Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, А. М. Шойтов, О длинных повторениях цепочек в цепи Маркова, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 3, 79–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:49:12

О длинных повторениях цепочек в цепи Маркова

© 2014 г. В. Г. Михайлов*, А. М. Шойтов**

Пусть $X_0, X_1, \dots$ — простая эргодическая цепь Маркова с конечным числом состояний. Доказываются предельные теоремы для числа $\tilde{\xi}(s, n)$ событий

$$\{X_{i-1} \neq X_{j-1}, X_{i+k} = X_{j+k}, k = 0, \dots, s-1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

когда $s, n \rightarrow \infty$. Из них выводятся предельные теоремы для некоторых связанных с $\tilde{\xi}(s, n)$ случайных величин.

Ключевые слова: цепь Маркова, повторения s -цепочек, предельная теорема Пуассона.

1. Введение

Пусть последовательность $\mathbf{X} = \{X_0, X_1, \dots\}$ образует простую однородную неразложимую и ациклическую цепь Маркова с состояниями $1, \dots, N$, матрицей переходных вероятностей $\mathbf{P} = \|p_{a,b}\|$ и произвольным начальным распределением. Отметим, что такая цепь является эргодической.

Положим $Y_i(s) = (X_i, \dots, X_{i+s-1})$, $s, i = 1, 2, \dots$, и рассмотрим события $\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\}$ и $\{X_{i_1-1} \neq X_{i_2-1}, Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\}$. Первое событие состоит в совпадении указанных цепочек (в [1] для него был использован термин «повторение цепочки», ему мы и следуем в заглавии статьи), а второе заключается в том, что в моменты i_1 и i_2 начинаются совпадающие между собой отрезки последовательности длины не меньше s . Это событие можно трактовать как начало серии повторений s -цепочек. Каждая такая серия имеет, вообще говоря, свою случайную длину. Пусть

$$\xi_n(s) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\}$$

— число совпадений s -цепочек, а

$$\tilde{\xi}_n(s) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I\{X_{i_1-1} \neq X_{i_2-1}, Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\}$$

*Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
e-mail: mikhail@mi.ras.ru

**Место работы: Академия криптографии Российской Федерации,
e-mail: shamru1@yandex.ru

— число серий повторений s -цепочек, все они начинаются в период с момента 1 до момента n включительно.

В [1] эти величины рассматривались в последовательности полиномиальных испытаний, и было, в частности, показано, что при $s, n \rightarrow \infty$ и в области пуассоновского предела распределения этих величин сходятся к сложному пуассоновскому и простому пуассоновскому распределениям. Некоторые свойства последовательности $\{Y_1(s), Y_2(s), \dots\}$ исследовались в работах П.Ф. Беляева (см., например, [2]).

В настоящей работе изучается распределение величины $\tilde{\xi}_n(s)$ в неразложимой и ациклической марковской цепи. Выводятся достаточные условия сходимости (при $n, s \rightarrow \infty$) распределения случайной величины $\tilde{\xi}_n(s)$ к распределению Пуассона и к нормальному распределению. При этом распределение цепи $\mathbf{X}$ считается фиксированным. В качестве следствий этих предельных теорем получены предельные теоремы для времени первого повторения s -цепочек $\tau(s)$ и для максимальной длины повторившейся цепочки $\mu(n)$. Эти величины определяются формулами

$$\tau(s) = \min\{n : \tilde{\xi}_n(s) > 0\}, \quad \mu(n) = \max\{s : \tilde{\xi}_n(s) > 0\}.$$

Аналогичные задачи для цепочек в последовательности независимых полиномиальных испытаний были решены в [1] и [3]. В [4] приведен обзор результатов по повторениям цепочек в независимых дискретных последовательностях с точностью до отношения эквивалентности. Задачи, связанные с совпадениями цепочек из двух независимых конечных цепей Маркова, рассматривались в [5]. В [6] были изучены условия сходимости к сложному распределению Пуассона распределения числа серий в конечной цепи Маркова. Задачи о повторениях состояний и цепочек состояний заданной длины в цепях Маркова в схемах с возрастающим числом исходов рассматривались в [7], [8], [9].

2. Формулировки

Пусть $p = \max_{a,b} p_{a,b}$, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$, $\pi_k > 0$, $k = 1, \dots, N$, — стационарное распре-

деление цепи $\mathbf{X}$, $\Pi_2 = \sum_{k=1}^N \pi_k^2$.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{P}_2 = \|p_{a,b}^2\|$. Матрица $\mathbf{P}_2$ является неразложимой и примитивной (см. [10]), так как расположение нулевых элементов в ней совпадает с расположением нулевых элементов в матрице $\mathbf{P}$. Пусть $\rho > 0$ — максимальное характеристическое число матрицы $\mathbf{P}_2$, $z = (z_1, \dots, z_N)$, $z_k > 0$, $k = 1, \dots, N$, — соответствующий ему собственный вектор: $\mathbf{P}_2 z = \rho z$. Согласно предложению 2 на с. 365 книги [10] для $\mathbf{P}_2$ имеет место представление

$$\mathbf{P}_2 = Z \rho \mathbf{P}'_2 Z^{-1},$$

где Z — диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены числа $(z_1, \dots, z_N)$, а $\mathbf{P}'_2$ — стохастическая матрица.

