Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Павлов, Е. В. Хворостянская, О максимальном объеме дерева в лесе Гальтона–Ватсона с ограниченным числом вершин, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 3, 90–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 11:28:56

О максимальном объеме дерева в лесе Гальтона–Ватсона с ограниченным числом вершин

© 2014 г. Ю. Л. Павлов*, Е. В. Хворостянская**

Рассматривается случайный лес, образованный траекториями начинающегося с N частиц однородного ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона с пуассоновским распределением числа прямых потомков каждой частицы. Для подмножества траекторий, число вершин которых не превосходит n , найдены предельные распределения максимального объема дерева при $N, n \rightarrow \infty$ и различном поведении параметра распределения числа потомков.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант 13-01-00009, и Программой стратегического развития Петрозаводского государственного университета.

Ключевые слова: лес Гальтона–Ватсона, максимальный объем дерева, предельные теоремы.

В [1, 2] рассматривалось множество $F_{N,n}$ лесов с помеченными вершинами, содержащих N корневых деревьев и n некорневых вершин. На этом множестве задавалось равномерное распределение вероятностей, и для таких случайных лесов были получены предельные распределения максимального объема дерева при различном характере стремления N и n к бесконечности. Позднее, в [3], аналогичная задача была решена для так называемых лесов Гальтона–Ватсона, т.е. случайных лесов, образованных траекториями докритического или критического процесса Гальтона–Ватсона, имеющего N начальных частиц. Понятно, что такой процесс распадается на N независимых процессов, начинающихся с одной частицы, и множество всех возможных его траекторий бесконечно. В [3] рассматривалось подмножество этого множества, в котором число частиц, существовавших за все время эволюции процесса, равно $N+n$. В таком подмножестве число реализаций процесса уже конечно, а распределение вероятностей естественным образом индуцируется ветвящимся процессом.

Пусть процесс Гальтона–Ватсона начинается с N частиц, а число прямых потомков каждой частицы имеет распределение Пуассона с параметром λ , $0 < \lambda \leq 1$. Заметим, что подмножество траекторий такого процесса, содержащих $N+n$ вершин, совпадает с $F_{N,n}$. Обозначим через $\xi_1, \dots, \xi_N$ числа частиц, существовавших

*Место работы: Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, e-mail: pavlov@krc.karelia.ru

**Место работы: Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, e-mail: cher@krc.karelia.ru

за все время эволюции в подпроцессах, начинающихся с частиц $1, \dots, N$ соответственно. Легко видеть, что эти случайные величины определяют объемы деревьев леса Гальтона–Ватсона за все время эволюции процесса. Известно [4], что $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют распределение Бореля–Таннера:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \frac{(\lambda k)^{k-1}}{k!} e^{-\lambda k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (1)$$

Далее будем рассматривать подмножество траекторий процесса, удовлетворяющих условию $\xi_1 + \dots + \xi_N \leq n$. Обозначим через $\eta_1, \dots, \eta_N$ случайные величины, равные объемам деревьев в лесе из этого подмножества. Очевидно, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N \leq n\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем случайную величину $\eta_{(N)}$, равную максимальному объему дерева в лесе, т.е.

$$\eta_{(N)} = \max_{1 \leq i \leq N} \eta_i.$$

В теоремах 1–5 найдены предельные распределения случайной величины $\eta_{(N)}$.

Теорема 1. Пусть $N \rightarrow \infty$, $N\sqrt{1-\lambda} - n(1-\lambda)^{3/2} \leq C\sqrt{\lambda N}$, $0 \leq C < \infty$, $r \geq 5$, $Np_{r-1} \rightarrow \infty$, $Np_r \rightarrow \alpha$, где α — некоторая неотрицательная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r\} = 1 - e^{-\alpha} + o(1), \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r-1\} = e^{-\alpha} + o(1).$$

Теорема 2. Пусть $N \rightarrow \infty$, $N\sqrt{1-\lambda} - n(1-\lambda)^{3/2} \leq C\sqrt{N}$, $0 \leq C < \infty$, $Np_r \rightarrow \alpha$, где α — некоторое положительное число, $0 < \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 < 1$. Тогда для любого фиксированного k

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r+k\} \rightarrow \exp\left\{-\frac{\alpha(\lambda e^{1-\lambda})^{k+1}}{1-\lambda e^{1-\lambda}}\right\}.$$

Теорема 3. Пусть $N \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 1$, $(1-\lambda)N \rightarrow \infty$, $N\sqrt{1-\lambda} - n(1-\lambda)^{3/2} \leq C\sqrt{N}$, $0 \leq C < \infty$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)}\beta - u \leq z\} \rightarrow e^{-e^{-z}},$$

где $\beta = -\ln \lambda + \lambda - 1$, а u выбрано так, что $N\sqrt{\beta}u^{-3/2}e^{-u} = \sqrt{2\pi}$.

