Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Малышев, О доле матриц с максимальной аддитивной сложностью, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 3, 76–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1291>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 07:57:14

О доле матриц с максимальной аддитивной сложностью

© 2014 г. Ф. М. Малышев*

Под аддитивной сложностью невырожденной матрицы размера n в статье понимается минимальное число сложений в цепочке элементарных преобразований над строками, приводящей матрицу к единичной. Доказывается, что с ростом порядка поля почти все матрицы обладают максимально возможной аддитивной сложностью, равной $(n-1)n$. Показано, что матрицы аддитивной сложности $(n-1)n$ являются *MDS*-матрицами.

Ключевые слова: сложность матриц, аддитивная сложность, *MDS*-матрицы.

Каждая невырожденная матрица $L \in GL(n, K)$ размера $n \geq 1$ над произвольным полем K может быть представлена в виде произведения матриц трёх следующих типов: 1) подстановочных, 2) диагональных, 3) матриц с единицами по главной диагонали и нулевыми остальными элементами за исключением какого-то одного, равного единице. Следуя традиции, назовём эти матрицы элементарными.

Умножение матрицы $X \in GL(n, K)$ на элементарные матрицы слева отвечает преобразованиям над строками матрицы X , соответственно: перестановке строк, умножению строк на ненулевые элементы поля, прибавление к одной строке какой-то другой строки, остающейся неизменной.

Для некоторых приложений представляют интерес матрицы, для которых в рассматриваемых произведениях число сомножителей типа 3) имеет гарантированную нижнюю оценку.

Определение 1. Аддитивной сложностью ϑ_L матрицы $L \in GL(n, K)$ назовём минимальное число элементарных матриц типа 3) в представлениях L произведениями элементарных матриц.

Нетрудно понять, что $0 \leq \vartheta_L \leq (n-1)n$. Для произведений подстановочных матриц с диагональными и только для них аддитивная сложность равна нулю. Верхняя оценка величины ϑ_L следует из метода Гаусса сведения произвольной невырожденной матрицы к единичной матрице. Но не при всяких n и K имеются невырожденные матрицы аддитивной сложности $(n-1)n$.

Определение 2. Матрицу $L \in GL(n, K)$ называем предельно аддитивно сложной, если $\vartheta_L = \max_{L \in GL(n, K)} \vartheta_L$, и максимально аддитивно сложной, если $\vartheta_L = (n-1)n$.

*Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
e-mail: malyshevf@mi.ras.ru

Для поля $K = GF(2)$ при всех $n > 1$ максимально аддитивно сложных матриц не существует.

При $n = 2$ имеем $\vartheta_L = 1$ для матриц $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с одним нулевым элементом, и $\vartheta_L = 2$ для матриц L без нулевых элементов. Таким образом, при $n = 2$ максимально аддитивно сложные матрицы существуют только при $|K| > 2$, а всё множество максимально аддитивно сложных матриц совпадает с множеством так называемых *MDS*-матриц (см. [1]). В общем случае такого совпадения нет. В конце статьи будет построено семейство *MDS*-матриц для $n = 3$, которые не являются максимально аддитивно сложными.

Напомним [1], что *MDS*-матрицей является такая матрица размера $n \times n$, у которой все $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} - 1$ подматриц на пересечении i строк и i столбцов, $i = 1, \dots, n$, являются невырожденными.

Далее будут доказаны две следующие теоремы.

Теорема 1. При каждом $n \geq 1$ доля максимально аддитивно сложных матриц в множестве всех матриц размера $n \times n$ стремится к единице при неограниченном увеличении порядка поля K .

Теорема 2. Каждая максимально аддитивно сложная матрица является *MDS*-матрицей.

Доказательство теоремы 1. Обозначим $N_\vartheta = |\mathcal{N}_\vartheta|$, где $\mathcal{N}_\vartheta = \{L \in GL(n, K) | \vartheta_L \leq \vartheta\}$, $0 \leq \vartheta \leq (n-1)n$. Индукцией по ϑ докажем, что

$$N_\vartheta \leq c_n \cdot k^{n+\vartheta}, \quad (1)$$

где $k = |K| - 1$, а c_n — константа, зависящая от n . В качестве c_n можно взять число последовательностей длины не более $2(n-1)n + 1$ из чередующихся матриц типа 2) и 3). Это число не зависит от поля K .

Множество $\mathcal{N}_\vartheta$ разобьём на классы эквивалентности, считая эквивалентными матрицы, получающиеся одна из другой умножением слева на диагональную матрицу. В одном классе эквивалентности k^n матриц. Один класс эквивалентности задаётся последовательностью $(\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_n)$ из n различных точек $(n-1)$ -мерного проективного пространства PK^n . Одна точка $\hat{l}_i \in PK^n$, $i = 1, \dots, n$, задаёт с точностью до ненулевого множителя i -ю строку $l_i \in K^n$ матрицы L .

