Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Чистяков, Об асимптотической нормальности числа пустых ячеек в одной схеме размещения частиц комплектами, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 3, 136–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:30:23

Об асимптотической нормальности числа пустых ячеек в одной схеме размещения частиц комплектами

© 2014 г. В. П. Чистяков*

Рассматривается схема m -зависимого размещения по ячейкам неравновероятных комплектов частиц. Предполагается, что число комплектов и число ячеек стремятся к бесконечности и имеют одинаковый порядок. Получены асимптотические формулы для математического ожидания и дисперсии, а также достаточные условия асимптотической нормальности числа пустых ячеек в этой схеме.

Ключевые слова: m -зависимые последовательности, размещения комплектов, асимптотическая нормальность, число пустых ячеек.

1. Постановка задачи

В классической постановке задачи о размещении частиц комплектами считается, что имеется N ячеек, в которые независимо бросают n комплектов по v частиц в каждом. При этом предполагается, что частицы одного комплекта попадают в разные ячейки и все C_N^v размещений частиц каждого комплекта равновероятны. Эта схема рассматривалась многими авторами (см. [1], гл. VII; [2]). Рассматривались также различные обобщения равновероятной схемы: равновероятная схема с комплектами разных размеров ([11]), схемы независимого размещения неравновероятных комплектов (см., например, [3]) и т. д. Схемы независимого размещения комплектов случайного объема использовались при исследовании числа решений некоторых систем случайных уравнений ([9, 10]).

Рассмотрим следующую схему m -зависимого размещения частиц комплектами. Обозначим $\mathcal{M}$ множество всех подмножеств по v элементов множества $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$:

$$\mathcal{M} = \{I = (i_1, \dots, i_v) : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_v \leq N\}.$$

Пусть

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_t, \dots, \quad Z_t \in \mathcal{M} \text{ для каждого } t \geq 1, \quad (1)$$

— такая стационарная последовательность m -зависимых случайных подмножеств $I \in \mathcal{M}$, что наборы $(Z_{s-u_1}, \dots, Z_s)$ и $(Z_t, \dots, Z_{t+u_2})$ независимы при любых u_1, u_2, s, t , для которых $t - s > m$.

*Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
e-mail: vpchist@mi.ras.ru

Случайная величина $\mu_0 = \mu_0(n, N)$, равная числу ячеек, оставшихся пустыми после размещения по N ячейкам частиц $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ n комплектов, выражается равенством

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^N \chi(Z_1 \notin K_i, Z_2 \notin K_i, \dots, Z_n \notin K_i),$$

где $\chi(C)$ — индикатор события C , $K_i = \{I : I \in \mathcal{M}, i \in I\}$. В данной работе получены достаточные условия асимптотической нормальности $\mu_0(n, N)$ и асимптотические формулы для $\mathbf{E}\mu_0$, $\mathbf{E}\mu_0^{[2]}$ ($\mu_0^{[2]} = \mu_0(\mu_0 - 1)$), $\mathbf{D}\mu_0$ в предположении, что $n, N \rightarrow \infty$,

$$\frac{n}{N} = \alpha_N, \quad 0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_N \leq \bar{\alpha} < \infty, \quad (2)$$

и совместное распределение случайных множеств $Z_1, \dots, Z_n$ меняется так, что при любых $t_1 < \dots < t_l$ и любых $I_1, \dots, I_l \in \mathcal{M}$

$$0 < \underline{c}^l \leq M^l \mathbf{P}(Z_{t_1} = I_1, \dots, Z_{t_l} = I_l) \leq \bar{c}^l, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \underline{c}, \bar{c}$ — некоторые постоянные, $M = |\mathcal{M}| = C_N^v$.