Теорема 4. Пусть $N \rightarrow \infty$, $(1-\lambda)N \rightarrow \gamma$, $0 < \gamma < \infty$, $n/N^2 \geq C > 0$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_{(N)}}{N^2} \leq z\right\} = e^{-Q(z,\gamma)} \frac{\int_0^{n/N^2} g_z(x) dx}{\int_0^{n/N^2} g(x) dx} (1 + o(1)),$$

где

$$Q(z, \gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-z\gamma^2/2} - \gamma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\gamma\sqrt{z}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy, \quad (3)$$

$$g(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi x}} \exp \left\{ \gamma - \frac{\gamma^2 x}{2} - \frac{1}{2x} \right\}, \quad (4)$$

а $g_z(x)$ - плотность распределения с характеристической функцией

$$\exp \left\{ \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 2it} + Q(z, \gamma) \right\} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty y^{-3/2} e^{ity - \gamma^2 y/2} dy \right). \quad (5)$$

Теорема 5. Пусть $N \rightarrow \infty$, $(1 - \lambda)N = o(1)$, $n/N^2 \geq C > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $n/N^2 \rightarrow \alpha$, $0 < \alpha < \infty$, то для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta(N)}{N^2} \leq z \right\} \rightarrow 1 + \frac{\sum_{k=1}^{[\alpha/z]} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{kz}^\alpha I_k(z, y) dy}{\int_0^\alpha y^{-3/2} e^{-1/2 y} dy},$$

где

$$I_k(z, y) = \int_{x_k(z, y)} \frac{\exp \{-1/2 (y - x_1 - \dots - x_k)\} dx_1 \dots dx_k}{(2\pi)^{k/2} (x_1 \dots x_k (y - x_1 - \dots - x_k))^{3/2}}, \quad (6)$$

$$x_k(z, y) = \{x_i \geq z, i = 1, \dots, k, x_1 + \dots + x_i \leq y\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Если $n/N^2 \rightarrow \infty$, то для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta(N)}{N^2} \leq z \right\} \rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int_{kz}^\infty I_k(z, y) dy.$$

Ниже приводятся леммы 1-10, с помощью которых доказаны теоремы 1-5.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\mathbf{P} \{ \eta(N) \leq r \} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P} \{ \zeta_N^{(r)} \leq n \}}{\mathbf{P} \{ \zeta_N \leq n \}}, \quad (7)$$

где

$$P_r = \mathbf{P} \{ \xi_1 > r \}, \quad \zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)},$$

а случайные величины $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$ независимы и имеют распределение

$$\mathbf{P} \{ \xi_i^{(r)} = k \} = \mathbf{P} \{ \xi_1 = k | \xi_1 \leq r \}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Доказательство. Соотношение (2) означает, что для случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$ и $\eta_1, \dots, \eta_N$ выполнены менее жесткие условия, чем в обобщенной схеме размещения частиц по ячейкам [5], где $\xi_1 + \dots + \xi_N = n$. В статье [6] показано, что из (2) следует (7).