Матрица $\mathbf{P}'_2$ определяет неразложимую и ациклическую цепь Маркова с некоторым стационарным распределением $\pi' = (\pi'_1, \dots, \pi'_N)$, $\pi'_k > 0$, $k = 1, \dots, N$, и для некоторой константы $c_1 > 0$ при $s \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$|\mathbf{P}'_2{}^s - \Pi'| = O(e^{-c_1 s}), \quad (1)$$

где матрица $\mathbf{P}'$ состоит из одинаковых строк π' , а $|A|$ — норма матрицы $A = \|a_{i,j}\|$, определяемая формулой (см. [10])

$$|A| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |a_{i,j}|. \quad (2)$$

Введем обозначения $\mathcal{L}(W)$ для распределения случайной величины W и $\text{Po}(\lambda)$ для распределения Пуассона с параметром λ , а также обозначения

$$(\pi', z^{-1}) = \sum_{k=1}^N \pi'_k z_k^{-1}, \quad (\pi^2, z) = \sum_{l=1}^N \pi_l^2 z_l,$$

$$R = \sqrt{\rho^{s-1}(1-\rho)(\pi', z^{-1})(\pi^2, z)}, \quad \Lambda_{s,n} = \frac{n^2}{2} R^2. \quad (3)$$

Пусть $\rho(\Psi, \Gamma)$ — расстояние по вариации между распределениями Ψ и Γ .

Теорема 1. Пусть $p^2 < \rho$, $n, s \rightarrow \infty$ и выполнено условие $\Lambda_{s,n} \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$. Тогда $\mathcal{L}(\tilde{\xi}_n(s)) \rightarrow \text{Po}(\lambda)$, причем

$$\rho(\mathcal{L}(\tilde{\xi}_n(s)), \text{Po}(\lambda)) = O(e^{-cs} + |\Lambda_{s,n} - \lambda|), \quad (4)$$

для любого c , $0 < c < \min\{1, c_1, c_2, c_3\}$, где c_1 определено в (1), $c_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\rho}{p^2}\right)$, а $c_3 = \frac{1}{2} \ln(1/\rho)$.

Теорема 2. Пусть $p^2 < \rho$, $n, s \rightarrow \infty$ и выполнено условие

$$\Lambda_{s,n} \rightarrow \infty, \quad \Lambda_{s,n} = O(e^{cs}), \quad (5)$$

где $0 < c < 2c_2$. Тогда функция распределения случайной величины $\Lambda_{s,n}^{-1/2}(\tilde{\xi}_n(s) - \mathbf{E}\tilde{\xi}_n(s))$ сходится к стандартной нормальной функции распределения.

Замечание 1. Условие $p^2 < \rho$ появилось в теоремах 1 и 2 как техническое. Можно показать, что если в матрице переходных вероятностей $\mathbf{P}$ максимальная вероятность лежит на главной диагонали (т. е. $p = p_{a,a}$ при некотором a) и $p < 1$, то условие $p^2 < \rho$ выполнено. Вопрос о выполнении этого условия в общем случае требует отдельного изучения. Отметим только, что случае выполнения неравенства $p^2 \geq \rho$ предельное распределение Пуассона в теореме 1 сменилось бы сложным пуассоновским распределением.

Замечание 2. Пусть строки матрицы $\mathbf{P}$ являются перестановками одного и того же фиксированного вектора. Тогда $\rho = P_2$, где $P_2 = \sum_{i=1}^N p_i^2$, $p < \sqrt{P_2}$, вектор $(z_1, \dots, z_N) = (1, \dots, 1)$, а $\Lambda_{s,n} = \frac{n^2}{2} P_2^{s-1} (1 - P_2) \Pi_2$.

Теорема 3. Пусть $p^2 < \rho$, а $s \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\tau(s)R \leq x\} = 1 - e^{-x^2/2} + O(e^{-cs}) \quad \forall x > 0 \quad (6)$$

при любом c , $0 < c < \min\{1, c_1, c_2, c_3\}$.

Теорема 4. Пусть $p^2 < \rho$, а $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \mu(n) - \left[\frac{2 \ln n}{|\ln \rho|} \right] < k \right\} \rightarrow \exp \left(-\frac{1-\rho}{2} \rho^{k - \{2 \ln n / |\ln \rho|\}} \right), \quad (7)$$

где $[u]$ и $\{u\}$ — целая и дробная части числа u .