Приведем пример m -зависимых величин (1), для которых выполняется условие (3). Пусть

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_t, \dots \quad (4)$$

— стационарная последовательность независимых случайных элементов множества $\mathcal{M}$. Положим

$$\mathbf{P}\{\zeta_t = I_u\} = p_u, \quad u = 0, 1, \dots, M-1, \quad t \geq 1.$$

Перенумеруем каким-либо образом элементы множества $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \{I = (i_1, \dots, i_v) : 1 \leq i_1 < \dots < i_v \leq N\} = \{I_0, I_1, \dots, I_{M-1}\}.$$

Суммой $I_{k_1} \oplus I_{k_2}$ двух элементов I_{k_1} и I_{k_2} назовем элемент I_k , где $k = k_1 + k_2 \bmod M$. Тогда последовательность

$$Z_t = \zeta_t \oplus \zeta_{t+1} \oplus \dots \oplus \zeta_{t+m}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

является последовательностью m -зависимых множеств. Если

$$0 < c_0 \leq M p_u \leq c_1 < \infty, \quad u = 0, 1, \dots, M-1, \quad (6)$$

где c_0, c_1 — некоторые постоянные, то для последовательности (5) выполняется условие (3).

2. Асимптотические формулы для моментов

Покажем, что неравенства вида (3) выполняются для последовательностей

$$\chi_i(1), \dots, \chi_i(n); \quad \chi_{ij}(1), \dots, \chi_{ij}(n), \quad i, j \in \mathcal{N},$$

где $\chi_i(t) = \chi\{Z_t \in K_i\}$, $\chi_{ij}(t) = \chi(Z_t \in K_i \cup K_j)$.

Лемма 1. Если выполняется условие (3), то при любых $t_1, \dots, t_l$ и любых $i, j \in \mathcal{N}$

$$0 < \underline{c}_1^l \leq N^l \mathbf{E}\chi_i(t_1) \dots \chi_i(t_l) \leq \bar{c}_1^l, \quad 0 < \underline{c}_2^l \leq N^l \mathbf{E}\chi_{ij}(t_1) \dots \chi_{ij}(t_l) \leq \bar{c}_2^l,$$

где $l = 1, 2, \dots$, $a, \underline{c}_1, \bar{c}_1, \underline{c}_2, \bar{c}_2$ — некоторые постоянные.

Доказательство. Для элементов множеств K_i и $K_i \cup K_j$ введем обозначения

$$K_i = \{I_1^{(i)}, \dots, I_{|K_i|}^{(i)}\}, \quad K_i \cup K_j = \{I_1^{(i,j)}, \dots, I_{|K_i \cup K_j|}^{(i,j)}\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$|K_i| = C_{N-1}^{v-1}, \quad |K_i \cap K_j| = C_{N-2}^{v-2}, \quad |K_i \cup K_j| = 2C_{N-1}^{v-1} - C_{N-2}^{v-2}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\chi_i(t_1) \dots \chi_i(t_l) &= \\ &= \sum_{u_1, \dots, u_l=1}^{|K_i|} \mathbf{P} \left(Z_{t_1} = I_{u_1}^{(i)}, \dots, Z_{t_l} = I_{u_l}^{(i)} \right) \leq |K_i|^l \left(\frac{\bar{c}}{M} \right)^l = \frac{(v\bar{c})^l}{N^l}, \\ \mathbf{E}\chi_{ij}(t_1) \dots \chi_{ij}(t_l) &= \sum_{u_1, \dots, u_l=1}^{|K_i \cup K_j|} \mathbf{P} \left(Z_{t_1} = I_{u_1}^{(i,j)}, \dots, Z_{t_l} = I_{u_l}^{(i,j)} \right) \leq \\ &\leq |K_i \cup K_j|^l \left(\frac{\bar{c}}{M} \right)^l \leq \frac{(2v\bar{c})^l}{N^l}. \end{aligned}$$

Аналогично получаются нижние оценки.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_i &= N\mathbf{E}\chi_i(t), \quad a_{ij} = N\mathbf{E}\chi_{ij}(t), \quad a_{ij}^* = N^2\mathbf{P}(Z_t \in K_i \cap K_j), \\ b_{ij}(u) &= N^2\mathbf{E}\chi_i(t)\chi_j(t+u), \quad b_{ij} = \sum_{u=1}^m b_{ij}(u), \\ B_{ij}(u) &= N^2\mathbf{E}\chi_{ij}(t)\chi_{ij}(t+u), \quad B_{ij} = \sum_{u=1}^m B_{ij}(u). \end{aligned} \tag{7}$$