Лемма 2. Если $N \rightarrow \infty$, $Np_{r-1} \rightarrow \infty$, $Np_r \rightarrow \alpha$, где α — некоторая неотрицательная постоянная, то

$$NP_r \rightarrow 0, \quad NP_{r-1} \rightarrow \alpha, \quad NP_{r-2} \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Учитывая (1), находим, что

$$p_r/p_{r-1} = \lambda e^{-1}(r/(r-1))^{r-2},$$

а из условий леммы получаем соотношение $p_r/p_{r-1} \rightarrow 0$. Отсюда следует, что

$$\lambda \rightarrow 0. \quad (9)$$

С помощью (1) и формулы Стирлинга

$$r! = \sqrt{2\pi} r^{r+1/2} e^{-r+\delta(r)}, \quad 0 < \delta(r) < 1/12r, \quad (10)$$

нетрудно показать, что

$$NP_{r-1} = Np_r(1 + \varepsilon(\lambda)),$$

где

$$\varepsilon(\lambda) \leq 2 \sum_{k=r+1}^{\infty} (\lambda e^{1-\lambda})^{k-r} \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$NP_{r-1} \rightarrow \alpha.$$

Отсюда и из условий леммы получаем, что

$$NP_{r-2} = NP_{r-1} + Np_{r-1} \rightarrow \infty, \quad NP_r = NP_{r-1} - Np_r \rightarrow 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $N \rightarrow \infty$, $Np_r \rightarrow \alpha$, где α — некоторая положительная постоянная, $0 < \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 < 1$. Тогда для любого целого фиксированного k

$$NP_{r+k} = \alpha \frac{(\lambda e^{1-\lambda})^{k+1}}{1 - \lambda e^{1-\lambda}} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что

$$r \rightarrow \infty, \quad (11)$$

и с помощью (1) и (10) находим, что для любого $l \geq 1$

$$p_{r+l}/p_r = (1 + l/r)^{-3/2} (\lambda e^{1-\lambda})^l (1 + O(1/r)).$$

Используя это соотношение, нетрудно показать, что для любого целого $A > k + 1$ выполнено равенство

$$NP_{r+k} = Np_r \left(\sum_{l=k+1}^A (\lambda e^{1-\lambda})^l (1 + O(1/r)) + \delta(\lambda) \right), \quad (12)$$

где

$$\delta(\lambda) \leq 2 \sum_{l=A+1}^{\infty} (\lambda e^{1-\lambda})^l.$$

Поскольку $\lambda e^{1-\lambda} < 1$ при $0 < \lambda < 1$, величину $\delta(\lambda)$ можно сделать сколь угодно малой, выбрав A достаточно большим. Отсюда и из (12) следует утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть $N \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 1$, $N(1 - \lambda) \rightarrow \infty$, $r = (u + z)/\beta + O(1)$, где z — фиксированное положительное число, $\beta = -\ln \lambda + \lambda - 1$, а u выбрано так, что $N\sqrt{\beta}u^{-3/2}e^{-u} = \sqrt{2\pi}$. Тогда

$$NP_r = e^{-z}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Легко видеть, что в условиях леммы выполнено (11). Используя (1) и (10), получаем, что

$$P_r = \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}} \sum_{k=r+1}^{\infty} k^{-3/2} \exp \{k(\ln \lambda - \lambda + 1) - \delta(k)\},$$

где $e^{-\delta(k)} = 1 + O(1/r)$ равномерно по k . Следовательно,

$$P_r = \frac{1 + O(1/r)}{\lambda\sqrt{2\pi}} \sum_{k=r+1}^{\infty} k^{-3/2} e^{-\beta k}. \quad (13)$$

Несложно проверить, что

$$\int_{r+1}^{\infty} x^{-3/2} e^{-\beta x} dx < \sum_{k=r+1}^{\infty} k^{-3/2} e^{-\beta k} < \int_r^{\infty} x^{-3/2} e^{-\beta x} dx.$$

Поскольку

$$\int_r^{r+1} x^{-3/2} e^{-\beta x} dx \leq r^{-3/2} e^{-\beta r},$$

из (13) находим, что

$$P_r = \frac{\sqrt{\beta}(1 + O(1/r))}{\lambda\sqrt{2\pi}} \int_{\beta r}^{\infty} y^{-3/2} e^{-y} dy + O\left(r^{-3/2} e^{-\beta r}\right).$$

Легко видеть, что

$$\beta = \frac{(1 - \lambda)^2}{2} (1 + o(1)). \quad (14)$$

Отсюда и из условий леммы следуют соотношения

$$u \rightarrow \infty, \quad \beta r \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Тогда

$$\int_{\beta r}^{\infty} y^{-3/2} e^{-y} dy = (\beta r)^{-3/2} e^{-\beta r} (1 + o(1))$$

и выполнено равенство

$$P_r = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} (u + z)^{-3/2} e^{-(u+z)} (1 + o(1)) = N^{-1} e^{-z} (1 + o(1)),$$

откуда получаем утверждение леммы.