При выводе этих теорем используется следующая оценка точности пуассоновской аппроксимации для распределения величины $\tilde{\xi}(s, n)$.

Введем множество

$$J_{s,n} = \{\bar{i} = (i_1, i_2) : s^3 + 1 \leq i_1 < i_1 + s^3 < i_2 \leq n\}$$

и определим случайные величины

$$\delta_n(s) = \sum_{(i_1, i_2) \in J_{s,n}} I \{X_{i_1-1} \neq X_{i_2-1}, Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\}.$$

Замечание 3. В определении множества $J_{s,n}$ вместо величины s^3 может быть использована любая достаточно быстро растущая при $s \rightarrow \infty$ функция. От выбора этой функции зависят лишь конкретный вид оценки приводимой далее теоремы 5 и границы для констант в оценках теорем 1 и 3. При нашем выборе упомянутые границы вычисляются просто.

Теорема 5. Пусть $s, n \rightarrow \infty$, $s^3 < n$. Тогда

$$\begin{aligned} & \rho \left(\mathcal{L}(\tilde{\xi}_n(s)), \text{Po}(\mathbf{E}\delta_n(s)) \right) = \\ & = O \left(s^2 n^{-1} \mathbf{E}\delta_n(s) + s^3 n p^s + \min \left(\mathbf{E}\delta_n(s), \sqrt{\mathbf{E}\delta_n(s)} \right) e^{-cs^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

при некотором $c > 0$.

3. Доказательства

Доказательство. Доказательство теоремы 5 состоит из трех частей. Сначала оценивается величина $\rho \left(\mathcal{L}(\tilde{\xi}_n(s)), \mathcal{L}(\delta_n(s)) \right)$, затем — величина $\rho \left(\mathcal{L}(\delta_n(s)), \text{Po}(\mathbf{E}\delta_n(s)) \right)$. На заключительном шаге остается применить неравенство треугольника.

1. Используя неравенство $\mathbf{P}\{X_{i_2} = x_2 | X_{i_1} = x_1\} \leq p$ при $i_2 \geq i_1 + s$, получаем оценки

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\} = \\ & = \sum_{(x_1, \dots, x_s) \in \{1, \dots, N\}^s} \mathbf{P}\{X_{i_1} = x_1\} \mathbf{P}\{X_{i_2} = x_1 | X_{i_1+s-1} = x_s\} \prod_{k=2}^s p_{x_{k-1}, x_k}^2 \leq \\ & \leq \sum_{(x_1, \dots, x_s) \in \{1, \dots, N\}^s} \mathbf{P}\{X_{i_1} = x_1\} p^s p_{x_1, x_2} p_{x_2, x_3} \cdots p_{x_{s-1}, x_s} = p^s. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее по аналогии с [1] и [11] заметим, что при $(i_2 = i_1 + 1, \dots, i_1 + s - 1)$ фиксация вектора $Y_{i_1}(i_2 - i_1) = (x_1, \dots, x_{i_2 - i_1})$ однозначно определяет все компоненты вектора $Y_{i_2}(s) = (x_1, \dots, x_{i_2 - i_1}, x_1, \dots)$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\} =$$

$$= \sum_{(x_1, \dots, x_{i_2-i_1}) \in \{1, \dots, N\}^{i_2-i_1}} \mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(i_2-i_1) = (x_1, \dots, x_{i_2-i_1})\right\} \times \\ \times p_{x_1, x_2} p_{x_2, x_3} \cdot \dots \cdot p_{x_{i_2-i_1-1}, x_{i_2-i_1}} p_{x_{i_2-i_1}, x_1} \cdot \dots \leq p^s.$$

Теперь, пользуясь неравенством $\tilde{\xi}_n(s) \geq \delta_n(s)$, получаем

$$\rho(\mathcal{L}(\tilde{\xi}_n(s)), \mathcal{L}(\delta_n(s))) \leq \mathbf{E}(\tilde{\xi}_n(s) - \delta_n(s)) \leq \\ \leq \sum_{i_1=2}^{s^3} \sum_{i_2=i_1+1}^n \mathbf{P}\left\{X_{i_1-1} \neq X_{i_2-1}, Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\right\} + \\ + \sum_{i_1=2}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^{i_1+s^3} \mathbf{P}\left\{X_{i_1-1} \neq X_{i_2-1}, Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\right\} \leq 2s^3 np^s. \quad (10)$$

