Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Щучкин, Строение конечных абелевых n -арных групп, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 3, 144–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:09:58

Строение конечных абелевых n -арных групп

© 2014 г. Н. А. Щучкин*

Приведено полное описание строения конечных абелевых n -арных групп в виде прямого произведения примарных абелевых полуциклических n -арных групп с точностью до изоморфизма.

Ключевые слова: квазигруппы, n -арные группы, структура групп.

1. Основные сведения из теории n -арных групп

Алгебру $\langle G, f \rangle$ с одной n -арной операцией f ($n \geq 3$) называют n -арной квазигруппой, если в ней для каждого $j = 1, \dots, n$ разрешимо и имеет единственное решение уравнение

$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) = b$$

при любых $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n, b$ из G . Частным случаем понятия n -арной квазигруппы является обобщение понятия группы на n -арный случай. Именно, n -арная квазигруппа $\langle G, f \rangle$ называется n -арной группой, если в ней выполняется обобщенный закон ассоциативности

$$f(f(a_1, \dots, a_n), a_{n+1}, \dots, a_{2n-1}) = f(a_1, \dots, a_i, f(a_{i+1}, \dots, a_{i+n}), a_{i+n+1}, \dots, a_{2n-1})$$

для всех $i = 1, \dots, n-1$ (см. стр. 52, [1]).

Если в n -арной группе для любой подстановки $\sigma \in S_n$ верны тождества

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

то она называется абелевой. Теория n -арных групп существенно отличается от теории групп, однако имеется тесная связь между группами и n -арными группами. В [2] показано, что на любой абелевой n -арной группе $\langle G, f \rangle$ можно определить абелеву группу $\text{red}_c \langle G, f \rangle$ с бинарной операцией $+$ по правилу: $a + b = f(a, \underbrace{c, \dots, c}_{n-3}, b)$,

где c — фиксированный элемент из G . Тогда

$$f(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n + d, \quad (1)$$

где $d = f(\underbrace{c, \dots, c}_n)$. Элемент c является нулем в группе $\text{red}_c \langle G, f \rangle$. Верно и обратное: в любой абелевой группе G для выбранного элемента d существует абелева n -арная

*Место работы: Волгоградский государственный социально-педагогический ун-т,
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

группа $\langle G, f \rangle = \text{abl}_d G$, где f действует по правилу (1). Кроме того, $\langle G, f \rangle = \text{abl}_d G$ тогда и только тогда, когда $G = \text{red}_0 \langle G, f \rangle$ и $d = \underbrace{f(0, \dots, 0)}_n$ (см. [2]).

Таким образом, абелевы n -арные группы и соответствующие им абелевы группы полиномиально эквивалентны. А поскольку у полиномиально эквивалентных алгебр совпадают решетки конгруэнций, то вопросы существования разложения в прямые произведения для них решаются тождественным образом. Ответы на эти вопросы могут отличаться лишь в плане единственности, так как за счет различного выбора констант d изоморфным группам могут быть полиномиально эквивалентны не изоморфные n -арные группы. При этом имеется критерий изоморфизма абелевых n -арных групп.

Теорема 1 (Следствие 17, [3]). *Изоморфизм n -арных групп $\langle G, f \rangle = \text{abl}_d G$ и $\langle G', f' \rangle = \text{abl}_{d'} G'$ существует тогда и только тогда, когда существуют такие изоморфизм σ из группы G в группу G' и элемент $u \in G'$, что*

$$\sigma(d) = (n-1)u + d'. \quad (2)$$

Как и в теории групп, конечную n -арную группу, порядок которой есть степень простого числа p , назовем n -арной p -группой. Если n -арная группа является n -арной p -группой для некоторого простого числа p , то она называется примарной.

Теорема 2 (Теорема 2, [4]). *Любая абелева n -арная группа $\langle G, f \rangle$, порядок которой равен $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ (p_i — простые числа), изоморфна прямому произведению*

$$\langle G_1, f_1 \rangle \times \langle G_2, f_2 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f_k \rangle$$

n -арных p_i -групп $\langle G_i, f_i \rangle$ порядков $p_i^{\alpha_i}$.

Разложение в теореме 2 определено однозначно (см. Теорема 3, [4]). Наша цель заключается в том, чтобы конечную абелеву n -арную группу представить в виде прямого произведения простейших n -арных групп, каковыми являются n -арные группы $\text{abl}_{la}(a)$, где (a) — циклическая группа (их еще называют абелевыми полудициклическими). Результаты, полученные ниже, дополняют сведения о строении конечных n -арных групп, приведенные в работах [5], [6].

2. Конечные примарные абелевы n -арные группы.

Согласно теореме 2 любая примарная абелева n -арная группа порядка p^m изоморфна прямому произведению k абелевых n -арных групп порядков p^{m_i} , где $m = m_1 + \dots + m_k$. В отличие от общего случая, примарная абелева полудициклическая n -арная группа не может быть изоморфна прямому произведению нескольких n -арных групп меньшего порядка (Предложение 13, [7]). Именно такие неразложимые абелевы n -арные группы служат компонентами прямого разложения примарной абелевой n -арной группы.

Теорема 3 (Теорема 8, [4]). *Каждая конечная абелева n -арная p -группа изоморфна прямому произведению абелевых полудициклических n -арных p -групп.*

Например, абелева тернарная ($n = 3$) группа $\text{abl}_{a+b} G$ порядка 16, где $G = (a) + (b)$ — прямая сумма циклических групп (a) и (b) порядков 8 и 2 соответственно, изоморфна прямому произведению $\text{abl}_a(a) \times \text{abl}_b(b)$ абелевых полудициклических n -арных

групп. Действительно, n -арная группа $abl_a(a) \times abl_b(b) = abl_{(a,b)}G$, где G — внешняя прямая сумма циклических групп (a) и (b) . Тожественный автоморфизм группы G будет изоморфизмом n -арных групп $abl_{a+b}G$ и $abl_a(a) \times abl_b(b)$.

В теории групп каждая абелева p -группа определяется однозначно с точностью до изоморфизма своими инвариантами $p^{m_1}, \dots, p^{m_t}$. Для n -арных групп это не так. Даже абелевы полуциклические n -арные группы одного и того же порядка могут быть не изоморфными. Известно (см. Лемма 1, [9]), что любые две n -арные группы $abl_{l_1 a}(a)$ и $abl_{l_2 a}(a)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(l_1, n-1, k) = \text{НОД}(l_2, n-1, k)$, где $|a| = k$. Отсюда следует, что количество различных (с точностью до изоморфизма) конечных абелевых полуциклических n -арных групп одного и того же порядка k равно количеству натуральных делителей $\tau(\text{НОД}(n-1, k))$ числа $\text{НОД}(n-1, k)$. Напрашивается гипотеза (по аналогии с теорией групп): прямое произведение

$$abl_{l_1 a_1}(a_1) \times \dots \times abl_{l_r a_r}(a_r), \quad (3)$$

абелевых полуциклических n -арных p -групп $abl_{l_i a_i}(a_i)$ однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется количеством прямых множителей в разложении (3) и изоморфными копиями множителей из (3). Однако это не так. Например, прямое произведение $abl_a(a) \times abl_b(b)$, где $|a| = 8$, $|b| = 2$, изоморфно прямому произведению $abl_a(a) \times abl_0(b)$. Действительно, $abl_a(a) \times abl_b(b) = abl_{a+b}G$, $abl_a(a) \times abl_0(b) = abl_a G$, где $G = (a) + (b)$ — прямая сумма циклических групп (a) и (b) . Имеется автоморфизм σ группы G , переводящий базис a, b в базис $a+b, b$. При таком автоморфизме верно равенство $\sigma(a+b) = a$, а значит, по теореме 1 имеем искомый изоморфизм. Однако вторые множители $abl_b(b)$ и $abl_0(b)$ не изоморфны (по Лемме 1 из [9]).

