Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Чередник, Неотрицательный базис решетки, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 3, 127–135

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1296>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 03:12:53

Неотрицательный базис решетки

© 2014 г. И. В. Чередник*

Строится неотрицательный базис полной решетки. Доказывается критерий существования неотрицательного базиса у произвольной решетки. Исследуется вопрос о существовании базиса решетки в произвольном выпуклом конусе.

Ключевые слова: неотрицательный базис решетки, целочисленная решетка, выпуклый конус.

Введение

Один из наиболее распространенных способов построения псевдослучайных последовательностей связан с использованием линейных и полилинейных рекуррентных последовательностей над конечными модулями [1, 2]. При этом изучение периодических свойств линейных и полилинейных рекуррент является первоочередной задачей, поскольку период — одна из важнейших характеристик псевдослучайной последовательности. С этой целью в работах [1, 2] вводится и исследуется понятие группы вектор-периодов последовательности.

Понятие группы вектор-периодов тесно связано с решетками, а именно, группа вектор-периодов является подгруппой группы $\mathbb{Z}^n$ (целочисленной решеткой) ранга n и порождается всеми своими неотрицательными элементами (векторами с неотрицательными координатами), причем данное свойство является характеристическим: любая подгруппа $\mathbb{Z}^n$ с указанным свойством является группой вектор-периодов некоторой полилинейной последовательности [2]. В связи с этим авторами [1, 2] поставлен вопрос об описании всех подгрупп $\mathbb{Z}^n$ с таким свойством.

В данной работе показано, что каждая подгруппа $\mathbb{Z}^n$ ранга n порождается множеством всех своих неотрицательных векторов, более того, строятся неотрицательные базисы таких групп. Эти результаты удастся обобщить на случай произвольной полной решетки евклидова пространства. Также в работе доказывается, что необходимым и достаточным условием наличия неотрицательного базиса у произвольной решетки евклидова пространства является наличие неотрицательной системы образующих. Дальнейшим развитием данного исследования стало построение базиса решетки евклидова пространства в произвольном выпуклом конусе.

1. Основные определения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n , в котором скалярное произведение пары векторов $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ определено по правилу

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

*Место работы: Лаборатория ТВП, e-mail: p.n.v.k.s@mail.ru

Решеткой размерности k в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется любая подгруппа L группы $(\mathbb{R}^n, +)$, порожденная линейно независимой системой векторов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ из $\mathbb{R}^n$, которую называют базисом решетки. Если $k = n$, то решетка называется *полной*. В случае, когда $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{Z}^n$, решетка называется *целочисленной*.

Поскольку решетки являются конечно-порожденными свободными абелевыми группами, нам будет удобно использовать общепринятую групповую терминологию. Так, например, мощность базиса решетки в групповой терминологии называется рангом группы.

Множество

$$\Pi_{\beta_1, \dots, \beta_k} = \{x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_k\beta_k \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, k\}$$

называется *фундаментальным* или *главным параллелепипедом* решетки L в базисе $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$. Объем фундаментального параллелепипеда $\Pi_{\beta_1, \dots, \beta_k}$ решетки L можно вычислить по формуле

$$\sqrt{\det(G(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k))},$$

где $G(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ — матрица Грама системы векторов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$. Поскольку объем фундаментального параллелепипеда решетки L не зависит от выбора базиса (см. [3]), то данную величину корректно называть *объемом* или *определителем* решетки L .

2. Неотрицательный базис решетки

Вектор $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ будем называть неотрицательным и использовать запись $\alpha \geq 0$, если $a_i \geq 0$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Предложение 1. *Полная целочисленная решетка $L \subset \mathbb{R}^n$ обладает неотрицательным базисом.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по параметру n . При $n = 1$ любая подгруппа $(\mathbb{Z}, +)$ имеет вид $d\mathbb{Z}$, и утверждение очевидно.

Пусть $N > 1$ и утверждение верно при всех $n < N$. Докажем его при $n = N$. Рассмотрим проекцию группы L на первую координату:

$$L_1 = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists (a, *, \dots, *) \in L\}.$$

Из известного описания подгрупп $(\mathbb{Z}, +)$ следует, что $L_1 = d\mathbb{Z}$. Значит, существует $\gamma_1 \in L$: $\gamma_1 = (d, *, \dots, *)$. При этом $d > 0$, так как ранг L равен n .