2. Сначала оценим $\mathbf{E}\delta_n(s)$. Для $(i_1, i_2) \in J_{s,n}$ имеем

$$\mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\right\} = \\ = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_s) \in \{1, \dots, N\}^s} \mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s) = (x_1, x_2, \dots, x_s)\right\} \times \\ \times \mathbf{P}\left\{Y_{i_2}(s) = (x_1, x_2, \dots, x_s) \mid Y_{i_1}(s) = (x_1, x_2, \dots, x_s)\right\} = \\ = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_s) \in \{1, \dots, N\}^s} \mathbf{P}\left\{X_{i_1} = x_1\right\} p_{x_1, x_2} p_{x_2, x_3} \cdot \dots \cdot p_{x_{s-1}, x_s} \times \\ \times \mathbf{P}\left\{Y_{i_2}(s) = (x_1, x_2, \dots, x_s) \mid X_{i_1+s-1} = x_s\right\} = \\ = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_s) \in \{1, \dots, N\}^s} \mathbf{P}\left\{X_{i_1} = x_1\right\} \cdot p_{x_s, x_1}^{(i_2-i_1-s-1)} \cdot p_{x_1, x_2}^2 \cdot p_{x_2, x_3}^2 \cdot \dots \cdot p_{x_{s-1}, x_s}^2.$$

Так как для $(i_1, i_2) \in J_{s,n}$ справедливы оценки $i_2 - i_1 > s^3$, $i_1 > s^3$, а цепь Маркова $\mathbf{X}$ является эргодической, то для некоторой константы $c_4 > 0$, которую при необходимости можно явно выписать, равномерно по $(i_1, i_2) \in J_{s,n}$ и $x_1, x_s \in \{1, \dots, N\}$ справедливы оценки

$$\left|p_{x_s, x_1}^{(i_2-i_1-s-1)} - \pi_{x_1}\right| < e^{-c_4 s^3}, \quad \left|\mathbf{P}\left\{X_{i_1} = x_1\right\} - \pi_{x_1}\right| < e^{-c_4 s^3}.$$

Поэтому равномерно по $(i_1, i_2) \in J_{s,n}$

$$\mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\right\} = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_s) \in \{1, \dots, N\}^s} \pi_{x_1}^2 \cdot p_{x_1, x_2}^2 \cdot p_{x_2, x_3}^2 \cdot \dots \cdot p_{x_{s-1}, x_s}^2 (1 + O(e^{-c_4 s^3})). \quad (11)$$

По аналогии с (11) в векторном виде, используя также (3) и соотношение $e^{-c_4 s^3} = O(e^{-c_1 s})$ при $s \rightarrow \infty$, получаем

$$\left(\mathbf{P}\left\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s), X_{i_1+s-1} = a\right\}, a = 1, \dots, N\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\pi_k^2 (1 + O(e^{-c_4 s^3})) \right), \quad k = 1, \dots, N \Big) \times \mathbf{P}_2^{s-1} = \\
&= \left(\pi_k^2 (1 + O(e^{-c_4 s^3})) \right), \quad k = 1, \dots, N \Big) \times (Z \rho \mathbf{P}'_2 Z^{-1})^{s-1} = \\
&= \rho^{s-1} (1 + O(e^{-c_4 s^3})) \left(\pi_k^2, \quad k = 1, \dots, N \right) \times Z \mathbf{P}'_2^{s-1} Z^{-1} = \\
&= \rho^{s-1} (1 + O(e^{-c_1 s})) \left(\pi_k^2, \quad k = 1, \dots, N \right) \times Z \mathbf{\Pi}' Z^{-1} = \\
&= \rho^{s-1} (1 + O(e^{-c_1 s})) \left(\pi'_k z_k^{-1} \sum_{l=1}^N \pi_l^2 z_l, \quad k = 1, \dots, N \right).
\end{aligned}$$

Так как

$$\mathbf{P} \left\{ Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) \right\} = \sum_{a=1}^N \mathbf{P} \left\{ Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s), \quad X_{i_1+s-1} = a \right\},$$

то

$$\mathbf{P} \left\{ Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) \right\} = \rho^{s-1} \sum_{k=1}^N \pi'_k z_k^{-1} \sum_{l=1}^N \pi_l^2 z_l \cdot (1 + O(e^{-c_1 s})),$$

откуда, используя равенство

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P} \left\{ X_{i_1-1} \neq X_{i_2-1}, \quad Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) \right\} = \\
&= \mathbf{P} \left\{ Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) \right\} - \mathbf{P} \left\{ Y_{i_1-1}(s+1) = Y_{i_2-1}(s+1) \right\},
\end{aligned}$$

получаем (в обозначениях (1)), что равномерно по $(i_1, i_2) \in J_{s,n}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P} \left\{ X_{i_1-1} \neq X_{i_2-1}, \quad Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) \right\} = \\
&= \rho^{s-1} (1 - \rho) (\pi', z^{-1}) (\pi^2, z) (1 + O(e^{-c_1 s})).
\end{aligned}$$

Следовательно (опять см. (1)),

$$\mathbf{E} \delta_n(s) = \frac{C_{n-2s^3}^2}{n^2/2} \Lambda_{s,n} (1 + O(e^{-c_1 s})) = \Lambda_{s,n} \left(1 + O \left(\frac{s^3}{n} + e^{-c_1 s} \right) \right). \quad (12)$$

Оценим точность аппроксимации распределения случайной величины $\delta_n(s)$ распределением Пуассона с параметром $\mathbf{E} \delta_n(s)$. Для этого представим случайную величину $\delta_n(s)$ в виде суммы случайных индикаторов:

$$\delta_n(s) = \sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \eta(\bar{i}),$$

где $\bar{j} = (j_1, j_2)$, $\eta(\bar{i}) = I \left\{ X_{i_1-1} \neq X_{i_2-1}, \quad Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s) \right\}$.