Лемма 2. В схеме серий (2) – (3) при любых $i, j \in \mathcal{N}$, $u = 1, \dots, m$,

$$\underline{a} \leq a_i \leq \bar{a}, \quad \underline{a} \leq a_{ij} \leq \bar{a}, \quad \underline{a} \leq b_{ij} \leq \bar{a}, \tag{8}$$

$$a_{ij} = a_i + a_j - \frac{1}{N}a_{ij}^*,$$

$$B_{ij}(u) = b_{ii}(u) + b_{ij}(u) + b_{ji}(u) + b_{jj}(u) + O\left(\frac{1}{N}\right), \tag{9}$$

$$B_{ij} = b_{ii} + b_{ij} + b_{ji} + b_{jj} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

где $\bar{a}, \underline{a}$, $0 < \underline{a} < \bar{a}$, – некоторые постоянные.

Доказательство. Неравенства (8) следуют из леммы 1. Из равенства

$$\mathbf{E}\chi_{ij}(t) = \mathbf{E}\chi_i(t) + \mathbf{E}\chi_j(t) - \mathbf{P}(Z_t \in K_i \cap K_j)$$

следует равенство (9) для a_{ij} .

Представим $\chi_{ij}(t)\chi_{ij}(t+u)$ в виде

$$\mathbf{E}\chi_{ij}(t)\chi_{ij}(t+u) = \mathbf{P}(D_1) + \mathbf{P}(D_2) - \mathbf{P}(D_1 \cap D_2 \cap D), \tag{10}$$

где $D = (Z_{t+u} \in K_i) \cup (Z_{t+u} \in K_j)$,

$$D_1 = (Z_t \in K_i) \cap D, \quad D_2 = (Z_t \in K_j) \cap D.$$

Аналогично доказательству леммы 1 получим

$$\mathbf{P}(Z_t \in K_i \cap K_j \cap D) \leq \frac{C}{N^3},$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Вероятность $\mathbf{P}(D_1)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(D_1) &= \mathbf{P}(Z_t \in K_i, Z_{t+u} \in K_i) + \mathbf{P}(Z_t \in K_i, Z_{t+u} \in K_j) - \\ &\quad - \mathbf{P}((Z_t \in K_i) \cap (Z_{t+u} \in K_i \cap K_j)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{P}(D_1) = \frac{b_{ii}(u)}{N^2} + \frac{b_{ij}(u)}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

Точно так же оценивается вероятность $\mathbf{P}(D_2)$.

Из полученных равенств следуют утверждения для $B_{ij}(u)$ и B_{ij} . Лемма доказана.

Теорема 1. При $n, N \rightarrow \infty$ и некотором $\delta, 0 < \delta < 1$, в схеме серий (2) – (3)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0(n, N) &= NM_0 - \frac{1}{2}\alpha_N(2m+1)M_2 + \alpha_N M^* + O\left(\frac{1}{N^\delta}\right), \\ \mathbf{E}\mu_0^{[2]}(n, N) &= N^2 M_0 - N \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-2\alpha_N a_i} \right) - \\ &\quad - N\alpha_N(2m+1)(M_0 M_2 + M_1^2) + N\alpha_N \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^* e^{-\alpha_N(a_i+a_j)} \right) + \\ &\quad + 2\alpha_N N \left(M_0 M^* + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N b_{ij} e^{-\alpha_N(a_i+a_j)} \right) + O(N^\delta), \end{aligned}$$

где a_i, b_{ij}, a_{ij}^* определены равенствами (7),

$$M_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i^k e^{-\alpha_N a_i}, \quad k = 0, 1, 2, \quad M^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b_{ii} e^{-\alpha_N a_i}. \quad (11)$$