Для нахождения условий однозначности разложения (3) введем новое определение. Множители с равными порядками в разложении (3) расположим рядом, и такие подпрямые произведения расположим в порядке убывания порядков множителей, входящих в эти подпрямые произведения. Получим разложение

$$\prod_{i=1}^{r_1} abl_{l_{i1} a_{i1}}(a_{i1}) \times \prod_{i=1}^{r_2} abl_{l_{i2} a_{i2}}(a_{i2}) \times \dots \times \prod_{i=1}^{r_t} abl_{l_{it} a_{it}}(a_{it}), \quad (4)$$

и если $|a_{ij}| = p^{m_j}$ для $j = 1, \dots, t$ и каждого $i = 1, \dots, r_j$, то $m_1 > m_2 > \dots > m_t$. Для разложения (4) назовем определяющим набор $D_1, \dots, D_t$ наибольших общих делителей, заданных по правилу

$$\begin{cases} D_1 = \text{НОД}(d_1, p^{m_1-m_2} d_2, \dots, p^{m_1-m_t} d_t, p^{m_1}, n-1), \\ D_2 = \text{НОД}(d_1, d_2, p^{m_2-m_3} d_3, \dots, p^{m_2-m_t} d_t, p^{m_2}, n-1), \\ \dots \\ D_{t-1} = \text{НОД}(d_1, \dots, d_{t-1}, p^{m_{t-1}-m_t} d_t, p^{m_{t-1}}, n-1), \\ D_t = \text{НОД}(d_1, \dots, d_{t-1}, d_t, p^{m_t}, n-1), \end{cases} \quad (5)$$

где $d_j = \text{НОД}(l_{1j}, \dots, l_{r_j j})$ для всех $j = 1, \dots, t$. Теперь можно доказать теорему о единственности разложения конечной абелевой n -арной p -группы в прямое произведение абелевых полуциклических n -арных p -групп.

Теорема 4. Если конечная абелева n -арная p -группа $\langle G, f \rangle$ изоморфна двум прямым произведениям абелевых полуциклических n -арных p -групп: (3) и

$$abl_{l'_1 b_1}(b_1) \times \dots \times abl_{l'_s b_s}(b_s), \quad (6)$$

то $r = s$, порядки $|a_i|$ совпадают с порядками $|b_j|$ при некотором упорядочении последних и определяющие наборы наибольших общих делителей для разложений (3) и (6) одинаковы.

Доказательство. Заметим, что n -арная группа (3) равна $abl_d A$, где $A = \sum_{i=1}^r (a_i)$, $d = \sum_{i=1}^r l_i a_i$, а n -арная группа (6) равна $abl_{d'} B$, где $B = \sum_{i=1}^s (b_i)$, $d' = \sum_{i=1}^s l'_i b_i$. Группы A и B изоморфны (это следует из изоморфизма n -арных групп (3) и (6) по теореме 1). В силу единственности разложения конечной абелевой p -группы в прямое произведение циклических p -групп имеем $r = s$ и $|a_i| = |b_j|$ при соответствующей нумерации последних.

Для доказательства равенства определяющих наборов наибольших общих делителей n -арных групп (3) и (6) упорядочим разложения (3) в виде (4) и (6) следующим образом:

$$\prod_{i=1}^{r_1} abl_{l'_{i1} b_{i1}}(b_{i1}) \times \prod_{i=1}^{r_2} abl_{l'_{i2} b_{i2}}(b_{i2}) \times \dots \times \prod_{i=1}^{r_t} abl_{l'_{it} b_{it}}(b_{it}). \quad (7)$$

Требуется доказать, что выполняется система равенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{НОД}(d_1, p^{m_1-m_2} d_2, \dots, p^{m_1-m_t} d_t, p^{m_1}, n-1) = \\ = \text{НОД}(d'_1, p^{m_1-m_2} d'_2, \dots, p^{m_1-m_t} d'_t, p^{m_1}, n-1), \\ \text{НОД}(d_1, d_2, p^{m_2-m_3} d_3, \dots, p^{m_2-m_t} d_t, p^{m_2}, n-1) = \\ = \text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{m_2-m_3} d'_3, \dots, p^{m_2-m_t} d'_t, p^{m_2}, n-1), \\ \dots \\ \text{НОД}(d_1, \dots, d_{t-1}, p^{m_{t-1}-m_t} d_t, p^{m_{t-1}}, n-1) = \\ = \text{НОД}(d'_1, \dots, d'_{t-1}, p^{m_{t-1}-m_t} d'_t, p^{m_{t-1}}, n-1), \\ \text{НОД}(d_1, \dots, d_{t-1}, d_t, p^{m_t}, n-1) = \text{НОД}(d'_1, \dots, d'_{t-1}, d'_t, p^{m_t}, n-1), \end{array} \right. \quad (8)$$

где $d'_j = \text{НОД}(l'_{1j}, \dots, l'_{r_j j})$, для всех $j = 1, \dots, t$.

Согласно теореме 1 найдутся изоморфизм σ из A в B и элемент $u \in B$ такие, что верно (2), где $d = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} l_{ij} a_{ij}$, $d' = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} l'_{ij} b_{ij}$. Пусть $u = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} u_{ij} b_{ij}$. Элементы $c_{ij} = \sigma(a_{ij})$, где $i = 1, \dots, r_j$ при $j = 1, \dots, t$, будут базисом в группе B , а значит, имеется автоморфизм τ группы B , переводящий базисные элементы $b_{11}, \dots, b_{r_t t}$ в базис $c_{11}, \dots, c_{r_t t}$, т.е. $\tau(b_{ij}) = c_{ij}$. Тогда из (2) имеем

$$\sigma(d) = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} l_{ij} c_{ij} = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} ((n-1)u_{ij} + l'_{ij}) b_{ij},$$

кроме того,

$$\sigma(d) = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} l_{ij} c_{ij} = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} l_{ij} \tau(b_{ij}) = \tau\left(\sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} l_{ij} b_{ij}\right),$$

тогда $\tau\left(\sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} l_{ij} b_{ij}\right) = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} ((n-1)u_{ij} + l'_{ij}) b_{ij}$, а значит, элемент $\sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} l_{ij} b_{ij}$ лежит в орбите элемента $\sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} ((n-1)u_{ij} + l'_{ij}) b_{ij}$ при действии группы автоморфизмов $\text{Aut } B$ на B .

Лемма 1. Пусть $G = \sum_{s=1}^k G_s$ — прямая сумма абелевых p -групп G_s , где каждая группа $G_s = \sum_{i=1}^{n_s} (a_{is})$ — прямая сумма циклических групп (a_{is}) одного и того же порядка p^{α_s} и $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k$, p — простое число. Каждая орбита элемента

$\sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} a_{is}$ при действии группы автоморфизмов $\text{Aut } G$ на G состоит из всех элементов $\sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l_{is} a_{is}$, для которых

$$\begin{cases} \text{НОД}(d'_1, p^{\alpha_1-\alpha_2} d'_2, \dots, p^{\alpha_1-\alpha_k} d'_k, p^{\alpha_1}) = \text{НОД}(d_1, p^{\alpha_1-\alpha_2} d_2, \dots, p^{\alpha_1-\alpha_k} d_k, p^{\alpha_1}), \\ \text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{\alpha_2-\alpha_3} d'_3, \dots, p^{\alpha_2-\alpha_k} d'_k, p^{\alpha_2}) = \text{НОД}(d_1, d_2, p^{\alpha_2-\alpha_3} d_3, \dots, p^{\alpha_2-\alpha_k} d_k, p^{\alpha_2}), \\ \dots \\ \text{НОД}(d'_1, d'_2, \dots, d'_{k-1}, p^{\alpha_{k-1}-\alpha_k} d'_k, p^{\alpha_{k-1}}) = \text{НОД}(d_1, d_2, \dots, d_{k-1}, p^{\alpha_{k-1}-\alpha_k} d_k, p^{\alpha_{k-1}}), \\ \text{НОД}(d'_1, d'_2, \dots, d'_{k-1}, d'_k, p^{\alpha_k}) = \text{НОД}(d_1, d_2, \dots, d_{k-1}, d_k, p^{\alpha_k}), \end{cases} \quad (9)$$

где $d'_s = \text{НОД}(l'_{1s}, \dots, l'_{n_s s})$, $d_s = \text{НОД}(l_{1s}, \dots, l_{n_s s})$ для всех $s = 1, \dots, k$.