Вместо неравенства (1) достаточно доказать неравенство

$$M_\vartheta \leq c_n \cdot k^\vartheta, \quad (2)$$

где $M_\vartheta = N_\vartheta / k^n$ — число классов эквивалентности матриц $L \in GL(n, K)$ с $\vartheta_L \leq \vartheta$.

Для конкретной последовательности длиной $2\vartheta + 1$ из чередующихся подстановочных матриц числом $\vartheta + 1$ и матриц типа 3) числом ϑ через $\mathcal{R}_\vartheta$ обозначим множество матриц, являющихся произведениями этих $2\vartheta + 1$ матриц и $\vartheta + 1$ произвольных диагональных матриц, располагающихся в начале и в конце последовательности и по одной между матрицами типа 3). Через r_ϑ обозначим число классов эквивалентности в $\mathcal{R}_\vartheta$.

Индукцией по ϑ докажем неравенство

$$r_\vartheta \leq k^\vartheta, \quad (3)$$

из которого будет следовать неравенство (2), а значит, и неравенство (1).

Для $\vartheta = 0$ неравенство (3) справедливо. Индуктивный переход следует из того, что преобразование типа 3), например, прибавление i -й строки к j -й, ко всем матрицам одного класса эквивалентности $(\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_n)$, будет предоставлять матрицы ровно из k классов эквивалентности, конкретно, из $(\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_{j-1}, \hat{l}, \hat{l}_{j+1}, \dots, \hat{l}_n)$, где $\hat{l}$ пробегает точки проективной прямой, проходящей через $\hat{l}_i$ и $\hat{l}_j$, за исключением самих этих точек. После того, как неравенство (1) доказано, имеем $N_{(n-1)n-1} \leq c_n \cdot k^{n+(n-1)n-1} = c_n \cdot k^{n^2-1}$. Теперь для доказательства теоремы 1 остаётся заметить, что доля невырожденных матриц в множестве всех $(k+1)^{n^2}$ матриц размера $n \times n$ стремится к единице при неограниченном увеличении порядка поля K . Этот хорошо известный факт проверяется индукцией по n . Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 проведём от противного. Пусть в максимально аддитивно сложной матрице $L \in GL(n, K)$ определитель подматрицы L_0 на пересечении (для определённости) r первых строк и r первых столбцов нулевой, $1 \leq r < n$, и последняя r -я строка подматрицы L_0 является линейной комбинацией предыдущих её $r-1$ строк. После применения элементарных преобразований над строками с числом сложений не более $r-1$, последняя строка в L_0 будет нулевой. Затем, прибегая к методу Гаусса для первых r столбцов, в этих столбцах будет по одному ненулевому элементу после применения элементарных преобразований не более чем с $(n-2)r$ сложениями строк. Наконец, того же добиваемся в последних $n-r$ столбцах после привлечения элементарных преобразований не более чем с $(n-1)(n-r)$ сложениями строк. Общее число затрачиваемых сложений строк будет ограничиваться сверху величиной $r-1 + (n-2)r + (n-1)(n-r) = (n-1)n-1 < (n-1)n$. Это противоречит максимальной аддитивной сложности матрицы L . Теорема 2 доказана.

Примером 4-параметрического семейства MDS -матриц при $n = 3$, которые не являются максимально аддитивно сложными, служит

$$\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} 1+xy & c+y+cxu & y \\ xy & y+cxu & y \\ x+a+axu & cx+ac+ay+acxu & 1+ay \end{pmatrix},$$

где значения параметров $a, c, x, y \in K^* = K \setminus \{0\}$ должны быть такими, чтобы все 9 элементов матрицы $\mathcal{L}_0$ были ненулевыми. Невырожденность всех 9 подматриц в $\mathcal{L}_0$ размера 2×2 дополнительно потребует условий: $a+x \neq 0$, $ac \neq 1$, $c+y \neq 0$. Матрица $\mathcal{L}_0$ получается из единичной матрицы в результате последовательности операций: $B_1(c^{-1})$, $B_3(x^{-1})$, A_{21} , $B_1(c)$, A_{13} , $B_3(x)$, A_{32} , $B_2(y)$, A_{21} , $B_1(a)$, A_{13} , $B_1(a^{-1})$, где A_{ij} — прибавление i -й строки к j -й, $B_i(\alpha)$ — умножение i -й строки на α . Таким образом, $\vartheta_{\mathcal{L}_0} \leq 5 < 6$. При достаточно большой мощности поля это семейство непусто.

Автор благодарен А.М. Зубкову за оказанную помощь в подготовке статьи и критические замечания к первому её варианту.

Список литературы

1. Мак-Вильямс Ф.Д., Слоэн Н.Д.А., *Теория кодов, исправляющих ошибки*, М.: Связь, 1979.