Лемма 5. Пусть $N \rightarrow \infty$, $r + 1 = zN^2$, $0 < z < \infty$, $(1 - \lambda)N \rightarrow \gamma$, $0 \leq \gamma < \infty$. Тогда

$$NP_r = Q(z, \gamma)(1 + o(1)),$$

где $Q(z, \gamma)$ определено в (3).

Доказательство. Используя (1) и (10), находим, что при $\lambda = 1$

$$P_r = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=r+1}^{\infty} k^{-3/2} = \frac{1 + o(1)}{N\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} x^{-3/2} dx = \frac{1 + o(1)}{N\sqrt{\pi z/2}}$$

и утверждение леммы доказано.

Пусть $\lambda \neq 1$. С помощью (1) и (10) несложно показать, что имеет место соотношение

$$P_r = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=r+1}^{\infty} k^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{kd^2}{2N^2} - \frac{kd^3}{3N^3}(1 + o(1)) \right\}, \quad d = (1 - \lambda)N.$$

Заменяя суммирование интегрированием, получаем, что

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1 + o(1)}{N\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} x^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{xd^2}{2} - \frac{xd^3}{3N}(1 + o(1)) \right\} dx \\ &= \frac{1 + o(1)}{N\sqrt{2\pi}} \left(\int_z^A x^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{xd^2}{2} - \frac{xd^3}{3N}(1 + o(1)) \right\} dx + I_1 \right), \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int_A^{\infty} x^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{xd^2}{2} - \frac{xd^3}{3N}(1 + o(1)) \right\} dx \leq \int_{\varepsilon N}^{\infty} x^{-3/2} dx \leq \frac{C_1}{\sqrt{A}},$$

и выбором A величину I_1 можно сделать сколь угодно малой. Символы $C_1, C_2, \dots$ здесь и далее означают некоторые положительные постоянные. Нетрудно видеть, что при $z \leq x \leq A$ выполнено соотношение

$$\exp \left\{ -\frac{xd^3}{3N}(1 + o(1)) \right\} = 1 - r(x), \quad \text{где } r(x) \leq C_2 x/N.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1 + o(1)}{N\sqrt{2\pi}} \left(\int_z^A x^{-3/2} e^{-xd^2/2} dx + o(1) \right) \\ &= \frac{1 + o(1)}{N\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} x^{-3/2} e^{-xd^2/2} dx + o(1/N). \end{aligned}$$

Отсюда с помощью замены переменной $x = y^2/d^2$ и интегрирования по частям несложно получить утверждение леммы при $\lambda \neq 1$.

Введем обозначения

$$m = \mathbf{E}\xi_1, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1.$$

Лемма 6. Пусть $N \rightarrow \infty$, $\lambda^3(1-\lambda)N \rightarrow \infty$. Тогда распределение случайной величины $(\zeta_N - mN)/(\sigma\sqrt{N})$ слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Доказательство. Обозначим через $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины ξ_1 . Легко проверить, что при $t \rightarrow 0$

$$\varphi(t) = 1 + itm - (\sigma^2 + m^2)t^2/2 + O(t^3(1-\lambda)^{-5}), \quad (16)$$

где

$$m = 1/(1-\lambda), \quad \sigma^2 = \lambda/(1-\lambda)^3. \quad (17)$$

С помощью (16) нетрудно показать, что для характеристической функции $\psi(t)$ случайной величины $(\zeta_N - mN)/(\sigma\sqrt{N})$ при любом фиксированном t выполнено соотношение

$$\ln \psi(t) = -\frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N\lambda^3(1-\lambda)}}\right) = -\frac{t^2}{2} + o(1).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 7. Пусть $N \rightarrow \infty$, $(1-\lambda)N \rightarrow \gamma$, где γ — некоторая неотрицательная постоянная. Тогда распределение суммы ζ_N/N^2 слабо сходится к распределению вероятностей с плотностью (4).