Для исследования распределения этой суммы воспользуемся методом Чена – Стейна (см. [12]). Следуя этому методу, для любой пары $\bar{i} = (i_1, i_2)$ из $J_{s,n}$ определим множество $\Gamma(\bar{i})$ таких пар $\bar{j} = (j_1, j_2)$ из $J_{s,n}$, $\bar{j} \neq \bar{i}$, что хотя бы один из

отрезков $[i_1 - 1, i_1 + s - 1], [i_2 - 1, i_2 + n - 1]$ пересекается хотя бы с одним из отрезков $[j_1 - 1, j_1 + n - 1], [j_2 - 1, j_2 + n - 1]$ или лежит на расстоянии менее s^2 от него.

Для $\bar{i} = (i_1, i_2)$ из $J_{s,n}$ положим $\eta(\bar{i}) = I\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\}$,

$$U_{\bar{i}} = \sum_{\bar{j} \in \Gamma(\bar{i})} I\{X_{i_1-1} \neq X_{i_2-1}, Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\},$$

$$V_{\bar{i}} = \sum_{\bar{j} \in J_{s,n} \setminus \Gamma(\bar{i})} I\{X_{i_1-1} \neq X_{i_2-1}, Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\}.$$

Согласно теореме 2.N работы [12] в нашем случае справедлива следующая верхняя оценка

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{L}(\delta_n(s)), \text{Po}(\mathbf{E}\delta_n(s))) &\leq \frac{1 - e^{-\mathbf{E}\delta_n(s)}}{\mathbf{E}\delta_n(s)} \left(\sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \left(\mathbf{E}\eta(\bar{i}) \left(\mathbf{E}\eta(\bar{i}) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sum_{\bar{j} \in \Gamma(\bar{i})} \mathbf{E}\eta(\bar{j}) \right) \right) + \sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \sum_{\bar{j} \in \Gamma(\bar{i})} \mathbf{E}(\eta(\bar{j})\eta'(\bar{i})) \right) + \\ &\quad + \min\left(1, \sqrt{\frac{2}{e\mathbf{E}\delta_n(s)}}\right) \sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \mathbf{E}|\mathbf{E}\eta(\bar{i}) - \mathbf{E}\{\eta(\bar{i})|V_{\bar{i}}\}|. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая, что $|\Gamma(\bar{i})| \leq 4n(s+1)^2$ для всех $\bar{i} \in J_{s,n}$, сразу получаем

$$\sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \left(\mathbf{E}\eta(\bar{i}) \left(\mathbf{E}\eta(\bar{i}) + \sum_{\bar{j} \in \Gamma(\bar{i})} \mathbf{E}\eta(\bar{j}) \right) \right) = O((\mathbf{E}\delta_n(s))^2 s^2 n^{-1}). \quad (14)$$

Далее для любой пары $\bar{i} = (i_1, i_2)$ из $J_{s,n}$ разобьем множество $\Gamma(\bar{i})$ на пять подмножеств:

$\Gamma_1(\bar{i})$ — ровно один из отрезков $[j_1 - 1, j_1 + s - 1], [j_2 - 1, j_2 + s - 1]$ пересекается с одним из отрезков $[i_1, i_1 + s - 1], [i_2, i_2 + s - 1]$, а остальные отрезки лежат на расстоянии не менее s^2 друг от друга.

$\Gamma'_1(\bar{i})$ — ровно один из отрезков $[j_1 - 1, j_1 + s - 1], [j_2 - 1, j_2 + s - 1]$ лежит на расстоянии менее s^2 от одного из отрезков $[i_1, i_1 + s - 1], [i_2, i_2 + s - 1]$, но не пересекается с ним.

$\Gamma_2(\bar{i})$ — оба отрезка $[j_1 - 1, j_1 + s - 1], [j_2 - 1, j_2 + s - 1]$ пересекаются с обоими отрезками $[i_1 - 1, i_1 + s - 1], [i_2 - 1, i_2 + s - 1]$ (при этом минимальное расстояние между непересекающимися отрезками более $s^2 - 2s$).