Доказательство теоремы. Используя равенство

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^N (1 - \chi_i(1))(1 - \chi_i(2)) \dots (1 - \chi_i(n)), \quad (12)$$

получаем

$$\mu_0(n, N) = \sum_{l=0}^n \sum_{t(l) \in T(l)} \xi_l(t(l)), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_i(t) &= \chi(Z_t \in A_i), \quad t(l) = (t_1, \dots, t_l), \\ T(l) &= \{t(l) : 1 \leq t_1 < \dots < t_l \leq n\}, \quad l \geq 1, \\ \xi_l(t(l)) &= (-1)^l \sum_{i=1}^N \chi(Z_{t_1} \in A_i, \dots, Z_{t_l} \in A_i). \end{aligned} \quad (14)$$

Так же, как и в работе [4], используя формулы включения – исключения, представим $\mathbf{E}\mu_0$, $\mathbf{E}\mu_0^{[2]}$ в виде

$$\mathbf{E}\mu_0 = \sum_{i=1}^N P_i, \quad \mathbf{E}\mu_0^{[2]} = \sum_{i \neq j} P_{ij}, \quad (15)$$

где при любом φ , $1 \leq \varphi < N$,

$$\begin{aligned} P_i &= P_i(\varphi) + Q_i(\varphi), P_{ij} = P_{ij}(\varphi) + Q_{ij}(\varphi), \\ P_i(\varphi) &= \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l S_l(i), \quad P_{ij}(\varphi) = \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l S_l(i, j), \\ S_l(i) &= \sum_{t(l) \in T(l)} \mathbf{E}(\chi_i(t_1) \dots \chi_i(t_l)), \quad l \geq 1, \quad S_0(i) = 1, \\ S_l(i, j) &= \sum_{t(l) \in T(l)} \mathbf{E}(\chi_{ij}(t_1) \dots \chi_{ij}(t_l)), \quad S_0(i, j) = 1, \quad i \neq j, \\ |Q_i(\varphi)| &\leq S_\varphi(i), \quad |Q_{ij}(\varphi)| \leq S_\varphi(i, j). \end{aligned} \quad (16)$$

Из этих формул получим следующие представления для моментов:

$$\mathbf{E}\mu_0 = \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l A_l + \tilde{A}_n, \quad \mathbf{E}\mu_0^{[2]} = \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l B_l + \tilde{B}_n, \quad (17)$$

где

$$A_l = \sum_{i=1}^N S_l(i), \quad B_l = \sum_{i \neq j} S_l(i, j), \quad |\tilde{A}_n| \leq A_\varphi, \quad |\tilde{B}_n| \leq B_\varphi. \quad (18)$$

Положим

$$\tau(t) = (t, t+1, \dots, t+m).$$

Множество $T(l)$, определяемое равенством (2), представим в виде объединения трех непересекающихся множеств:

$$T(l) = T_1(l) \cup T_2(l) \cup T_3(l), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} T_1(l) &= \{t(l) : \tau(t_{u_1}) \cap \tau(t_{u_2}) = \emptyset \text{ при любых } u_1 \neq u_2, u_1, u_2 = 1, \dots, l\}, \\ T_2(l) &= \{t(l) : \text{среди } \tau(t_1), \dots, \tau(t_l) \text{ ровно одна пара множеств пересекается}\}, \\ T_3(l) &= T(l) \setminus (T_1(l) \cup T_2(l)). \end{aligned} \quad (20)$$

Так же, как в работах [4], [5], разобьем суммы $S_l(i)$, $S_l(i, j)$ на три части,

$$S_l(i) = S_l^{(1)}(i) + S_l^{(2)}(i) + S_l^{(3)}(i), \quad S_l(i, j) = S_l^{(1)}(i, j) + S_l^{(2)}(i, j) + S_l^{(3)}(i, j),$$

соответствующие разбиениям (19). Отметим, что

$$S_0^{(1)}(i) = S_0^{(1)}(i, j) = 1, \quad S_0^{(u)}(i) = S_0^{(u)}(i, j) = 0, \quad u = 2, 3.$$