Доказательство леммы 1. Покажем вначале, что каждый элемент $\sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l_{is} a_{is}$, удовлетворяющий условию (9), принадлежит орбите элемента $\sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} a_{is}$ при действии группы автоморфизмов $\text{Aut } G$ на G . Для этого будем искать автоморфизм σ группы G , для которого $\sigma(\sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} a_{is}) = \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l_{is} a_{is}$.

Пусть в системе (9) правая и левая части s -го равенства равны p^{δ_s} ($s = 1, \dots, k$). Полагаем $l'_{ij} = p^{\beta_{ij}} m'_{ij}$, $l_{ij} = p^{\gamma_{ij}} m_{ij}$, где m'_{ij} и m_{ij} не делятся на p . Кроме того, пусть $d'_s = p^{\beta_s} q'_s$, $d_s = p^{\gamma_s} q_s$, где q'_s и q_s не делятся на p . Каждое число первого равенства из системы (9) делим на p^{δ_1} , получим два набора чисел

$$p^{\beta_1-\delta_1} q'_1, p^{\alpha_1-\alpha_2+\beta_2-\delta_1} q'_2, \dots, p^{\alpha_1-\alpha_k+\beta_k-\delta_1} q'_k \quad (10)$$

$$p^{\gamma_1-\delta_1} q_1, p^{\alpha_1-\alpha_2+\gamma_2-\delta_1} q_2, \dots, p^{\alpha_1-\alpha_k+\gamma_k-\delta_1} q_k \quad (11)$$

В последовательности чисел (10) есть числа, взаимно простые с p . Среди таких чисел выбираем крайнее справа, пусть это будет $q'_{t_1} = m'_{r_1 t_1}$, где $1 \leq t_1 \leq k$, $1 \leq r_1 \leq n_{t_1}$. Аналогично среди чисел последовательности (11) есть числа, взаимно простые с p . Среди таких чисел выбираем крайнее справа, пусть это будет q_{v_1} , где $1 \leq v_1 \leq k$. Кроме того, пусть $q_{v_1} = m_{u_1 v_1}$, где $1 \leq u_1 \leq n_{v_1}$. Покажем, что $t_1 = v_1$. От противного, пусть, например, $t_1 > v_1$. Тогда $\delta_1 = \alpha_1 - \alpha_{t_1} + \beta_{t_1}$ и δ_1 является наименьшим среди чисел

$$\beta_1, \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_1 - \alpha_k + \beta_k.$$

Заметим, что δ_2 — наименьшее число среди чисел

$$\beta_1, \beta_2, \alpha_2 - \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_2 - \alpha_k + \beta_k,$$

и так как $t_1 > 1$ (это следует из предположения $t_1 > v_1$), то δ_2 выбирается как наименьшее среди чисел $\beta_2, \alpha_2 - \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_2 - \alpha_k + \beta_k$, которые получаются соответственно из набора чисел $\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2, \alpha_1 - \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_1 - \alpha_k + \beta_k$ путем вычитания из каждого числа одного и того же числа $\alpha_1 - \alpha_2$, а значит, $\delta_2 = \alpha_2 - \alpha_{t_1} + \beta_{t_1}$. Аналогично, $\delta_3 = \alpha_3 - \alpha_{t_1} + \beta_{t_1}$, и так далее, $\delta_{t_1-1} = \alpha_{t_1-1} - \alpha_{t_1} + \beta_{t_1}$, $\delta_{t_1} = \beta_{t_1}$. Отсюда получим равенства

$$\delta_j = \alpha_j - \alpha_{j+1} + \delta_{j+1}, \quad j = 1, \dots, t_1 - 1. \quad (12)$$

Кроме того, δ_1 является наименьшим среди чисел $\gamma_1, \alpha_1 - \alpha_2 + \gamma_2, \dots, \alpha_1 - \alpha_k + \gamma_k$. Если $v_1 = 1$, то $\delta_1 = \gamma_1$ и по выбору q_{v_1} (крайнее справа) имеем

$$\gamma_1 < \alpha_1 - \alpha_j + \gamma_j, \quad j = 2, \dots, k. \quad (13)$$

Заметим также, что δ_2 — наименьшее число среди чисел $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_2 - \alpha_3 + \gamma_3, \dots, \alpha_2 - \alpha_k + \gamma_k$ и $\delta_2 < \gamma_1$, так как если бы $\delta_2 = \gamma_1$, то имели бы $\delta_2 = \delta_1$, чего не может быть (см. выше). Тогда δ_2 выбирается как минимум среди чисел $\gamma_2, \alpha_2 - \alpha_3 + \gamma_3, \dots, \alpha_2 - \alpha_k + \gamma_k$. Пусть $\delta_2 = \alpha_2 - \alpha_{w_1} + \gamma_{w_1}$, где $2 \leq w_1 \leq k$, тогда из (12) имеем $\gamma_1 = \delta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \delta_2 = \alpha_1 - \alpha_{w_1} + \gamma_{w_1}$ — противоречие с (13). Если же $v_1 > 1$, то $\delta_1 = \alpha_1 - \alpha_{v_1} + \gamma_{v_1}$, и вновь по выбору q_{v_1} (крайнее справа) имеем

$$\alpha_1 - \alpha_{v_1} + \gamma_{v_1} < \alpha_1 - \alpha_j + \gamma_j, \quad j = v_1 + 1, \dots, k. \quad (14)$$

Далее, как и выше, получим $\delta_2 = \alpha_2 - \alpha_{v_1} + \gamma_{v_1}, \delta_3 = \alpha_3 - \alpha_{v_1} + \gamma_{v_1}, \dots, \delta_{v_1-1} = \alpha_{v_1-1} - \alpha_{v_1} + \gamma_{v_1}, \delta_{v_1} = \gamma_{v_1}$. Заметим также, что δ_{v_1+1} — наименьшее число среди чисел

$$\gamma_1, \dots, \gamma_{v_1}, \gamma_{v_1+1}, \alpha_{v_1+1} - \alpha_{v_1+2} + \gamma_{v_1+2}, \dots, \alpha_{v_1+1} - \alpha_k + \gamma_k$$

и $\delta_{v_1+1} < \gamma_{v_1}$, так как если бы выполнялось равенство $\delta_{v_1+1} = \gamma_{v_1}$, то имели бы $\delta_{v_1+1} = \delta_{v_1}$, чего не может быть (см. выше). Тогда δ_{v_1+1} выбирается как минимум среди чисел

$$\gamma_{v_1+1}, \alpha_{v_1+1} - \alpha_{v_1+2} + \gamma_{v_1+2}, \dots, \alpha_{v_1+1} - \alpha_k + \gamma_k.$$

Полагаем $\delta_{v_1+1} = \alpha_{v_1+1} - \alpha_{w_1} + \gamma_{w_1}$, где $v_1 + 1 \leq w_1 \leq k$, тогда из (12) следует, что $\gamma_{v_1} = \delta_{v_1} = \alpha_{v_1} - \alpha_{v_1+1} + \delta_{v_1+1} = \alpha_{v_1} - \alpha_{w_1} + \gamma_{w_1}$ — противоречие с (14). Итак, мы доказали равенство $t_1 = v_1$.

Далее, каждое число равенства под номером $t_1 + 1$ из системы (9) делим на $p^{\delta_{t_1+1}}$, получим два набора чисел

$$p^{\beta_1 - \delta_{t_1+1}} q'_1, \dots, p^{\beta_{t_1+1} - \delta_{t_1+1}} q'_{t_1+1}, p^{\alpha_{t_1+1} - \alpha_{t_1+2} + \beta_{t_1+2} - \delta_{t_1+1}} q'_{t_1+2}, \dots, p^{\alpha_{t_1+1} - \alpha_k + \beta_k - \delta_{t_1+1}} q'_k, \quad (15)$$

$$p^{\gamma_1 - \delta_{t_1+1}} q_1, \dots, p^{\gamma_{t_1+1} - \delta_{t_1+1}} q_{t_1+1}, p^{\alpha_{t_1+1} - \alpha_{t_1+2} + \gamma_{t_1+2} - \delta_{t_1+1}} q_{t_1+2}, \dots, p^{\alpha_{t_1+1} - \alpha_k + \gamma_k - \delta_{t_1+1}} q_k. \quad (16)$$

В последовательности чисел (15) есть числа, взаимно простые с p . Среди таких чисел выбираем крайнее справа, пусть это будет q'_{t_2} , где $t_1 + 1 \leq t_2 \leq k$. Кроме того, пусть $q'_{t_2} = m'_{r_2 t_2}$. Аналогично среди чисел последовательности (16) есть числа, взаимно простые с p . Среди таких чисел выбираем крайнее справа, пусть это будет q_{v_2} , где $t_1 + 1 \leq v_2 \leq k$. Кроме того, пусть $q_{v_2} = m_{u_2 v_2}$, где $1 \leq u_2 \leq n_{v_2}$. Аналогично доказывается равенство $t_2 = v_2$.