Рассмотрим теперь множество всех векторов из L , у которых первая координата равна нулю:

$$L_0 = \{(0, *, \dots, *) \in L\}.$$

Легко понять, что L_0 является группой ранга $n - 1$ и $L = \langle \gamma_1 \rangle \dot{+} L_0$. При этом L_0 изоморфна соответствующей подгруппе M группы $(\mathbb{Z}^{n-1}, +)$ (достаточно вычеркнуть у всех векторов из L_0 первую координату). По предположению индукции в группе M существует неотрицательный базис $\gamma_2, \dots, \gamma_n$, а значит, и группа L_0 обладает неотрицательным базисом: $\alpha_2 = (0, \gamma_2), \dots, \alpha_n = (0, \gamma_n)$.

Так как ранг группы L_0 равен $n - 1$, то невозможно, чтобы какая-либо координата, кроме первой, была нулевой у всех ее базисных векторов $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. Значит, подобранных достаточно большие числа $b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}$, можно получить неотрицательный вектор:

$$\alpha_1 = \gamma_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n = (d, *, \dots, *) \geq 0.$$

Несложно понять, что система неотрицательных векторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ является базисом группы L .

В работе [2] (стр. 164, предложение 3.5) доказано характеристическое свойство групп вектор-периодов: подгруппа $(\mathbb{Z}^n, +)$ ранга n является группой вектор-периодов некоторой полилинейной последовательности в том и только в том случае, когда она порождается множеством всех своих неотрицательных элементов. Воспользовавшись этой характеристикой, мы получаем полное описание групп вектор-периодов.

Следствие 1. *Любая подгруппа $(\mathbb{Z}^n, +)$ ранга n порождается множеством всех своих неотрицательных векторов, и является группой вектор-периодов некоторой полилинейной последовательности.*

Несложно понять, что в случае, когда полная решетка $L = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ является дробно-рациональной, то есть $L \subset \mathbb{Q}^n$, построение неотрицательного базиса решетки L естественным образом сводится к построению неотрицательного базиса подходящей целочисленной решетки $dL = \langle d\beta_1, d\beta_2, \dots, d\beta_n \rangle_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^n$. Дальнейшее обобщение предложения 1 на случай произвольной полной решетки $L = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \rangle_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^n$ достигается путем «аппроксимации» вещественного базиса $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ дробным $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n$ и переходом к соответствующей дробно-рациональной решетке $L' = \langle \beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Теорема 1. *Любая полная решетка $L \subset \mathbb{R}^n$ имеет неотрицательный базис.*

Доказательство. Докажем предварительно следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $A_{n \times n}$ — невырожденная матрица над $\mathbb{R}$. Тогда существуют такие целочисленная матрица $B_{n \times n}$ и неотрицательная матрица $H_{n \times n}$, что $A = B \cdot H$.*

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^\downarrow & \alpha_2^\downarrow & \dots & \alpha_n^\downarrow \end{pmatrix}$. Для доказательства леммы построим две последовательности матриц $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n$ и $H_1, H_2, \dots, H_n$ со свойствами:

1. $A_i = \begin{pmatrix} \beta_1^\downarrow & \dots & \beta_i^\downarrow & \alpha_{i+1}^\downarrow & \dots & \alpha_n^\downarrow \end{pmatrix}$, $\beta_1^\downarrow, \dots, \beta_i^\downarrow$ — целочисленные векторы;
2. $H_1, H_2, \dots, H_n$ — неотрицательные матрицы;
3. $A_{i-1} = A_i \cdot H_i$ для $i = 1, \dots, n$. Несложно понять, что матрицы $B = A_n$ и $H = H_n \cdot H_{n-1} \cdot \dots \cdot H_1$ будут являться подходящими целочисленной и неотрицательной матрицами:

$$A = A_n \cdot H_n \cdot H_{n-1} \cdot \dots \cdot H_1.$$

Рассмотрим множество $M = \{c_1 \alpha_1^\downarrow + c_2 (-\alpha_2^\downarrow) + \dots + c_n (-\alpha_n^\downarrow) \mid c_i \in \mathbb{R}_{>0}, i = 1, \dots, n\}$, состоящее из всех таких векторов $\beta^\downarrow$ пространства $\mathbb{R}^n$, что вектор $\alpha_1^\downarrow$ можно представить в виде положительной линейной комбинации векторов $\beta^\downarrow, \alpha_2^\downarrow, \dots, \alpha_n^\downarrow$. Нетрудно проверить, что множество M является открытым в пространстве $\mathbb{R}^n$, то есть вместе с каждым элементом $\beta^\downarrow \in M$ в множестве M содержится некоторая его окрестность $U_{\beta^\downarrow}$. В силу плотности множества $\mathbb{Q}^n$ в $\mathbb{R}^n$ из окрестности $U_{\beta^\downarrow} \subset M$ можно выбрать дробно-рациональный вектор $\beta'^\downarrow \in \mathbb{Q}^n$, и представить вектор $\alpha_1^\downarrow$ в виде положительной линейной комбинации векторов $\beta'^\downarrow, \alpha_2^\downarrow, \dots, \alpha_n^\downarrow$:

$$\alpha_1^\downarrow = d' \beta'^\downarrow + d_2 \alpha_2^\downarrow + \dots + d_n \alpha_n^\downarrow.$$

Очевидно, что в полученной линейной комбинации дробно-рациональный вектор $\beta'^\downarrow$ можно заменить на такой целочисленный $\beta_1^\downarrow = k\beta'^\downarrow$, что линейная комбинация

$$\alpha_1^\downarrow = d_1\beta_1^\downarrow + d_2\alpha_2^\downarrow + \dots + d_n\alpha_n^\downarrow$$

останется положительной. Легко заметить, что указанная линейная комбинация определяет матрицу $A_1 = \begin{pmatrix} \beta_1^\downarrow & \alpha_2^\downarrow & \dots & \alpha_n^\downarrow \end{pmatrix}$, где $\beta_1^\downarrow$ — целочисленный вектор, и неотрицательную матрицу H_1 :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ d_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

и при этом $A = A_1 \cdot H_1$. Остальные матрицы последовательностей $A_1, A_2, \dots, A_n$ и $H_1, H_2, \dots, H_n$ строятся аналогично.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ — произвольный базис решетки $L \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через A квадратную матрицу, составленную из векторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Согласно лемме 1 существуют такие целочисленная матрица B и неотрицательная матрица H , что выполняется равенство $A = B \cdot H$:

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1 \\ \vec{\beta}_2 \\ \vdots \\ \vec{\beta}_n \end{pmatrix} \cdot H. \quad (1)$$

По предложению 1 полная целочисленная решетка, порожденная векторами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, обладает неотрицательным базисом. Целочисленную матрицу перехода к этому неотрицательному базису обозначим через Z . Тогда из соотношения (1) получаем, что система векторов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, определяемая равенствами

$$\begin{pmatrix} \vec{\gamma}_1 \\ \vec{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \vec{\gamma}_n \end{pmatrix} = Z \cdot \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix} = Z \cdot \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1 \\ \vec{\beta}_2 \\ \vdots \\ \vec{\beta}_n \end{pmatrix} \cdot H = Z \cdot B \cdot H,$$

является неотрицательным базисом решетки L , поскольку матрица Z — обратимая и целочисленная, а $Z \cdot B$ и H — неотрицательные матрицы.

Следует отметить, что не все решетки обладают неотрицательным базисом. Например, группа, порожденная $n - 1$ векторами

$$\langle (1, -1, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1) \rangle_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^n,$$

не порождается даже множеством всех своих неотрицательных элементов. Следующая теорема устанавливает прямую связь между этими двумя свойствами.

Предложение 2. Если решетка $L \subset \mathbb{R}^n$ порождается множеством всех своих неотрицательных векторов, то она имеет неотрицательный базис.