$\Gamma'_2(\bar{i})$ — один из отрезков $[j_1 - 1, j_1 + s - 1], [j_2 - 1, j_2 + s - 1]$ пересекается с одним из отрезков $[i_1 - 1, i_1 + s - 1], [i_2 - 1, i_2 + s - 1]$, а другой лежит на расстоянии менее s^2 от оставшегося, но с ним не пересекается.

$\Gamma''_2(\bar{i})$ — оба отрезка $[j_1 - 1, j_1 + s - 1], [j_2 - 1, j_2 + s - 1]$ лежат на расстоянии менее s^2 от отрезков $[i_1 - 1, i_1 + s - 1], [i_2 - 1, i_2 + s - 1]$, но с ними не пересекаются.

По аналогии с рассуждениями в [1] и [11] с учетом (3) и неравенства $\eta(\bar{i}) \leq I\{Y_{i_1}(s) = Y_{i_2}(s)\}$ получаем оценки

$$\sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \sum_{\bar{j} \in \Gamma'_2(\bar{i})} \mathbf{E}(\eta(\bar{j})\eta(\bar{i})) \leq$$

$$\leq 8(s+1)^3 p^{s-1} \sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \mathbf{P}(\eta(\bar{i})) = O(\mathbf{E}\delta_n(s)s^3 p^{s-1}), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \sum_{\bar{j} \in \Gamma'_1(\bar{i})} \mathbf{E}(\eta(\bar{j})\eta(\bar{i})) \leq \\ & \leq 4(s+1)^2 n p^{s-1} \sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \mathbf{E}(\eta(\bar{i})) = O(\mathbf{E}\delta_n(s)s^2 n p^{s-1}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \sum_{\bar{j} \in \Gamma'_2(\bar{i})} \mathbf{E}(\eta(\bar{j})\eta(\bar{i})) \leq \\ & \leq 16(s+1)^4 p^{s-1} \sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \mathbf{E}(\eta(\bar{i})) = O(\mathbf{E}\delta_n(s)s^4 p^{s-1}), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \sum_{\bar{j} \in \Gamma_1(\bar{i})} \mathbf{E}(\eta(\bar{j})\eta(\bar{i})) \leq \\ & \leq 4(s+1) n p^{s-1} \sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \mathbf{E}(\eta(\bar{i})) = O(\mathbf{E}\delta_n(s) s n p^{s-1}), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \sum_{\bar{j} \in \Gamma_2(\bar{i})} \mathbf{E}(\eta(\bar{j})\eta(\bar{i})) \leq \\ & \leq 4(s+1)^2 n^2 p^{2(s-1)} = O((s n p^{s-1})^2). \end{aligned} \quad (19)$$

Далее оценим величину

$$\sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \mathbf{E} \left| \mathbf{E}\eta'(\bar{i}) - \mathbf{E}\{\eta'(\bar{i})|V_i\} \right|.$$

С учетом марковского свойства и эргодичности цепи $\mathbf{X}$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left| \mathbf{E}\eta(\bar{i}) - \mathbf{E}\{\eta(\bar{i})|V_i\} \right| \leq \\ & \leq \mathbf{E} \left| \mathbf{E}\eta(\bar{i}) - \mathbf{E}\{\eta(\bar{i})|X_1, \dots, X_{i_1-s^2}, X_{i_1+s+s^2}, \dots, X_{i_2-s^2}, X_{i_2+s+s^2}, \dots\} \right| = \\ & = \mathbf{E} \left| \mathbf{E}\eta(\bar{i}) - \mathbf{E}\{\eta(\bar{i})|X_{i_1-s^2}, X_{i_1+s+s^2}, X_{i_2-s^2}, X_{i_2+s+s^2}\} \right| \leq \\ & \leq \mathbf{E} \left| \mathbf{E}\eta(\bar{i}) - \mathbf{E}\{\eta(\bar{i})|X_{i_2+s+s^2}\} \right| + \\ & + \mathbf{E} \left| \mathbf{E}\{\eta(\bar{i})|X_{i_2+s+s^2}\} - \mathbf{E}\{\eta'(\bar{i})|X_{i_2-s^2}, X_{i_1+s+s^2}\} \right| + \\ & + \mathbf{E} \left| \mathbf{E}\{\eta(\bar{i})|X_{i_2-s^2}, X_{i_1+s+s^2}\} - \mathbf{E}\{\eta'(\bar{i})|X_{i_1+s+s^2}, X_{i_2-s^2}, X_{i_2+s+s^2}\} \right| + \\ & + \mathbf{E} \left| \mathbf{E}\{\eta(\bar{i})|X_{i_1+s+s^2}, X_{i_2-s^2}, X_{i_2+s+s^2}\} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\mathbf{E}\{\eta(\bar{i})|X_{i_1-s^2}, X_{i_1+s+s^2}, X_{i_2-s^2}, X_{i_2+s+s^2}\} \Big| \leq \\ & \leq 4\rho^{s-1}(1-\rho)e^{-c_2(s^2-2s)} \sum_{k=1}^N \pi'_k z_k^{-1} \sum_{l=1}^N \pi_l^2 z_l. \end{aligned}$$

Поэтому из (3) и оценки $|J_{s,n}| < n^2/2$ следует, что

$$\sum_{\bar{i} \in J_{s,n}} \mathbf{E} \left| \mathbf{E}\eta(\bar{i}) - \mathbf{E}\{\eta(\bar{i})|V_{\bar{i}}\} \right| = O\left(\Lambda_{s,n}e^{-cs^2}\right) \quad (20)$$

при любом $0 < c < c_4$.