Доказательство. Рассмотрим ветвящийся процесс Гальтона - Ватсона, начинающийся с одной частицы, в котором число прямых потомков каждой частицы имеет распределение Пуассона с параметром λ :

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Обозначим через $F(z)$ производящую функцию этого распределения:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)z^k.$$

Пусть ν — случайная величина, равная общему числу частиц, существовавших в процессе до его вырождения. Введем производящую функцию

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu = l\} z^l.$$

Заметим, что $f(e^{it}) = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_1 . Справедливо равенство [5]:

$$f(z) = zF(f(z)).$$

Отсюда с помощью разложения $F(f(z))$ по формуле Тейлора в окрестности точки $f(z) = 1$ находим, что

$$z(\lambda^2/2 + \varepsilon(z))(f(z) - 1)^2 + z\lambda(f(z) - 1) + z - f(z) = 0,$$

где $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $f(z) \rightarrow 1$. Учитывая, что для производящей функции выполняется условие $0 \leq f(z) \leq 1$, из этого квадратного уравнения получаем соотношение

$$f(z) = 1 + (1 - z + (1 - \lambda)z)(1 + o(1)) - \sqrt{2(1 - z) + (1 - \lambda)^2z + o(1 - z)}.$$

Используя это равенство, для любого фиксированного t нетрудно показать, что при $\lambda = 1$

$$N \ln f \left(e^{it/N^2} \right) \rightarrow -\sqrt{-2it},$$

а при $\lambda \neq 1$

$$N \ln f \left(e^{it/N^2} \right) \rightarrow \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 2it}.$$

Отсюда и из теоремы непрерывности следует утверждение леммы, поскольку $\exp \left\{ \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 2it} \right\}$ является характеристической функцией распределения вероятностей с плотностью (4) [7].

Лемма 8. Пусть $N \rightarrow \infty$ и выполнено одно из следующих условий:

1. $Np_{r-1} \rightarrow \infty$, $Np_r \rightarrow \alpha$, где α — некоторая неотрицательная постоянная, $r \geq 5$;
2. $Np_r \rightarrow \alpha$, где α — некоторая положительная постоянная, $0 < \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 < 1$;
3. $\lambda \rightarrow 1$, $N(1 - \lambda) \rightarrow \infty$, $r = (u + z)/\beta + O(1)$, где z — фиксированное положительное число, $\beta = -\ln \lambda + \lambda - 1$, а u выбрано так, что $N\sqrt{\beta}u^{-3/2}e^{-u} = \sqrt{2\pi}$.

Тогда распределение случайной величины $(\zeta_N^{(r)} - mN) / (\sigma\sqrt{N})$ слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Доказательство. Пусть $\psi_r(t)$ — характеристическая функция случайной величины $(\zeta_N^{(r)} - mN) / (\sigma\sqrt{N})$. Нетрудно видеть, что

$$\psi_r(t) = \frac{\psi(t)}{(1 - P_r)^N} \left(1 - \varphi^{-1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{-itk/(\sigma\sqrt{N})} \right)^N, \quad (18)$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — характеристические функции случайных величин ξ_1 и $(\zeta_N - mN) / (\sigma\sqrt{N})$ соответственно. Кроме того,

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{-itk/(\sigma\sqrt{N})} = P_r + q_r(t), \quad (19)$$

где

$$|q_r(t)| = \left| \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k \left(1 - e^{-itk/(\sigma\sqrt{N})} \right) \right| \leq \frac{|t|}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{k=r+1}^{\infty} kp_k. \quad (20)$$

С помощью (1) и (10) можно показать, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} kp_k \leq C_3 r p_r \sum_{k=r+1}^{\infty} (\lambda e^{1-\lambda})^{k-r}. \quad (21)$$

Пусть выполнено условие 1 леммы. Тогда справедливо (9) и, учитывая (17), (21) и соотношение $Np_r \rightarrow \alpha$, из (20) находим, что

$$|q_r(t)| \leq C_4 \frac{r\sqrt{\lambda}}{N^{3/2}}. \quad (22)$$

Очевидно, что при фиксированном r имеет место оценка

$$q_r(t) = o(1/N). \quad (23)$$

При $r \rightarrow \infty$ с помощью (1), (10) и соотношения $Np_{r-1} \rightarrow \infty$ получаем, что $\ln N/r \rightarrow \infty$, и из (22) следует (23). Несложно проверить, что выполнено условие $\lambda^3 N \rightarrow \infty$, и утверждение леммы следует из (18), (19), (23) и лемм 2, 6.