Доказательство. Из условия несложно понять, что у группы L существует конечная система образующих $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, состоящая из неотрицательных векторов (достаточно выбрать множество неотрицательных векторов, порождающих некоторый базис группы L). Пусть $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ — наибольшая линейно независимая подсистема векторов. Тогда выполняются некоторые целочисленные соотношения:

$$\begin{aligned} c_{i_1 1} \alpha_{i_1} + \dots + c_{i_k 1} \alpha_{i_k} &= d_1 \alpha_1, \\ c_{i_1 2} \alpha_{i_1} + \dots + c_{i_k 2} \alpha_{i_k} &= d_2 \alpha_2, \\ &\dots \\ c_{i_1 m} \alpha_{i_1} + \dots + c_{i_k m} \alpha_{i_k} &= d_m \alpha_m. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему неотрицательных векторов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}^n$, определенную следующим образом:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_{i_1}}{|d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_m|}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_{i_2}}{|d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_m|}, \quad \dots, \quad \gamma_k = \frac{\alpha_{i_k}}{|d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_m|}.$$

Нетрудно видеть, что каждый вектор из системы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ является целочисленной линейной комбинацией неотрицательных векторов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, а значит, и каждый вектор решетки L является целочисленной линейной комбинацией неотрицательных векторов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$. Таким образом, L — подгруппа свободной абелевой группы $\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \rangle_{\mathbb{Z}}$, и при этом их ранги совпадают.

При естественном изоморфизме свободных абелевых групп

$$\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \rangle_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}^k : \gamma_i \mapsto (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

образ решетки L является полной решеткой в $\mathbb{Z}^k$, и по предложению 1 обладает неотрицательным базисом:

$$(b_{11}, \dots, b_{1k}), (b_{21}, \dots, b_{2k}), \dots, (b_{k1}, \dots, b_{kk}).$$

Из свойств изоморфизма следует, что неотрицательная система векторов

$$\begin{aligned} b_{11} \gamma_1 + b_{12} \gamma_2 + \dots + b_{1k} \gamma_k, \\ b_{21} \gamma_1 + b_{22} \gamma_2 + \dots + b_{2k} \gamma_k, \\ \dots \\ b_{k1} \gamma_1 + b_{k2} \gamma_2 + \dots + b_{kk} \gamma_k, \end{aligned}$$

является базисом L .

Следствие 2. Решетка $L \subset \mathbb{R}^n$ имеет неотрицательный базис тогда и только тогда, когда она порождается множеством всех своих неотрицательных векторов.

3. Базис решетки из выпуклого конуса

Подмножество M в $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если $(1-a)\alpha + a\beta \in M$ для любых $\alpha \in M, \beta \in M$ и $0 < a < 1$. Важный пример выпуклых множеств — полупространства. Для ненулевого элемента $\beta \in \mathbb{R}^n$ и любого $b \in \mathbb{R}$ множества

$$\{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid (\alpha, \beta) \geq b\}, \quad \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid (\alpha, \beta) \leq b\}$$

называются *замкнутыми полупространствами*. Множества

$$\{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid (\alpha, \beta) > b\}, \quad \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid (\alpha, \beta) < b\}$$

называются *открытыми полупространствами*. Легко проверить, что пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло. Следовательно, множество

$$\{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid (\alpha, \beta_i) \geq b_i \quad \forall i \in I\}$$

тоже является выпуклым. Множество, которое может быть представлено как пересечение конечного числа полупространств в $\mathbb{R}^n$, называется *полиэдральным выпуклым множеством*, или *выпуклым полиэдром*. Иногда, для удобства, конечную систему неравенств, задающих выпуклый полиэдр, будем записывать в матричной форме: $(x_1, x_2, \dots, x_n)B_{n \times m} \geq (b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Размерностью выпуклого множества M называется размерность его аффинной оболочки — минимального линейного многообразия, содержащего множество M . Напомним, что размерностью многообразия считается размерность параллельного ему подпространства.

Рассмотрим важный класс выпуклых множеств, обладающих свойством неограниченности. Подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *конусом*, если оно замкнуто относительно умножения на неотрицательные числа, иначе говоря, $a\alpha \in K$ для всех $\alpha \in K$ и $a \geq 0$. Такое множество есть объединение лучей, выходящих из начала координат. Конус не обязательно "заострен", например, всякое подпространство в $\mathbb{R}^n$ есть конус, открытое и замкнутое полупространства также являются конусами. *Выпуклый конус* — это конус, являющийся выпуклым множеством. Два наиболее важных выпуклых конуса — это *неотрицательный ортант* в $\mathbb{R}^n$:

$$\{\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0\},$$

и *положительный ортант* в $\mathbb{R}^n$:

$$\{\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0\}.$$

Легко проверяется, что пересечение любого числа выпуклых конусов является выпуклым конусом. Следовательно множество

$$\{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid (\alpha, \beta_i) \geq 0, \quad i \in I\}$$

есть выпуклый конус.

