность $\{\gamma_N\}$ ограничена, то из равенства

$$\sum_{m=0}^N \frac{\gamma_N^m}{m!} = e^{\gamma_N} + O(\gamma_N^{N+1}/(N+1)!)$$

получаем, что

$$\sum_{m=0}^N \frac{\gamma_N^m}{m!} = e^{\gamma_N}(1 + o(1)),$$

и оценка (32) следует из (29) и (35).

Пусть $\gamma_N \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Если случайная величина δ_N имеет распределение Пуассона с параметром γ_N , то

$$\sum_{m=0}^N \frac{\gamma_N^m}{m!} = e^{\gamma_N} \mathbf{P}\{\delta_N \leq N\} = e^{\gamma_N} \mathbf{P}\{(\gamma_N)^{-1/2}(\delta_N - \gamma_N) \leq \beta_N\}. \quad (36)$$

Если $\beta_N \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\{(\gamma_N)^{-1/2}(\delta_N - \gamma_N) \leq \beta_N\} = 1 + o(1),$$

если же $\lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N = x \in \mathbf{R}$, то

$$\mathbf{P}\{(\gamma_N)^{-1/2}(\delta_N - \gamma_N) \leq \beta_N\} = \Phi(x)(1 + o(1)).$$

Если, наконец, $\beta_N \rightarrow -\infty$ при $N \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\{(\gamma_N)^{-1/2}(\delta_N - \gamma_N) \leq \beta_N\} = o(1).$$

Оценки (32)–(34) следуют из этих соотношений и формул (29), (35), (36). Теорема 3 доказана.

Замечание 11. При условии, что $\beta_N \rightarrow -\infty$ при $N \rightarrow \infty$, оценка (34) в общем случае неулучшаема.

Теорема 4. Пусть $\mathbf{E}\xi_N \neq 0$, $N = 1, 2, \dots$, и $\mathbf{D}\xi_N = o((\mathbf{E}\xi_N)^2)$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда последовательность случайных величин

$$\chi_N = \frac{\text{per } C}{N!(\mathbf{E}\xi_N)^N}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

сходится по вероятности к единице.

Доказательство. При сформулированных условиях

$$\gamma_N = \mathbf{D}\xi_N(\mathbf{E}\xi_N)^{-2} = o(1)$$

и поэтому согласно (30) при $\gamma = \gamma_N$

$$\mathbf{E}\chi_N^2 = \sum_{m=0}^N \frac{\gamma_N^m}{m!} = 1 + o(1),$$

то есть $\mathbf{D}\chi_N = o(1)$ при $N \rightarrow \infty$, и утверждение теоремы 4 следует из неравенства Чебышева.

Замечание 12. Если $\mathbf{E}\xi_N = 0$, то $\mathbf{E} \text{ per } C = 0$ и согласно (31)

$$\mathbf{D} \text{ per } C = \mathbf{E}(\text{per } C)^2 = N!(\mathbf{E}\xi_N^2)^N,$$

так что при условии, что $N!(\mathbf{E}\xi_N^2)^N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, последовательность $\text{per } C$, $N = 1, 2, \dots$, сходится по вероятности к нулю.

Проиллюстрируем теоремы 3 и 4 на примере случайной величины ξ , имеющей равномерное распределение на отрезке $[1, b]$. В схеме серий $\xi = \xi_N$ и $a = a_N < b = b_N$, $N = 1, 2, \dots$. Если, кроме того, $a_N + b_N \neq 0$, $N = 1, 2, \dots$, то при $N \rightarrow \infty$ согласно (27) и (30)

$$\mathbf{E}(\text{per } C)^2 = (N!)^2 \left(\frac{a_N + b_N}{2} \right)^{2N} \exp \left\{ \frac{(a_N - b_N)^2}{3(a_N + b_N)^2} \right\} (1 + o(1)).$$

Действительно, при таких условиях

$$\mathbf{E}\xi_N = \frac{1}{2}(a_N + b_N), \quad \mathbf{E} \text{ per } C = N!(\mathbf{E}\xi_N)^N, \quad \frac{\mathbf{D}\xi_N}{(\mathbf{E}\xi_N)^2} = \frac{(a_N - b_N)^2}{3(a_N + b_N)^2}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Из теоремы 4 следует, что если $a_N > 0$ или $b_N < 0$ для всех $N = 1, 2, \dots$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} b_N/a_N = 1$, то последовательность случайных величин $2^N(N!)^{-1}(a_N + b_N)^{-N} \times \text{per } C$, $N = 1, 2, \dots$, сходится по вероятности к единице. Если же $a_N < 0 < b_N$ и $a_N + b_N \neq 0$, то закон больших чисел для этой последовательности не выполняется.