Продолжая так двигаться дальше по системе равенств (9) сверху вниз, на некотором m -м шаге мы каждое число равенства под номером $t_{m-1} + 1$ из системы (9) делим на $p^{\delta_{t_{m-1}+1}}$, получая два набора чисел

$$p^{\beta_1 - \delta_{t_{m-1}+1}} q'_1, \dots, p^{\beta_{t_{m-1}+1} - \delta_{t_{m-1}+1}} q'_{t_{m-1}+1}, p^{\alpha_{t_{m-1}+1} - \alpha_{t_{m-1}+2} + \beta_{t_{m-1}+2} - \delta_{t_{m-1}+1}} q'_{t_{m-1}+2}, \dots, p^{\alpha_{t_{m-1}+1} - \alpha_k + \beta_k - \delta_{t_{m-1}+1}} q'_k, \quad (17)$$

$$p^{\gamma_1 - \delta_{t_{m-1}+1}} q_1, \dots, p^{\gamma_{t_{m-1}+1} - \delta_{t_{m-1}+1}} q_{t_{m-1}+1}, p^{\alpha_{t_{m-1}+1} - \alpha_{t_{m-1}+2} + \gamma_{t_{m-1}+2} - \delta_{t_{m-1}+1}} q_{t_{m-1}+2}, \dots, p^{\alpha_{t_{m-1}+1} - \alpha_k + \gamma_k - \delta_{t_{m-1}+1}} q_k. \quad (18)$$

В последовательности чисел (17) есть числа, взаимно простые с p . Среди таких чисел выбираем крайнее справа, пусть это будет q'_{t_m} , где $t_m = k$. Кроме того, пусть $q'_k = m'_{r_m k}$, где $1 \leq r_m \leq n_k$. Аналогично, среди чисел последовательности (18) есть числа, взаимно простые с p . Среди таких чисел выбираем крайнее справа, пусть это будет $q_{v_m} = m_{u_m v_m}$, где $t_{m-1} + 1 \leq v_m \leq k, 1 \leq u_m \leq n_{v_m}$. Аналогично доказывается равенство $v_m = k$.

Для каждого $l = 1, \dots, m$ обозначим $b_{ij} = a_{ij}$, где j пробегает значения $t_{l-1} + 1, \dots, t_l$ (здесь и дальше $t_0 = 0$), а вместе с заданным j индекс i , в свою очередь, пробегает значения $1, \dots, n_j$, кроме $i = u_l$ и $i = r_l$ при $j = t_l$, и $b_{u_l t_l} = a_{r_l t_l}$, $b_{r_l t_l} = \sum_{j=t_{l-1}+1}^{t_l} \sum_{i=1}^{n_j} p^{\alpha_j - \alpha_{t_l}} q_{ij} a_{ij}$, где q_{ij} — решение сравнения

$$m'_{r_l t_l} x \equiv p^{\gamma_{ij} - \delta_j} m_{ij} - p^{\beta_{ij} - \delta_j} m'_{ij} \pmod{p^{\alpha_j - \delta_j}}, \quad (19)$$

где j пробегает значения $1, \dots, t_l$, а вместе с заданным j индекс i в свою очередь пробегает значения $1, \dots, n_j$, кроме $i = u_l$ и $i = r_l$ при $j = t_l$, и $q_{r_l t_l}$ — решение сравнения

$$m'_{r_l t_l} x \equiv m_{r_l t_l} - m'_{u_l t_l} \pmod{p^{\alpha_{t_l} - \delta_{t_l}}}, \quad (20)$$

$q_{u_l t_l}$ — решение сравнения

$$m'_{r_l t_l} x \equiv m_{u_l t_l} \pmod{p^{\alpha_{t_l} - \delta_{t_l}}}. \quad (21)$$

Из (19) следует

$$l'_{ij} + l'_{r_l t_l} p^{\alpha_j - \alpha_{t_l}} q_{ij} \equiv l_{ij} \pmod{p^{\alpha_j}}. \quad (22)$$

Из (20) следует

$$l'_{u_l t_l} + l'_{r_l t_l} q_{r_l t_l} \equiv l_{r_l t_l} \pmod{p^{\alpha_{t_l}}}, \quad (23)$$

а из (21) следует

$$l'_{r_l t_l} q_{u_l t_l} \equiv l_{u_l t_l} \pmod{p^{\alpha_{t_l}}}. \quad (24)$$

Покажем теперь, что все так найденные элементы b_{ij} образуют базис группы G . Действительно, если верно равенство $\sum_{l=1}^m \sum_{j=t_{l-1}+1}^{t_l} \sum_{i=1}^{n_j} h_{ij} b_{ij} = 0$, то верно равенство

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \left(\sum_{j=t_{l-1}+1}^{t_l-1} \sum_{i=1}^{n_j} h_{ij} a_{ij} + \sum_{i=1, i \neq r_l, i \neq u_l}^{n_{t_l}} h_{it_l} a_{it_l} + \right. \\ \left. + h_{r_l t_l} \left(\sum_{j=t_{l-1}+1}^{t_l} \sum_{i=1}^{n_j} p^{\alpha_j - \alpha_{t_l}} q_{ij} a_{ij} \right) + h_{u_l t_l} a_{r_l t_l} \right) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \left((h_{r_l t_l} q_{r_l t_l} + h_{u_l t_l}) a_{r_l t_l} + h_{r_l t_l} q_{u_l t_l} a_{u_l t_l} + \sum_{j=t_{l-1}+1}^{t_l-1} \sum_{i=1}^{n_j} (h_{ij} + h_{r_l t_l} p^{\alpha_j - \alpha_{t_l}} q_{ij}) a_{ij} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1, i \neq r_l, i \neq u_l}^{n_{t_l}} (h_{it_l} + h_{r_l t_l} q_{it_l}) a_{it_l} \right) = 0. \end{aligned}$$

Но все элементы a_{ij} образуют базис группы G , значит, для всех $l = 1, \dots, m$ будем иметь $h_{ij} + h_{r_l t_l} p^{\alpha_j - \alpha_{t_l}} q_{ij} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_j}}$, где j пробегает значения $t_{l-1} + 1, \dots, t_l$, а вместе с заданным j индекс i , в свою очередь, пробегает значения $1, \dots, n_j$, кроме $i = r_l$ и $i = u_l$ при $j = t_l$, и $h_{r_l t_l} q_{r_l t_l} + h_{u_l t_l} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_{t_l}}}$, $h_{r_l t_l} q_{u_l t_l} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_{t_l}}}$. Так как $q_{u_l t_l}$ взаимно просто с p (это следует из (21) и взаимной простоты чисел $m'_{r_l t_l}$ и $m_{u_l t_l}$ с p), то из последнего сравнения имеем $h_{r_l t_l} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_{t_l}}}$. Тогда $h_{u_l t_l} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_{t_l}}}$ и $h_{r_l t_l} p^{\alpha_j - \alpha_{t_l}} q_{ij} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_j}}$, откуда $h_{ij} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_j}}$. Таким образом, мы доказали, что все элементы b_{ij} образуют базис группы G .