Пересечение всех выпуклых конусов, содержащих заданное множество S , называется *выпуклым конусом, порожденным S* , и обозначается $\text{cone } S$. Если множество S конечно, то $\text{cone } S$ называется *конечнопорожденным выпуклым конусом* с системой образующих S . Приведем без доказательства интересный результат, который будет использован в дальнейшем.

Теорема 2 [4; с. 188]. *Конечнопорожденный выпуклый конус K является выпуклым полиэдром, то есть задается конечной системой линейных неравенств.*

В предыдущем разделе было доказано, что любая полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет неотрицательный базис. Другими словами, любая полная решетка в $\mathbb{R}^n$ имеет базис в простейшем выпуклом конусе — неотрицательном n -мерном ортанте. Данный результат можно обобщить следующим образом.

Теорема 3. *Полная решетка $L \subset \mathbb{R}^n$ имеет базис в произвольном выпуклом конусе размерности n .*

Доказательство. Пусть K — выпуклый конус размерности n . Тогда, по определению, существует система линейно независимых векторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что решетка L имеет базис в выпуклом множестве $\text{cone}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset K$. Как было отмечено ранее, множество $\text{cone}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ является полиэдральным и может быть задано системой линейных неравенств $(x_1, x_2, \dots, x_n)B_{n \times n} \geq (0, 0, \dots, 0)$, где B — невырожденная матрица ([4]).

Несложно понять, что невырожденное линейное преобразование $\mathbb{R}^n$, определенное по правилу

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)B,$$

задает естественный изоморфизм решеток L и $L_B = \{\alpha B \mid \alpha \in L\}$. Значит ранг группы L_B равен n , и по теореме 1 у нее существует неотрицательный базис, который, в силу изоморфизма решеток, имеет вид $\gamma_1 B, \gamma_2 B, \dots, \gamma_n B$, где $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — некоторый базис L . Легко видеть, что указанный базис группы L удовлетворяет системе неравенств $(x_1, x_2, \dots, x_n)B_{n \times n} \geq (0, 0, \dots, 0)$, а значит, содержится в $\text{cone}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset K$.

Следствие 3. *Полная решетка $L \subset \mathbb{R}^n$ имеет положительный базис.*

Теорема 3 обладает интересной геометрической интерпретацией. Ее формулировку можно трактовать следующим образом: полная решетка обладает фундаментальным параллелепипедом в любом конусе максимальной размерности. Так как конус можно выбрать в любом «направлении» и сколь угодно «узким», то можно считать, что полная решетка обладает сколь угодно «узким» фундаментальным параллелепипедом в любом «направлении». При этом, как известно, объем фундаментального параллелепипеда решетки — величина, не зависящая от выбора базиса.

Предложение 3. *Если решетка $L \subset \mathbb{R}^n$ порождается множеством своих элементов из некоторого выпуклого конуса K , то она имеет базис в K .*

Доказательство. Пусть k — размерность решетки L . Рассмотрим произвольное линейное отображение $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, при котором образом решетки L является полная решетка $\mathbb{Z}^k$. Несложно понять, что образом выпуклого конуса K при линейном отображении φ будет тоже выпуклый конус $\varphi(K)$. При этом, поскольку K содержит систему образующих решетки L , конус $\varphi(K)$ содержит систему образующих решетки $\mathbb{Z}^k$, и значит, его размерность равна k .

По теореме 3 решетка $\mathbb{Z}^k$ обладает базисом в выпуклом конусе $\varphi(K)$:

$$\varphi(\gamma_1), \varphi(\gamma_2), \dots, \varphi(\gamma_k),$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in K$. Очевидно, что φ задает изоморфизм свободных групп L и $\mathbb{Z}^k$, а значит $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in K$ — искомый базис решетки L .

Следствие 4. *Решетка имеет базис в выпуклом конусе в том и только в том случае, когда она порождается своими элементами из этого конуса.*

Для $M \subset \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}^n$ сдвигом, или транслятом множества M на вектор α (короче, α -транслянтом множества M) называется множество

$$M + \alpha = \{\mu + \alpha \mid \mu \in M\}.$$

Легко видеть, что транслянт выпуклого множества есть снова выпуклое множество, притом такой же размерности.