Подставляя оценки (12), (14) – (20) в (13) и используя условие $s^3 < n$, убеждаемся в том, что при $s, n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \rho\left(\mathcal{L}(\delta_n(s)), \text{Po}(\mathbf{E}\delta_n(s))\right) = O\left(\frac{s^2}{n}\mathbf{E}\delta_n(s)\right) + \\ & + O\left(s^3np^s + \frac{1 - e^{-\mathbf{E}\delta_n(s)}}{\mathbf{E}\delta_n(s)}(snp^s)^2 + \min\left(\mathbf{E}\delta_n(s), \sqrt{\mathbf{E}\delta_n(s)}\right)e^{-cs^2}\right) = \\ & = O\left(s^2n^{-1}\mathbf{E}\delta_n(s) + s^3np^s + \min\left(\mathbf{E}\delta_n(s), \sqrt{\mathbf{E}\delta_n(s)}\right)e^{-cs^2}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

при любом $0 < c < c_4$.

3. Из соотношений (10), (21) и неравенства треугольника следует, что

$$\rho\left(\mathcal{L}(\tilde{\xi}_n(s)), \text{Po}(\mathbf{E}\delta_n(s))\right) = O\left(\rho\left(\mathcal{L}(\delta_n(s)), \text{Po}(\mathbf{E}\delta_n(s))\right)\right). \quad (22)$$

Из (22) и (21) следует (8). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Нетрудно убедиться, что в предположениях теорем 1 и 2 при $s, n \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$s = O(\ln n), \quad \frac{1}{n} = O(e^{-c_3s}), \quad s^3np^s = O\left(s^3\left(\frac{p^2}{\rho}\right)^{s/2}\right) = O(e^{-cs}) \quad (23)$$

для любого c , $0 < c < c_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\rho}{p^2}\right)$. Кроме этого,

$$e^{-cs^2} = O(e^{-ds}) \quad \forall c, d > 0. \quad (24)$$

Из (8), (23), (24) и условий теоремы 1 следует, что

$$\rho\left(\mathcal{L}(\tilde{\xi}_n(s)), \text{Po}(\mathbf{E}\delta_n(s))\right) = O(e^{-cs}) \quad (25)$$

при любом $0 < c < \min\{c_2, c_3\}$.

Далее воспользуемся теоремой 1.С и замечанием 1.1.4 книги [12], согласно которым с учетом условий теоремы 1 и оценки (12)

$$\begin{aligned} & \rho\left(\text{Po}(\mathbf{E}\delta_n(s)), \text{Po}(\lambda)\right) \leq \min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}\delta_n(s)}}\right\} |\mathbf{E}\delta_n(s) - \lambda| = \\ & = O(|\mathbf{E}\delta_n(s) - \Lambda_{s,n}| + |\Lambda_{s,n} - \lambda|) = \\ & = O\left(\frac{s^3}{n} + e^{-c_1s} + |\Lambda_{s,n} - \lambda|\right) = O(e^{-cs} + |\Lambda_{s,n} - \lambda|) \end{aligned} \quad (26)$$

при любом $0 < c < \min\{1, c_1\}$. Из (25) и (26) следует (4). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В условиях теоремы 2 из (12) вытекает соотношение $\mathbf{E}\delta_n(s) \rightarrow \infty$, а потому из (8) следует равенство

$$\rho\left(\mathcal{L}(\tilde{\xi}_n(s)), \text{Po}(\mathbf{E}\delta_n(s))\right) = O\left(s^2 n^{-1} \mathbf{E}\delta_n(s) + s^3 n p^s + \sqrt{\mathbf{E}\delta_n(s)} e^{-cs^2}\right)$$

при любом $0 < c < c_4$. Из этого соотношения, (23), (24) и условия (5) следует, что

$$\rho\left(\mathcal{L}(\tilde{\xi}_n(s)), \text{Po}(\mathbf{E}\delta_n(s))\right) \rightarrow 0. \quad (27)$$