Выбираем автоморфизм σ группы G , удовлетворяющий условию: для всех $l = 1, \dots, m$ выполняется равенство $\sigma(a_{ij}) = b_{ij}$, где j пробегает значения $t_{l-1} + 1, \dots, t_l$, а при заданном j индекс i , в свою очередь, пробегает значения $1, \dots, n_j$. Тогда, используя (22), (23) и (24), получим

$$\begin{aligned}
 \sigma\left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} l'_{ij} a_{ij}\right) &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} l'_{ij} \sigma(a_{ij}) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} l'_{ij} b_{ij} = \\
 &= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{j=t_{l-1}+1}^{t_l-1} \sum_{i=1}^{n_j} l'_{ij} a_{ij} + \sum_{i=1, i \neq r_l, i \neq u_l}^{n_{t_l}} l'_{it_l} a_{it_l} + l'_{u_l t_l} a_{r_l t_l} + \right. \\
 &\quad \left. + l'_{r_l t_l} \left(\sum_{j=t_{l-1}+1}^{t_l} \sum_{i=1}^{n_j} p^{\alpha_j - \alpha_{t_l}} q_{ij} a_{ij} \right) \right) = \\
 &= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{j=t_{l-1}+1}^{t_l-1} \sum_{i=1}^{n_j} (l'_{ij} + l'_{r_l t_l} p^{\alpha_j - \alpha_{t_l}} q_{ij}) a_{ij} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1, i \neq r_l, i \neq u_l}^{n_{t_l}} (l'_{it_l} + l'_{r_l t_l} q_{it_l}) a_{it_l} + (l'_{u_l t_l} + l'_{r_l t_l} q_{r_l t_l}) a_{r_l t_l} + l'_{r_l t_l} q_{u_l t_l} a_{u_l t_l} \right) = \\
 &= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{j=t_{l-1}+1}^{t_l-1} \sum_{i=1}^{n_j} l_{ij} a_{ij} + \sum_{i=1, i \neq r_l, i \neq u_l}^{n_{t_l}} l_{it_l} a_{it_l} + l_{r_l t_l} a_{r_l t_l} + l_{u_l t_l} a_{u_l t_l} \right) = \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l_{is} a_{is}.
 \end{aligned}$$

Обратно. Покажем теперь, что если элемент $\sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l_{is} a_{is}$ принадлежит орбите элемента $\sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} a_{is}$ при действии группы автоморфизмов $\text{Aut } G$ на G , то для этого элемента выполнены условия (9).

Известно (см., например, §21, [8]), что кольцо эндоморфизмов $\text{End } G$ изоморфно кольцу M целочисленных матриц (y_{is}^{jt}) порядка $n_1 + \dots + n_k$, где $1 \leq s, t \leq k$, а при заданных s и t для индексов i, j выполнены неравенства $\sum_{r=1}^{s-1} n_r + 1 \leq i \leq \sum_{r=1}^s n_r$ и $\sum_{r=1}^{t-1} n_r + 1 \leq j \leq \sum_{r=1}^t n_r$ (здесь и дальше $n_0 = 0$ при $s = 1$ и $t = 1$), нижняя пара индексов is определяет номер строки $\sum_{r=1}^{s-1} n_r + i$, а верхняя пара индексов jt определяет номер столбца $\sum_{r=1}^{t-1} n_r + j$, на пересечении которых стоит элемент y_{is}^{jt} , и

$$y_{is}^{jt} = \begin{cases} x_{is}^{jt}, & \text{если } s < t \text{ или } s = t \text{ вместе с } i < j, \text{ где } 0 \leq x_{is}^{jt} < p^{\alpha_t}, \\ p^{\alpha_t - \alpha_s} x_{is}^{jt}, & \text{если } s > t \text{ или } s = t \text{ вместе с } i \geq j, \text{ где } 0 \leq x_{is}^{jt} < p^{\alpha_s}, \end{cases} \quad (25)$$

с операциями сложения матриц $(y_{is}^{jt}) + (y'_{is}^{jt}) = (y_{is}^{jt} + y'_{is}^{jt} \pmod{p^{\alpha_t}})$, и умножения матриц $(y_{is}^{jt}) \times (y'_{is}^{jt}) = (\sum_{r=1}^k \sum_{v=1}^{n_r} y_{is}^{vr} \cdot y'_{is}^{jt} \pmod{p^{\alpha_t}})$. Каждому автоморфизму σ группы G соответствует (при указанном изоморфизме) обратимая матрица (y_{is}^{jt}) из кольца M , и σ действует по правилу: если $g \in G$ и $g = \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} q_{is} a_{is}$, то

$$\sigma(g) = \sum_{t=1}^k \sum_{j=1}^{n_t} \left(\sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} q_{is} y_{is}^{jt} \right) a_{jt}. \quad (26)$$

Пусть $\sigma(\sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} a_{is}) = \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l_{is} a_{is}$ для некоторого автоморфизма σ группы G , который задается целочисленной матрицей (y_{is}^{jt}) . Тогда, используя (25)

и (26), получим систему сравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} p^{\alpha_1 - \alpha_s} x_{is}^{11} \equiv l_{11} \pmod{p^{\alpha_1}} \\ \dots \\ \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} p^{\alpha_1 - \alpha_s} x_{is}^{n_1 1} \equiv l_{n_1 1} \pmod{p^{\alpha_1}} \\ \sum_{i=1}^{n_1} l'_{i1} x_{i1}^{12} + \sum_{s=2}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} p^{\alpha_2 - \alpha_s} x_{is}^{12} \equiv l_{12} \pmod{p^{\alpha_2}} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n_1} l'_{i1} x_{i1}^{n_2 2} + \sum_{s=2}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} p^{\alpha_2 - \alpha_s} x_{is}^{n_2 2} \equiv l_{n_2 2} \pmod{p^{\alpha_2}} \\ \dots \\ \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} x_{is}^{1k-1} + \sum_{i=1}^{n_k} l'_{ik} p^{\alpha_{k-1} - \alpha_k} x_{ik}^{1k-1} \equiv l_{1k-1} \pmod{p^{\alpha_{k-1}}} \\ \dots \\ \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} x_{is}^{n_{k-1} k-1} + \sum_{i=1}^{n_k} l'_{ik} p^{\alpha_{k-1} - \alpha_k} x_{ik}^{n_{k-1} k-1} \equiv l_{n_{k-1} k-1} \pmod{p^{\alpha_{k-1}}} \\ \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} x_{is}^{1k} \equiv l_{1k} \pmod{p^{\alpha_k}} \\ \dots \\ \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} x_{is}^{n_k k} \equiv l_{n_k k} \pmod{p^{\alpha_k}}. \end{array} \right. \quad (27)$$

Докажем первое равенство из (9). Из первых n_1 сравнений системы (27) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{11} = \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} p^{\alpha_1 - \alpha_s} x_{is}^{11} + p^{\alpha_1} q_{11}, \\ \dots \\ l_{n_1 1} = \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} p^{\alpha_1 - \alpha_s} x_{is}^{n_1 1} + p^{\alpha_1} q_{n_1 1} \end{array} \right. \quad (28)$$

для некоторых $q_{11}, \dots, q_{n_1 1}$. Так как все числа $l'_{is} p^{\alpha_1 - \alpha_s}$ из (28) делятся на

$$\text{НОД}(d'_1, p^{\alpha_1 - \alpha_2} d'_2, \dots, p^{\alpha_1 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_1}),$$

то

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{НОД}(d'_1, p^{\alpha_1 - \alpha_2} d'_2, \dots, p^{\alpha_1 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_1}) \mid l_{11}, \\ \dots \\ \text{НОД}(d'_1, p^{\alpha_1 - \alpha_2} d'_2, \dots, p^{\alpha_1 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_1}) \mid l_{n_1 1}, \end{array} \right. \quad (29)$$

а значит,

$$\text{НОД}(d'_1, p^{\alpha_1 - \alpha_2} d'_2, \dots, p^{\alpha_1 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_1}) \mid d_1. \quad (30)$$

Из следующих n_2 сравнений системы (27) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{12} = \sum_{i=1}^{n_1} l'_{i1} x_{i1}^{12} + \sum_{s=2}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} p^{\alpha_2 - \alpha_s} x_{is}^{12} + p^{\alpha_2} q_{12} \\ \dots \\ l_{n_2 2} = \sum_{i=1}^{n_1} l'_{i1} x_{i1}^{n_2 2} + \sum_{s=2}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} p^{\alpha_2 - \alpha_s} x_{is}^{n_2 2} + p^{\alpha_2} q_{n_2 2} \end{array} \right. \quad (31)$$