Теорема 4. *Полная решетка $L \subset \mathbb{R}^n$ имеет базис в любом транслянте выпуклого конуса размерности n .*

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый конус размерности n , а $\alpha + K$, $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, — его произвольный сдвиг. В доказательстве теоремы 3 было построено полиэдральное множество $C \subset K$, которое определяется системой линейных неравенств

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)B_{n \times n} \geq (0, 0, \dots, 0), \quad B \in \mathbb{R}_{n,n}^*, \quad (2)$$

и указан базис $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ решетки L , содержащийся в C .

Несложно проверить, что α -транслянт множества C также является полиэдральным множеством и при этом задается системой линейных неравенств

$$(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)B_{n \times n} \geq (0, 0, \dots, 0),$$

или, что равносильно

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)B_{n \times n} \geq (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (3)$$

где $(c_1, c_2, \dots, c_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)B$.

Таким образом, для доказательства текущей теоремы достаточно будет показать, что у решетки L существует базис, содержащийся в множестве $\alpha + C \subset \alpha + K$.

Пусть i — наименьший номер неравенства в системе (3), которому не удовлетворяет хотя бы один из векторов базиса $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. При этом каждый вектор из указанного базиса удовлетворяет i -му неравенству системы (2), и найдется хотя бы один вектор γ_j , для которого i -е неравенство системы (2) выполняется строго: $(\gamma_j, (b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ni})) = d > 0$ (в противном случае i -е неравенство будет тривиальным, а матрица B — вырожденной). Тогда в базисе

$$\gamma_1 + \lceil \frac{c_i}{d} \rceil \gamma_j, \dots, \gamma_{j-1} + \lceil \frac{c_i}{d} \rceil \gamma_j, \gamma_j, \gamma_{j+1} + \lceil \frac{c_i}{d} \rceil \gamma_j, \dots, \gamma_n + \lceil \frac{c_i}{d} \rceil \gamma_j$$

для каждого вектора, кроме быть может γ_j , гарантированно выполняется i -е неравенство системы (3). А в базисе

$$\gamma_1 + \lceil \frac{c_i}{d} \rceil \gamma_j, \dots, \gamma_{j-1} + \lceil \frac{c_i}{d} \rceil \gamma_j, \gamma_{j-1} + (\lceil \frac{c_i}{d} \rceil + 1) \gamma_j, \gamma_{j+1} + \lceil \frac{c_i}{d} \rceil \gamma_j, \dots, \gamma_n + \lceil \frac{c_i}{d} \rceil \gamma_j$$

вообще для каждого вектора выполняется i -е неравенство системы (3). При этом, если все векторы исходного базиса $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ удовлетворяют некоторому неравенству из системы (3), то и все векторы нового базиса (как натуральные линейные комбинации векторов исходного) также будут удовлетворять этому неравенству.

Таким образом, итеративно применив описанные выше действия к каждому неравенству системы (3), мы получим базис $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_n^*$ решетки L , удовлетворяющий системе неравенств (3), то есть содержащийся в α -транслянте C .

Следует отметить, что предложение 3 и следствие 4, в отличие от теоремы 3, не обобщаются на случай произвольного сдвига выпуклого конуса, поскольку пересечение произвольной решетки с транслянтом конуса, вообще говоря, может быть конечным множеством. А из конечной системы образующих решетки не всегда можно выделить ее базис.

Автор признателен А. А. Нечаеву за поставленную первоначальную задачу.

Список литературы

1. Kurakin V. L., Kuzmin A. S., Mikhalev A. V., Nechaev A. A., "Linear recurring sequences over rings and modules.", *J. Math. Sciences*, **76**:6 (1995), 2793–2915.
2. Кузьмин А. С., Куракин В. Л., Нечаев А. А., "Псевдослучайные и полилинейные последовательности.", *Труды по дискретной математике*, **1** (1997), 139–202.
3. М. М. Глухов, И. А. Круглов, А. Б. Пичкур, А. В. Черемушкин, *Введение в теоретико-числовые методы криптографии*, Лань, СПб., 2011, 394 с.
4. Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ.*, Мир, Москва, 1973, 472 с.

Статья поступила 15.01.2014.