При выполнении условия 2 леммы, используя (10), (11) и условие $Np_r \rightarrow \alpha$, $\alpha > 0$, нетрудно показать, что $0 < C_5 \leq \ln N/r \leq C_6 < \infty$, и из (20), (21) следует (23). Из (18), (19), (23) и лемм 3, 6 получаем утверждение леммы.

Пусть выполнено условие 3. Аналогично (13) можно показать, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} kp_k = \frac{1 + O(1/r)}{\lambda\sqrt{2\pi}} \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{e^{-\beta k}}{\sqrt{k}}.$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} kp_k = \frac{1 + O(1/r)}{\lambda\sqrt{2\pi}\beta} \int_{\beta r}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx + O\left(\frac{e^{-\beta r}}{\sqrt{r}}\right) = \frac{e^{-\beta r}}{\beta\sqrt{2\pi r}}(1 + o(1)). \quad (24)$$

Из (15) и равенства $N\sqrt{\beta}u^{-3/2}e^{-u} = \sqrt{2\pi}$ следует, что $u = \ln(N\sqrt{\beta})(1 + o(1))$, и с помощью (14), (17), (24) и соотношения $\beta r = u + z + o(\beta)$ из (20) получаем, что для любого фиксированного t

$$\begin{aligned} |q_r(t)| &\leq \frac{C_7 e^{-u}(1-\lambda)^{3/2}}{\sqrt{\beta u N}} \\ &= \frac{C_7 \sqrt{2\pi} u (1-\lambda)^{3/2}}{\beta N \sqrt{N}} \leq \frac{C_8 \ln(N\sqrt{\beta})}{N (N\sqrt{\beta})^{1/2}}, \end{aligned}$$

т.е. справедливо (23). Отсюда, из (18), (19) и лемм 4, 6 следует утверждение леммы.

Лемма 9. Пусть $N \rightarrow \infty$, $r+1 = zN^2$, $(1-\lambda)N \rightarrow \gamma$, где z, γ — некоторые положительные постоянные. Тогда распределение $\zeta_N^{(r)}/N^2$ слабо сходится к распределению вероятностей с характеристической функцией (5).

Доказательство. Нетрудно видеть, что характеристическая функция $\psi_N^{(r)}(t)$ суммы $\zeta_N^{(r)}/N^2$ имеет вид

$$\psi_N^{(r)}(t) = \frac{1}{(1 - P_r)^N} \left(\varphi\left(\frac{t}{N^2}\right) - \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{-itk/N^2} \right)^N, \quad (25)$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_1 . Аналогично доказательству леммы 5 можно проверить, что при любом фиксированном t

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk/N^2} = \frac{1 + o(1)}{N\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} y^{-3/2} e^{ity} e^{-\frac{y}{2}((1-\lambda)N)^2} dy + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (26)$$

В доказательстве леммы 7 показано, что

$$\varphi^N(t/N^2) = \exp\left\{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 2it}\right\}(1 + o(1)). \quad (27)$$

Используя (25)-(27) и лемму 5, получаем соотношение

$$\psi_N^{(r)}(t) = \frac{e^{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 2it}}}{e^{-Q(z, \gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} y^{-3/2} e^{-\gamma^2 y/2} e^{ity} dy \right) (1 + o(1)).$$

Отсюда и из теоремы непрерывности следует утверждение леммы.

Лемма 10. Пусть $N \rightarrow \infty$, $r + 1 = zN^2$, где z — некоторая положительная постоянная, $(1 - \lambda)N = o(1)$. Тогда распределение случайной величины $\zeta_N^{(r)}/N^2$ слабо сходится к распределению вероятностей с плотностью

$$g(y) = \frac{e^{\sqrt{2/\pi}z}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(z, y),$$

где $I_0(z, y) = y^{-3/2}e^{-1/2y}$, а $I_k(z, y)$, $k = 1, 2, \dots$, определены в (6).