для некоторых $q_{12}, \dots, q_{n_2 2}$. Так как все числа l'_{i1} ($i = 1, \dots, n_1$) и $l'_{is} p^{\alpha_2 - \alpha_s}$ (при $s = 2, \dots, k$ всякий раз $i = 1, \dots, n_s$) из (31) делятся на

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{\alpha_2 - \alpha_3} d'_3, \dots, p^{\alpha_2 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_2}),$$

то

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{\alpha_2 - \alpha_3} d'_3, \dots, p^{\alpha_2 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_2}) \mid l_{12}, \\ \dots \\ \text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{\alpha_2 - \alpha_3} d'_3, \dots, p^{\alpha_2 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_2}) \mid l_{n_2 2}, \end{array} \right. \quad (32)$$

а значит,

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{\alpha_2 - \alpha_3} d'_3, \dots, p^{\alpha_2 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_2}) \mid d_2. \quad (33)$$

Из (33) имеем

$$\text{НОД}(d'_1, p^{\alpha_1 - \alpha_2} d'_2, \dots, p^{\alpha_1 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_1}) \mid p^{\alpha_1 - \alpha_2} d_2. \quad (34)$$

Из следующих n_3 сравнений системы (27) имеем

$$\begin{cases} l_{13} = \sum_{i=1}^{n_1} l'_{i1} x_{i1}^{13} + \sum_{i=1}^{n_2} l'_{i2} x_{i2}^{13} + \sum_{s=3}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} p^{\alpha_3 - \alpha_s} x_{is}^{13} + p^{\alpha_3} q_{13} \\ \dots \\ l_{n_3 3} = \sum_{i=1}^{n_1} l'_{i1} x_{i1}^{n_3 3} + \sum_{i=1}^{n_2} l'_{i2} x_{i2}^{n_3 3} + \sum_{s=3}^k \sum_{i=1}^{n_s} l'_{is} p^{\alpha_3 - \alpha_s} x_{is}^{n_3 3} + p^{\alpha_3} q_{n_3 3} \end{cases} \quad (35)$$

для некоторых $q_{13}, \dots, q_{n_3 3}$. Так как все числа l'_{i1} ($i = 1, \dots, n_1$), l'_{i2} ($i = 1, \dots, n_2$) и $l'_{is} p^{\alpha_3 - \alpha_s}$ (при $s = 3, \dots, k$ всякий раз $i = 1, \dots, n_s$) из (31) делятся на

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, d'_3, p^{\alpha_3 - \alpha_4} d'_4, \dots, p^{\alpha_3 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_3}),$$

то

$$\begin{cases} \text{НОД}(d'_1, d'_2, d'_3, p^{\alpha_3 - \alpha_4} d'_4, \dots, p^{\alpha_3 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_3}) \mid l_{13}, \\ \dots \\ \text{НОД}(d'_1, d'_2, d'_3, p^{\alpha_3 - \alpha_4} d'_4, \dots, p^{\alpha_3 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_3}) \mid l_{n_3 3}, \end{cases} \quad (36)$$

а значит,

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, d'_3, p^{\alpha_3 - \alpha_4} d'_4, \dots, p^{\alpha_3 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_3}) \mid d_3. \quad (37)$$

Из (37) имеем

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{\alpha_2 - \alpha_3} d'_3, \dots, p^{\alpha_2 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_2}) \mid p^{\alpha_2 - \alpha_3} d_3, \quad (38)$$

а из (38) следует, что

$$\text{НОД}(d'_1, p^{\alpha_1 - \alpha_2} d'_2, p^{\alpha_1 - \alpha_3} d'_3, \dots, p^{\alpha_1 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_1}) \mid p^{\alpha_1 - \alpha_3} d_3, \quad (39)$$

Используя далее последовательно подсистемы сравнений по одному и тому же модулю p^{α_s} ($s = 1, \dots, k$), на которые разбита система (27), получаем, что

$$\text{НОД}(d'_1, p^{\alpha_1 - \alpha_2} d'_2, \dots, p^{\alpha_1 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_1}) \mid p^{\alpha_1 - \alpha_s} d_s \text{ для всех } s = 1, \dots, k. \quad (40)$$

Из (40) следует, что

$$\text{НОД}(d'_1, p^{\alpha_1 - \alpha_2} d'_2, \dots, p^{\alpha_1 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_1}) \mid \text{НОД}(d_1, p^{\alpha_1 - \alpha_2} d_2, \dots, p^{\alpha_1 - \alpha_k} d_k, p^{\alpha_1}). \quad (41)$$

В силу обратимости матрицы (y_{is}^{jt}) из кольца M имеем аналогично

$$\text{НОД}(d_1, p^{\alpha_1 - \alpha_2} d_2, \dots, p^{\alpha_1 - \alpha_k} d_k, p^{\alpha_1}) \mid \text{НОД}(d'_1, p^{\alpha_1 - \alpha_2} d'_2, \dots, p^{\alpha_1 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_1}). \quad (42)$$

Из (41) и (42) следует первое равенство в (9).

Докажем второе равенство в (9). Из (30) имеем

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{\alpha_2 - \alpha_3} d'_3, \dots, p^{\alpha_2 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_2}) \mid d_1. \quad (43)$$

Кроме того, из второй группы из n_2 сравнений системы (27) мы получили (33), а из третьей группы из n_3 сравнений системы (27) мы получили (38).

Используя далее последовательно подсистемы сравнений по одному и тому же модулю p^{α_s} ($s = 2, \dots, k$), на которые разбита система (27), получаем, что

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{\alpha_2 - \alpha_3} d'_3, \dots, p^{\alpha_2 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_2}) \mid p^{\alpha_2 - \alpha_s} d_s \text{ для всех } s = 2, \dots, k. \quad (44)$$

Из (43) и (44) следует, что

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{\alpha_2 - \alpha_3} d'_3, \dots, p^{\alpha_2 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_2}) \mid \text{НОД}(d_1, d_2, p^{\alpha_2 - \alpha_3} d_3, \dots, p^{\alpha_2 - \alpha_k} d_k, p^{\alpha_2}). \quad (45)$$

В силу обратимости матрицы (y_{is}^{jt}) из кольца M имеем аналогично

$$\text{НОД}(d_1, d_2, p^{\alpha_2 - \alpha_3} d_3, \dots, p^{\alpha_2 - \alpha_k} d_k, p^{\alpha_2}) \mid \text{НОД}(d'_1, d'_2, p^{\alpha_2 - \alpha_3} d'_3, \dots, p^{\alpha_2 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_2}). \quad (46)$$

Из (45) и (46) следует второе равенство в (9).

Докажем третье равенство в (9). Из (30) имеем

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, d'_3, p^{\alpha_3 - \alpha_4} d'_4, \dots, p^{\alpha_3 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_3}) \mid d_1, \quad (47)$$

а из (33) имеем

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, d'_3, p^{\alpha_3 - \alpha_4} d'_4, \dots, p^{\alpha_3 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_3}) \mid d_2. \quad (48)$$

Кроме того, из третьей группы из n_3 сравнений системы (27) мы получили (38).

Используя далее последовательно подсистемы сравнений по одному и тому же модулю p^{α_s} ($s = 3, \dots, k$), на которые разбита система (27), получаем

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, d'_3, p^{\alpha_3 - \alpha_4} d'_4, \dots, p^{\alpha_3 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_3}) \mid p^{\alpha_3 - \alpha_s} d_s \text{ для всех } s = 3, \dots, k. \quad (49)$$

Из (47), (48) и (49) следует, что

$$\text{НОД}(d'_1, d'_2, d'_3, p^{\alpha_3 - \alpha_4} d'_4, \dots, p^{\alpha_3 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_3}) \mid \text{НОД}(d_1, d_2, d_3, p^{\alpha_3 - \alpha_4} d_4, \dots, p^{\alpha_3 - \alpha_k} d_k, p^{\alpha_3}). \quad (50)$$

В силу обратимости матрицы (y_{is}^{jt}) из кольца M имеем аналогично

$$\text{НОД}(d_1, d_2, d_3, p^{\alpha_3 - \alpha_4} d_4, \dots, p^{\alpha_3 - \alpha_k} d_k, p^{\alpha_3}) \mid \text{НОД}(d'_1, d'_2, d'_3, p^{\alpha_3 - \alpha_4} d'_4, \dots, p^{\alpha_3 - \alpha_k} d'_k, p^{\alpha_3}). \quad (51)$$

Из (50) и (51) имеем третье равенство в (9).