Подставив в (18) эти разбиения сумм, представим величины A_l , B_l в виде сумм трех слагаемых каждую:

$$A_l = A_l^{(1)} + A_l^{(2)} + A_l^{(3)}, \quad B_l = B_l^{(1)} + B_l^{(2)} + B_l^{(3)}.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично доказательствам из работ [4], [5]. Отметим изменения, которые нужно внести в доказательства асимптотических формул, приведенные в работе [5]. Необходимо вычислить оценки величин

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\chi_i(t_1) \dots \chi_i(t_l) &= \mathbf{P}(Z_{t_1} \in K_i, \dots, Z_{t_l} \in K_i), \\ \mathbf{E}\chi_{ij}(t_1) \dots \chi_{ij}(t_l) &= \mathbf{P}(Z_{t_1} \in K_i \cup K_j, \dots, Z_{t_l} \in K_i \cup K_j), \end{aligned}$$

которые входят в суммы (16). Если $t(l) \in T_1(l)$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\chi_i(t_1) \dots \chi_i(t_l) &= \left(\frac{a_i}{N}\right)^l, \\ \mathbf{E}\chi_{ij}(t_1) \dots \chi_{ij}(t_l) &= \left(\frac{a_i + a_j - \frac{1}{N}a_{ij}^*}{N}\right)^l. \end{aligned}$$

При

$$t(l) \in T_2^{(u)}(l, k, n) = \{t(l) : t(l) \in T_l, \quad t_{k+1} - t_k = u, \quad t_{k_1+1} - t_{k_1} \geq m+1, \quad k_1 \neq k\}$$

нужно воспользоваться следующими из леммы 2 формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\chi_i(t)\chi_i(t+u) &= \frac{1}{N^2}b_i(u), \\ \mathbf{E}\chi_{ij}(t)\chi_{ij}(t+u) &= \frac{1}{N^2}(b_{ii}(u) + b_{ij}(u) + b_{ji}(u) + b_{jj}(u) + O(1/N)), \end{aligned}$$

$u = 1, \dots, m$, $i, j \in \mathcal{N}$. В случае $t(l) \in T_3(l)$ нужно воспользоваться леммой 1. Остальные выкладки мы опускаем. Теорема доказана.

Из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. При $n, N \rightarrow \infty$ в схеме серий (2) – (3)

$$\mathbf{D}\mu_0(n, N) = N\sigma_N^2(\alpha_N) + O(N^\delta), \quad 0 < \delta < 1,$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_N^2(\alpha_N) &= M_0 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-2\alpha_N a_i} - \alpha_N M_1^2 + \alpha_N \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^* e^{-\alpha_N(a_i+a_j)} \right) + \\ &\quad + 2\alpha_N \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N e^{-\alpha_N(a_i+a_j)} (b_{ij} - m a_i a_j) \right), \end{aligned}$$

а величины a_i , a_{ij}^* , b_{ij} , M_0 , M_1 определены равенствами (7), (11).

Если объём комплекта $v = 1$, то $a_{ij}^* = 0$, и из этой формулы для $\sigma_N^2(\alpha_N)$ получается формула (30) работы [5].

Для схемы независимых и равновероятных комплектов из [1], используя равенства $b_{ij} = m a_i a_j$, $a_i = v$, $a_{ij}^* = v(v-1)$, получаем формулу

$$\sigma_N^2(\alpha_N) = e^{-\alpha_N v} (1 - (1 + \alpha_N v) e^{-\alpha_N v}).$$

3. Асимптотическая нормальность

Для доказательства асимптотической нормальности $\mu_0(n, N)$ удобно воспользоваться теоремой 2 из [5]. Эта теорема является переформулировкой теоремы 2 работы В.Г. Михайлова [8], которая обобщает теорему 2 статьи С. Янсона [7].