Доказательство. Из (26) следует, что при $\lambda = 1$

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk/N^2} = \frac{1 + o(1)}{N\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} y^{-3/2} e^{ity} dy = \frac{E(t, z)}{N} (1 + o(1)), \quad (28)$$

где

$$E(t, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} y^{-3/2} e^{ity} dy.$$

Пусть $\lambda \neq 1$, $d = (1 - \lambda)N$. Разобьем область интегрирования в (26) на две части: $\{z \leq y \leq A\}$, $\{A \leq y \leq \infty\}$, где величина A может быть выбрана сколь угодно большой, и рассмотрим каждый интеграл отдельно.

Очевидно, что

$$\left| \int_A^{\infty} y^{-3/2} e^{-d^2 y/2} e^{ity} dy \right| \leq \int_A^{\infty} y^{-3/2} dy = \frac{2}{\sqrt{A}}. \quad (29)$$

При $z \leq y \leq A$ выполнено равенство $e^{-d^2 y/2} = 1 - d^2 y/2(1 + o(1))$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_z^A y^{-3/2} e^{-d^2 y/2} e^{ity} dy &= \int_z^A y^{-3/2} e^{ity} dy - \frac{d^2}{2} (1 + o(1)) \int_z^A y^{-1/2} e^{ity} dy \\ &= \int_z^{\infty} y^{-3/2} e^{ity} dy - \int_A^{\infty} y^{-3/2} e^{ity} dy - \frac{d^2}{2} (1 + o(1)) \int_z^A y^{-1/2} e^{ity} dy, \end{aligned}$$

где

$$\left| \int_A^{\infty} y^{-3/2} e^{ity} dy \right| \leq \frac{2}{\sqrt{A}}, \quad \left| \int_z^A y^{-1/2} e^{ity} dy \right| \leq 2\sqrt{A}.$$

Таким образом, из (26) и (29) находим, что если $d \rightarrow 0$, то выполнено соотношение (28).

Легко видеть, что

$$P_r = \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k = \frac{E(0, z)}{N} (1 + o(1)). \quad (30)$$

Из леммы 7 следует (27), и, используя (25), (27), (28), для характеристической функции $\psi_N^{(r)}(t)$ суммы $\zeta_N^{(r)}/N^2$ получаем равенство

$$\psi_N^{(r)}(t) = \exp \left\{ \sqrt{-2it} + E(0, z) - E(t, z) \right\} (1 + o(1)).$$

Учитывая, что $E(0, z) = \sqrt{2/\pi z}$, аналогично доказательству леммы 3.3.1 [5] можно показать, что справедливо утверждение леммы.

Докажем теперь теоремы 1–5.

В условиях теоремы 1 справедливо соотношение (9) и, используя (1), легко обнаружить, что $\lambda^3 N \rightarrow \infty$. Поэтому можно применить лемму 6, а также равенства (17) и леммы 1, 2, 8.

Теорема 2 следует из лемм 1, 3, 6, 8.

Нетрудно проверить, что при выполнении условий теоремы 3 в силу (17) и лемм 6, 8 отношение $\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} \leq n\} / \mathbf{P}\{\zeta_N \leq n\}$ стремится к единице. Утверждение теоремы 3 вытекает из лемм 1 и 4, если величина r в (7) задана условиями леммы 4.

Аналогичным образом легко убедиться, что теорема 4 следует из лемм 1, 5, 7 и 9.

Из леммы 7 находим, что при выполнении условий теоремы 5

$$\mathbf{P}\{\zeta_N \leq n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{n/N^2} x^{-3/2} e^{-1/2x} dx.$$

Отсюда, из лемм 1, 5, 10 получаем утверждение теоремы 5.

Список литературы

1. Павлов Ю. Л., “Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе”, *Теория вероятн. и ее применен*, **22:3** (1977), 523–533.
2. Павлов Ю. Л., “Один случай предельного распределения максимального объема дерева в случайном лесе”, *Матем. заметки*, **5** (1979), 751–760.
3. Pavlov Yu. L., *Random forests*, VSP, Utrecht, 2000.
4. Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*, Наука, Москва, 1971.
5. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*, Наука, Москва, 1984.
6. Чупрунов А. Н., Фазекаш И., “Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки”, *Дискрет. матем.*, **24:3** (2012), 122–129.
7. Оберхеттингер Ф., *Преобразования Фурье распределений и их обращения*, Наука, Москва, 1979.

Статья поступила 11.03.2014.