Продолжая так дальше, мы получим все равенства в (9). Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 4. По лемме 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{НОД}(d''_1, p^{m_1 - m_2} d''_2, \dots, p^{m_1 - m_t} d''_t, p^{m_1}) = \\ = \text{НОД}(d_1, p^{m_1 - m_2} d_2, \dots, p^{m_1 - m_t} d_t, p^{m_1}), \\ \text{НОД}(d''_1, d''_2, p^{m_2 - m_3} d''_3, \dots, p^{m_2 - m_t} d''_t, p^{m_2}) = \\ = \text{НОД}(d_1, d_2, p^{m_2 - m_3} d_3, \dots, p^{m_2 - m_t} d_t, p^{m_2}), \\ \dots \\ \text{НОД}(d''_1, \dots, d''_{t-1}, p^{m_{t-1} - m_t} d''_t, p^{m_{t-1}}) = \\ = \text{НОД}(d_1, \dots, d_{t-1}, p^{m_{t-1} - m_t} d_t, p^{m_{t-1}}), \\ \text{НОД}(d''_1, \dots, d''_{t-1}, d''_t, p^{m_t}) = \text{НОД}(d_1, \dots, d_{t-1}, d_t, p^{m_t}), \end{array} \right. \quad (52)$$

где $d''_j = \text{НОД}((n-1)u_{1j} + l'_{1j}, \dots, (n-1)u_{r_j j} + l'_{r_j j})$ для всех $j = 1, \dots, t$.

Осталось показать, что из справедливости системы (52) следует выполнение равенств системы (8). С помощью произвольно выбранного j -го равенства

$$\begin{aligned} q_j &= \text{НОД}(d''_1, \dots, d''_j, p^{m_j - m_{j+1}} d''_{j+1}, \dots, p^{m_j - m_t} d''_t, p^{m_j}) = \\ &= \text{НОД}(d_1, \dots, d_j, p^{m_j - m_{j+1}} d_{j+1}, \dots, p^{m_j - m_t} d_t, p^{m_j}) \end{aligned} \quad (53)$$

системы (52) покажем справедливость j -го равенства

$$\begin{aligned} q'_j &= \text{НОД}(d'_1, \dots, d'_j, p^{m_j-m_{j+1}}d'_{j+1}, \dots, p^{m_j-m_t}d'_t, p^{m_j}, n-1) = \\ &= \text{НОД}(d_1, \dots, d_j, p^{m_j-m_{j+1}}d_{j+1}, \dots, p^{m_j-m_t}d_t, p^{m_j}, n-1) = q''_j \end{aligned} \quad (54)$$

системы (8). Так как q'_j делит каждое число, стоящее в левой части равенства (54), то q'_j будет делить каждое число, стоящее в левой части равенства (53), а значит, q'_j делит q_j , откуда следует делимость каждого числа, стоящего в правой части равенства (54), на q'_j , тогда и q''_j делится на q'_j . Аналогично доказывается делимость q'_j на q''_j . Значит, $q'_j = q''_j$. Проводя такие рассуждения для каждого $j = 1, \dots, t$, мы тем самым покажем, что из справедливости системы (52) следует выполнение системы равенств (8). Теорема доказана.

Порядки p^{m_j} абелевых полуциклических прямых множителей и определяющий набор наибольших общих делителей $D_1, \dots, D_t$ из разложения (4) назовем инвариантами абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ из теоремы 4

Теорема 5. *Своими инвариантами абелева n -арная p -группа определяется с точностью до изоморфизма*

Доказательство. Пусть две абелевы n -арные группы $\langle G, f \rangle$ и $\langle G', f' \rangle$ имеют одинаковые инварианты, пусть $\langle G, f \rangle$ изоморфна разложению (4), а $\langle G', f' \rangle$ изоморфна разложению (7). Рассмотрим еще одно прямое произведение

$$\prod_{i=1}^{r_1} \text{abl}_{l'_{i1}a_{i1}}(a_{i1}) \times \prod_{i=1}^{r_2} \text{abl}_{l'_{i2}a_{i2}}(a_{i2}) \times \dots \times \prod_{i=1}^{r_t} \text{abl}_{l'_{it}a_{it}}(a_{it}). \quad (55)$$

Заметим, что n -арная группа (4) равна $\text{abl}_d A$, где $A = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} (a_{ij})$, $d = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} l_{ij} a_{ij}$, а n -арная группа (55) равна $\text{abl}_{d'} A$, где $d' = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} l'_{ij} a_{ij}$. В силу Леммы 1 из [9] можно считать, что все l_{ij} и l'_{ij} удовлетворяют условиям: $0 \leq l_{ij}, l'_{ij} < \text{НОД}(n-1, p^{m_j})$ и l_{ij}, l'_{ij} делят $\text{НОД}(n-1, p^{m_j})$. Так как определяющие наборы наибольших общих делителей для разложений (4) и (55) одинаковы, то, согласно лемме 1, найдется такой автоморфизм σ группы A , что $\sigma(d) = d'$, а значит, по теореме 1 имеем изоморфизм n -арных групп (4) и (55). Изоморфизм (55) и (7) очевиден. Теорема доказана.

Пусть m — натуральное число. Запишем его в виде суммы

$$m = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{r_j} m_{ji}, \quad m_{11} = \dots = m_{1r_1} > m_{21} = \dots = m_{2r_2} > \dots > m_{t1} = \dots = m_{tr_t} \geq 1. \quad (56)$$

Число всех таких разбиений с $r = 1, 2, \dots$, где $r = r_1 + r_2 + \dots + r_t$ и t — количество различных слагаемых в разбиении m , обозначим через $p(m)$. Для каждого разбиения $\delta_s(m)$ вида (56) ($s = 1, \dots, p(m)$) определим число $q(s, m)$, равное количеству всевозможных наборов наибольших общих делителей вида (5), где $m_j = m_{ij}$ для $j = 1, \dots, t$ и $i = 1, \dots, r_j$. Например, для $m = 4$ имеем $p(4) = 5$ разбиений:

$$\delta_1(4) : 4 = 1+1+1+1, \quad \delta_2(4) : 4 = 2+1+1, \quad \delta_3(4) : 4 = 2+2, \quad \delta_4(4) : 4 = 3+1, \quad \delta_5(4) : 4 = 4.$$

Для каждого из указанных разбиений при $n = 3$ и $p = 2$ определяем количество всевозможных наборов вида (5): $q(1, 4) = 2$, $q(2, 4) = 3$, $q(3, 4) = 2$, $q(4, 4) = 3$, $q(5, 4) = 2$.