Так же, как в [5], [6], полагаем

$$\varphi = \varphi_N = \left\lceil \frac{(1 + \delta) \ln N}{\ln \ln N} \right\rceil, \quad 0 < \delta < 1. \quad (21)$$

Случайную величину $\mu_0(n, N)$ представим, используя (13) и разбиение (19) множества $T(l)$, в виде

$$\mu_0(n, N) = \mu_1(N) + \mu_2(N) + \mu_3(N) + \Delta_\varphi,$$

где

$$\begin{aligned} \mu_u(N) &= \sum_{l=0}^{\varphi-1} \sum_{t(l) \in T_u(l)} \xi_l(t_1, \dots, t_l), \quad u = 1, 2, 3, \\ |\Delta_\varphi| &\leq \Delta_1(\varphi) + \Delta_2(\varphi) + \Delta_3(\varphi), \\ \Delta_u(l) &= \sum_{t(l) \in T_u(l)} |\xi_l(t_1, \dots, t_l)|. \end{aligned}$$

Так же, как в [6], проверяется, что в схеме серий (2) – (3) при $n, N \rightarrow \infty$ случайная величина $(\mu_0(n, N) - \mu_1(N)) / \sqrt{\mathbf{D}\mu_0}$ стремится к 0 по вероятности, если

$$\sigma_N^2(\alpha_N) \geq \varepsilon > 0. \quad (22)$$

Далее для величины $\mu_1(N)$ проверяются условия теоремы 2 из [5] и устанавливается асимптотическая нормальность $\mu_1(N)$, а следовательно, и $\mu_0(n, N)$. При проверке условий теоремы 2 из [5] используется лемма 1. Рассуждения, проводимые по этой схеме, приводят к следующей теореме об асимптотической нормальности величины $\mu_0(n, N)$, определенной по последовательности (1).

Теорема 2. Если в схеме серий (2) – (3) выполнено условие (22), то при $n, N \rightarrow \infty$ распределение случайной величины

$$(\mu_0(n, N) - E\mu_0(n, N)) / \sqrt{\mathbf{D}\mu_0(n, N)}$$

сходится к стандартному нормальному распределению.

Замечание. В случае, когда объем комплекта равен единице ($v = 1$), утверждение теоремы 2 превращается в теорему 3 работы [5].

Автор признателен рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., *Случайные размещения*, Наука, Москва, 1976.
2. Михайлов В.Г., “Сходимость к многомерному нормальному закону в равновероятной схеме размещения частиц комплектами”, *Матем. сб.*, **111(153)**:2 (1980), 163-186.

3. Жуков Е.А., Чистяков В.П., “О схемах размещения комплектов, аппроксимируемых полиномиальной схемой.”, *Матем. заметки*, **25**:3 (1979), 455-463.
4. Тихомирова М.И., Чистяков В.П., “Об асимптотике моментов числа непооявившихся s-цепочек”, *Дискр. матем.*, **9** №1 (1997), 12-29.
5. Тихомирова М.И., Чистяков В.П., “Асимптотическая нормальность числа непооявившихся значений m -зависимых случайных величин”, *Матем. вопросы криптографии*, **2**:1 (2011), 119-129.
6. Тихомирова М.И., “Асимптотическая нормальность числа непооявившихся несплошных исходов независимых испытаний”, *Дискр. матем.*, **21**:2 (2009), 112-125.
7. Janson S., “Normal convergence by higher semi-invariants with applications to sums of dependent random variables and random graphs”, *Ann. Probab.*, **16**:1 (1988), 305-312.
8. Михайлов В.Г., “Об одной теореме Янсона”, *Теория вероятн. и примен.*, **36** (1991), 168-170.
9. Сачков В.Н., “Случайные неравновероятные покрытия и функциональные уравнения”, *Труды по дискретной математике*, **5** (2002), 205-218.
10. Михайлов В.Г., “Оценка точности пуассоновской аппроксимации для числа пустых ячеек при размещении частиц комплектами”, *Труды МИАН*, **282** (2013), 165-180.
11. Ватутин В. А., Михайлов В. Г., “Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами”, *Теория вероятн. и примен.*, **28**:4 (1982), 684-692.

Статья поступила 21.03.2014.