Пусть $F_{s,n}$ — функция распределения случайной величины $\Lambda_{s,n}^{-1/2}(\tilde{\xi}_n(s) - \mathbf{E}\tilde{\xi}_n(s))$, а $G_{s,n}$ — функция распределения случайной величины $(\mathbf{E}\delta_n(s))^{-1/2}(\zeta - \mathbf{E}\delta_n(s))$, где ζ имеет распределение $\text{Po}(\mathbf{E}\delta_n(s))$. Используя (12) и (23), получаем

$$\frac{\tilde{\xi}_n(s) - \mathbf{E}\tilde{\xi}_n(s)}{\sqrt{\Lambda_{s,n}}} = \left(\frac{\tilde{\xi}_n(s) - \mathbf{E}\delta_n(s)}{\sqrt{\mathbf{E}\delta_n(s)}} + \frac{\mathbf{E}\delta_n(s) - \mathbf{E}\tilde{\xi}_n(s)}{\sqrt{\mathbf{E}\delta_n(s)}} \right) (1 + o(1)).$$

Из (10), (23) и условия (5) следует, что

$$\frac{\mathbf{E}\delta_n(s) - \mathbf{E}\tilde{\xi}_n(s)}{\sqrt{\mathbf{E}\delta_n(s)}} \rightarrow 0.$$

В свою очередь, из (27) следует, что

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\tilde{\xi}_n(s) - \mathbf{E}\delta_n(s)}{\sqrt{\mathbf{E}\delta_n(s)}} < x \right\} - G_{s,n}(x) \right| \rightarrow 0.$$

Все вместе это означает, что

$$\sup_x |F_{s,n}(x) - G_{s,n}(x)| \rightarrow 0. \quad (28)$$

Осталось воспользоваться тем, что функция $G_{s,n}(x)$ центрированного и нормированного естественным образом пуассоновского распределения с параметром $\mathbf{E}\delta_n(s)$ при $\mathbf{E}\delta_n(s) \rightarrow \infty$ сходится к стандартной нормальной функции распределения. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Следуем схеме доказательства теоремы 2 работы [1]. Положим $n(x) = [xR^{-1}]$. Согласно (3) при $s \rightarrow \infty$ выполнено соотношение $R = O(\rho^{s/2})$. Поэтому

$$\Lambda_{s,n} = \frac{n^2(x)}{2} R^2 = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{x}{R} \right] R \right)^2 = \frac{x^2}{2} + O(\rho^{s/2}). \quad (29)$$

Из (29) и теоремы 1 следует, что

$$\mathbf{P}\{\tau(s)R > x\} = \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{n(x)}(s) = 0\} = e^{-x^2/2} + O(e^{-cs} + |\Lambda_{s,n} - x^2/2|), \quad (30)$$

для любого c , $0 < c < \min\{1, c_1, c_2, c_3\}$. Из (30) и (29) следует (6). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству п. б) теоремы 3 работы [1], и мы его не приводим.

Авторы признательны А. М. Зубкову и С. И. Чечете за полезные замечания.

Список литературы

1. Зубков А.М., Михайлов В.Г., “Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **19**:1 (1974), 173-181.
2. Беляев П.Ф., “О совместном распределении частот длинных s -цепочек в мультиномиальной схеме с равновероятными исходами”, *Теория вероятн. и примен.*, **14**:3 (1969), 540-546.
3. Зубков А.М., Михайлов В.Г., “О повторениях s -цепочек в последовательности независимых величин”, *Теория вероятн. и примен.*, **24**:2 (1979), 267-279.
4. Михайлов В.Г., Шойтов А.М., “Структурная эквивалентность s -цепочек в случайных дискретных последовательностях”, *Дискретная математика*, **15**:4 (2003), 7-34.
5. Hansen N. R., “Local alignment of Markov chains”, *Ann. Appl. Probab.*, **16**:3 (2006), 1262-1296.
6. Chrysaphinou O., Vaggelatou E., “Compound poisson approximation for multiple runs in a Markov chain”, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **54**:2 (2002), 411-424.
7. Беляев П.Ф., “К вопросу о совместном распределении частот s -цепочек в сложных цепях Маркова с большим числом состояний”, *Теория вероятн. и примен.*, **14**:2 (1969), 333-339.
8. Беляев П.Ф., “О совместном распределении частот исходов в цепях Маркова с большим числом состояний”, *Теория вероятн. и примен.*, **22**: 3 (1977), 534-545.
9. Зубков А.М., “Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения”, *Матем. сб.*, **109(151)**:4(8) (1979), 491-532.
10. Гантмахер Ф.Р., *Теория матриц*, 5-е изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, 576 с.
11. Шойтов А.М., “Пуассоновское приближение для числа повторений значений дискретной функции от цепочек”, *Дискретная математика*, **17**:2 (2005), 56-69.
12. Barbour A.D., Holst L., Janson S., *Poisson Approximation*, Oxford: Oxford University Press, 1992, 277 pp.

Статья поступила 17.02.2014.