Наконец, если $a_N = -b_N < 0$, то

$$\mathbf{E} \text{ per } C = 0, \quad \mathbf{E}(\text{per } C)^2 = N!(a_N^2/3)^N, \quad N = 1, 2, \dots,$$

и поэтому, если $a_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ так, что $N!(a_N^2/3)^N \rightarrow 0$, то последовательность $\text{per } C$, $N = 1, 2, \dots$, сходится по вероятности к нулю.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что аналогичный подход применим к ситуации, когда рассматривается класс случайных матриц вида $D = (d_{ij})$, $i, j = 1, \dots, N$, в предположении, что строки матрицы D суть независимые N -мерные случайные векторы, имеющие одинаковое распределение, совпадающее с распределением случайного вектора $(\mu_1, \dots, \mu_N)$, компоненты которого также одинаково распределены, но, вообще говоря, зависимы. Будем предполагать, что моменты $\mathbf{E}\mu_1\mu_2$ и $\mathbf{E}\mu_1^2$ существуют. При этих условиях аналогично (6) получаем, что

$$\mathbf{E}(\text{per } D)^2 = N! \sum_{m=0}^N (N)_m S_m (\mathbf{E}\mu_1\mu_2)^m (\mathbf{E}\mu_1^2)^{N-m} = N! (\mathbf{E}\mu_1^2)^N \sum_{m=0}^N (N)_m S_m p^m,$$

где $p = \mathbf{E}\mu_1\mu_2(\mathbf{E}\mu_1^2)^{-1}$ и дополнительно предполагается, что здесь и далее в аналогичных случаях $\mathbf{E}\mu_i\mu_j = \mathbf{E}\mu_1\mu_2$ для всех $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Если, кроме того, $\mathbf{E}\mu_1\mu_2 \neq 0$, то согласно (12)

$$\mathbf{E}(\text{per } D)^2 = (N!)^2 (\mathbf{E}\mu_1\mu_2)^N \sum_{m=0}^N \frac{\gamma^m}{m!},$$

где $\gamma = \mathbf{E}\mu_1^2(\mathbf{E}\mu_1\mu_2)^{-1} - 1$.

Рассматривая схему серий, когда распределение случайного вектора $(\mu_1, \dots, \mu_N)$ зависит от N , мы введем обозначения $\mu_i = \mu_{iN}$, $i = 1, \dots, N$, и будем предполагать, что

$$\mathbf{E}\mu_{1N}^2 > 0, \quad \mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N} \neq 0, \quad N = 1, 2, \dots,$$

В этих предположениях находим, что

$$\mathbf{E} \text{ per } D = N! (\mathbf{E}\mu_{1N})^N, \quad \mathbf{E}(\text{per } D)^2 = (N!)^{-2} (\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N})^N \sum_{m=0}^N \frac{\gamma_N^m}{m!},$$

где

$$\gamma_N = \mathbf{E}\mu_{1N}^2 (\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N})^{-1} - 1, \quad N = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Таким образом, при условии, что $\mathbf{E}\mu_{1N} \neq 0$, $N = 1, 2, \dots$, получаем равенство

$$\mathbf{E}(\text{per } D)^2 = (\mathbf{E} \text{ per } D)^2 (\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N})^N (\mathbf{E}\mu_{1N})^{-2N} \sum_{m=0}^N \frac{\gamma_N^m}{m!}.$$

Отсюда следует, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{E}\mu_{1N} \neq 0$, $\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N} \neq 0$, $N = 1, 2, \dots$, и при $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{m=0}^N \frac{\gamma_N^m}{m!} = (\mathbf{E}\mu_{1N})^{2N} (\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N})^{-N} (1 + o(1)), \quad (38)$$

где величина γ_N определяется соотношением (37). Тогда последовательность случайных величин $(N!)^{-1} (\mathbf{E}\mu_{1N})^{-N} \text{per } D$, $N = 1, 2, \dots$, сходится по вероятности к единице.

Следствие 1. Если $\mathbf{E}\mu_{1N} \neq 0$, $\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N} > 0$, $N = 1, 2, \dots$, и при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}\mu_{1N}^2 \sim \mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N}, \quad (39)$$

$$(\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N})^N \sim (\mathbf{E}\mu_{1N})^{2N}, \quad (40)$$

то справедливо утверждение теоремы 5.

Замечание 13. Утверждение следствия 1 дает лишь достаточные условия справедливости закона больших чисел для последовательности

$$(\mathbf{E} \text{ per } D)^{-1} \text{per } D, \quad N = 1, 2, \dots$$

Так, например, в рассмотренной выше ситуации, когда вектор $(\mu_{1N}, \dots, \mu_{NN})$ совпадает с вектором $(\xi_1, \dots, \xi_N)$, из следствия 1 получаем, что закон больших чисел имеет место, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N = o(n)$ (что слабее утверждения теоремы 1). Если же $(\mu_{1N}, \dots, \mu_{NN}) = (x_1, \dots, x_N)$ (как в теореме 2), то при $N \rightarrow \infty$ ни одно из условий (39), (40) не может выполняться. В то же время нетрудно проверить, что при выполнении условий теорем 1 или 2 оценка (38) справедлива.

Теорема 6. Пусть $\mathbf{E}\mu_{1N} \neq 0$, $\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N} > 0$, $N = 1, 2, \dots$, и пусть последовательность $\{\gamma_N\}$ ограничена или $\gamma_N \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ так, что $(N - \gamma_N)/\sqrt{\gamma_N} \rightarrow \infty$. Если, кроме того, при $N \rightarrow \infty$

$$\gamma_N N^{-1} = 2 \ln |\mathbf{E}\mu_{1N}| - \ln \mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N} + o(1/N),$$

то справедливо утверждение теоремы 5.

Утверждение теоремы 5 также верно, если при $N \rightarrow \infty$ параметр $\gamma_N \rightarrow \infty$ так, что $(N - \gamma_N)/\sqrt{\gamma_N} \rightarrow x \in \mathbf{R}$ и

$$\gamma_N N^{-1} = 2 \ln |\mathbf{E}\mu_{1N}| - \ln \mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N} - \frac{1}{N} \ln \Phi(x) + o(1/N). \quad (41)$$

Доказательство. Можно утверждать, что аналогично (32)–(34) в условиях теоремы 6

$$\sum_{m=0}^N (m!)^{-1} \gamma_N^m = e^{\gamma_N} \Phi(x) (1 + o(1)), \quad (42)$$

где либо $x \in \mathbf{R}$, либо $x = +\infty$ и $\Phi(+\infty) = 1$.

Следовательно, согласно (42)

$$\gamma_N N^{-1} = N^{-1} \ln \left(\sum_{m=0}^N \frac{\gamma_N^m}{m!} \right) - \frac{1}{N} \ln \Phi(x) + o(1/N). \quad (43)$$

Из оценок (41) и (43) следует (38). Теорема 6 доказана.

Замечание 14. Если $\mathbf{E}\mu_{1N} = 0$, $\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N} > 0$ и при $N \rightarrow \infty$ выполнено условие (39), то

$$\mathbf{E}(\text{per } D)^2 = (N!)^2 (\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N})^N (1 + o(1)).$$

Если, кроме того, $(N!)^2 (\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N})^N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то последовательность $\text{per } D$, $N = 1, 2, \dots$, сходится по вероятности к нулю.

В случае, когда $\mathbf{E}\mu_{1N} = \mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N} = 0$, справедливо равенство

$$\mathbf{E}(\text{per } D)^2 = N! (\mu_{1N}^2)^N, \quad N = 1, 2, \dots,$$

и если $N! (\mathbf{E}\mu_{1N}^2)^N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то справедливо предыдущее утверждение.

Наконец, в случае, когда $\mathbf{E}\mu_{1N}\mu_{2N} = 0$ и $\mathbf{E}\mu_{1N} \neq 0$, справедливо равенство

$$\mathbf{E}(\text{per } D)^2 = (\mathbf{E} \text{ per } D)^2 \frac{(\mathbf{E}\mu_{1N}^2)^N}{N! (\mathbf{E}\mu_{1N})^{2N}}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

и если при $N \rightarrow \infty$

$$(\mathbf{E}\mu_{1N}^2)^N (\mathbf{E}\mu_{1N})^{-2N} \sim N!,$$

то есть

$$\ln(\mathbf{E}\mu_{1N}^2) - 2 \ln |\mathbf{E}\mu_{1N}| = \ln N - 1 + \frac{1}{2N} \ln(2\pi N) + o(1/N),$$

то справедливо утверждение теоремы 5.

Заметим, что использованный при доказательствах приведенных в работе утверждений подход, связанный с применением так называемого метода вторых моментов, использовался в задачах вероятностной комбинаторики в [6].

Список литературы

1. Сачков В. Н., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.
2. Прохоров Ю. В., ред., *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. Большая Российская энциклопедия, Москва, 1999.
3. O'Neil P. E., Asymptotics in random $(0, 1)$ -matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1970) **25**, №2, 290–295.
4. O'Neil P. E., Asymptotics and random matrices with row-sum and column-sum restrictions. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1969) **75**, №6, 1276–1282.
5. Тимашев А. Н., Закон больших чисел для перманентов случайных стохастических матриц. *Дискретная математика* (1999) **11**, №3, 91–98.
6. Эрдеш П., Спенсер Дж., *Вероятностные методы в комбинаторике*. Мир, Москва, 1976.

Статья поступила 16.10.2003.