Следствие 1. Число неизоморфных абелевых n -арных групп порядка p^m равно

$$\sum_{s=1}^{p(m)} q(s, m).$$

Например, число неизоморфных абелевых тернарных групп порядка 16 равно 12, хотя число неизоморфных обычных (бинарных) абелевых групп того же порядка 16 равно 5. Если циклическую группу порядка k обозначить Z_k , то упомянутые выше неизоморфные абелевы тернарные группы порядка 16 имеют вид:

$$abl_1 Z_2 \times abl_1 Z_2 \times abl_1 Z_2 \times abl_1 Z_2, \quad abl_0 Z_2 \times abl_0 Z_2 \times abl_0 Z_2 \times abl_0 Z_2,$$

$$abl_1 Z_4 \times abl_1 Z_2 \times abl_1 Z_2, \quad abl_0 Z_4 \times abl_1 Z_2 \times abl_1 Z_2, \quad abl_0 Z_4 \times abl_0 Z_2 \times abl_0 Z_2,$$

$$abl_1 Z_4 \times abl_1 Z_4, \quad abl_0 Z_4 \times abl_0 Z_4, \quad abl_1 Z_8 \times abl_1 Z_2, \quad abl_0 Z_8 \times abl_1 Z_2,$$

$$abl_0 Z_8 \times abl_0 Z_2, \quad abl_1 Z_{16}, \quad abl_0 Z_{16}.$$

Если $n - 1$ не делится на простое число p , то разложение конечной абелевой n -арной p -группы в прямое произведение абелевых полуциклических n -арных p -групп значительно упрощается. Дело в том, что в этом случае имеем только один определяющий набор наибольших общих делителей (5): все D_j равны 1. Кроме того, любая конечная абелева полуциклическая n -арная p -группа изоморфна циклической n -арной группе (порожденной одним элементом) того же порядка (см. Следствие 1, [7]). А значит, верно (как и для групп)

Циклическая n -арная группа является n -арным аналогом обычной (бинарной) циклической группы. Она определяется следующим образом: вначале результат k -кратного применения операции f в n -арной группе к $k(n - 1) + 1$ одинаковым элементам, равным элементу a , назовем неотрицательной k -й n -арной степенью элемента a и обозначим $a^{(k)}$. Положим $a^{(0)} = a$. Отрицательную k -ю n -арную степень элемента a определим как решение уравнения $f(\underbrace{a, \dots, a}_{-k(n-1)}, x) = a$. Таким обра-

зом, при $k \geq 0$ верно равенство $a^{(k)} = f(\underbrace{a, \dots, a}_{k(n-1)+1}, x)$, а при $k < 0$ верно равенство

$f(\underbrace{a, \dots, a}_{-k(n-1)}, a^{(k)}) = a$. В n -арной группе для фиксированного элемента a множество

$\langle a \rangle$ всех n -арных степеней элемента a является n -арной подгруппой (которую называют циклической), порожденной элементом a .

Следующее утверждение аналогично соответствующей теореме из теории групп.

Следствие 2. (Теорема 9, [4]) Если p не делит $n - 1$, то каждая конечная абелева n -арная p -группа изоморфна прямому произведению циклических n -арных p -групп. Если существуют два таких изоморфизма

$$\langle G, f \rangle \cong abl_{l_1 a_1}(a_1) \times \dots \times abl_{l_r a_r}(a_r) \cong abl_{l'_1 b_1}(b_1) \times \dots \times abl_{l'_s b_s}(b_s),$$

то $r = s$ и $abl_{l_i a_i}(a_i) \cong abl_{l'_j b_j}(b_j)$ при некотором упорядочении последних.

3. Основная теорема о конечных абелевых n -арных группах.

Опираясь на разложение конечной абелевой n -арной группы в прямое произведение примарных абелевых n -арных групп (теорема 2) и на его единственность, а также на теоремы 3 и 4, мы непосредственно приходим к следующему основному утверждению о конечных абелевых n -арных группах.

Теорема 6. *Всякая конечная абелева n -арная группа изоморфна прямому произведению примарных абелевых полуциклических n -арных групп. Любые два таких разложения имеют одинаковые числа множителей каждого порядка, и по каждому простому делителю порядка этой n -арной группы произведения примарных множителей в этих разложениях имеют одинаковые определяющие наборы наибольших общих делителей.*

Следствие 3 (Теорема 11, [4]). *Всякая конечная абелева n -арная группа, порядок которой взаимно прост с $n - 1$, изоморфна прямому произведению примарных циклических n -арных групп. Любые два таких изоморфизма в этом случае имеют одинаковые числа множителей каждого порядка.*

Заимствуя терминологию из теории групп, мы, как и в случае примарных n -арных групп, назовем инвариантами абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ порядки $p_s^{m_{sj}}$ примарных абелевых полуциклических множителей в разложении абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ из теоремы 6 вместе с определяющими наборами наибольших общих делителей $D_{s1}, \dots, D_{st_s}$ по каждому простому делителю p_s порядка $|G|$. Выпишем все инварианты, расположив их в строки, которые отвечают различным простым делителям порядка $|G|$:

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{p_1^{m_{11}}, \dots, p_1^{m_{11}}}_{r_{11}}, \dots, \underbrace{p_1^{m_{1t_1}}, \dots, p_1^{m_{1t_1}}}_{r_{1t_1}}, D_{11}, \dots, D_{1t_1}; & m_{11} > \dots > m_{1t_1}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{p_k^{m_{k1}}, \dots, p_k^{m_{k1}}}_{r_{k1}}, \dots, \underbrace{p_k^{m_{kt_k}}, \dots, p_k^{m_{kt_k}}}_{r_{kt_k}}, D_{k1}, \dots, D_{kt_k}; & m_{k1} > \dots > m_{kt_k}; \end{array}$$

Для фиксированного простого делителя p_s порядка абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ рассмотрим произведение примарных множителей из разложения $\langle G, f \rangle$:

$$\prod_{i=1}^{r_{s1}} \text{abl}_{l_{i1}a_{s1}}(a_{s1}) \times \dots \times \prod_{i=1}^{r_{st_s}} \text{abl}_{l_{it_s}a_{st_s}}(a_{st_s}), \quad (57)$$

где для $j = 1, \dots, t_s$ имеем $|a_{sj}| = p_s^{m_{sj}}$. Произведение (57) имеет определяющий набор наибольших общих делителей

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{s1} = \text{НОД}(d_{s1}, p^{m_{s1}-m_{s2}}d_{s2}, \dots, p^{m_{s1}-m_{st_s}}d_{st_s}, p^{m_{s1}}, n-1), \\ D_{s2} = \text{НОД}(d_{s1}, d_{s2}, p^{m_{s2}-m_{s3}}d_{s3}, \dots, p^{m_{s2}-m_{st_s}}d_{st_s}, p^{m_{s2}}, n-1), \\ \dots \\ D_{st_s-1} = \text{НОД}(d_{s1}, \dots, d_{st_s-1}, p^{m_{st_s-1}-m_{st_s}}d_{st_s}, p^{m_{st_s-1}}, n-1), \\ D_{st_s} = \text{НОД}(d_{s1}, \dots, d_{st_s-1}, d_{st_s}, p^{m_{st_s}}, n-1), \end{array} \right. \quad (58)$$

где $d_{sj} = \text{НОД}(l_{1j}, \dots, l_{r_{sj}j})$, для всех $j = 1, \dots, t_s$.

Среди всех изоморфных копий произведения (57) удобнее всего рассматривать произведение

$$abl_{d_{s1}a_{s1}}(a_{s1}) \times \prod_{i=2}^{r_{s1}} abl_0(a_{s1}) \times \dots \times abl_{d_{st_s}a_{st_s}}(a_{st_s}) \times \prod_{i=2}^{r_{st_s}} abl_0(a_{st_s}). \quad (59)$$

Так как $\prod_{i=2}^{r_{s1}} abl_0(a_{s1}) \times \dots \times \prod_{i=2}^{r_{st_s}} abl_0(a_{st_s}) \cong abl_0 \prod_{j=1}^{t_s} \prod_{i=2}^{r_{sj}}(a_{sj})$ (см. [10], стр.157), то произведение (59) изоморфно произведению

$$\prod_{j=1}^{t_s} abl_{d_{sj}a_{sj}}(a_{sj}) \times abl_0 \prod_{j=1}^{t_s} \prod_{i=2}^{r_{sj}}(a_{sj}).$$

Тогда разложение $\langle G, f \rangle$ будет иметь вид

$$\langle G, f \rangle \cong \prod_{j=1}^{t_1} abl_{d_{1j}a_{1j}}(a_{1j}) \times abl_0 \prod_{j=1}^{t_1} \prod_{i=2}^{r_{1j}}(a_{1j}) \times \dots \times \prod_{j=1}^{t_k} abl_{d_{kj}a_{kj}}(a_{kj}) \times abl_0 \prod_{j=1}^{t_k} \prod_{i=2}^{r_{kj}}(a_{kj}),$$

или, еще проще,

$$\langle G, f \rangle \cong \prod_{s=1}^k \prod_{j=1}^{t_s} abl_{d_{sj}a_{sj}}(a_{sj}) \times abl_0 \prod_{s=1}^k \prod_{j=1}^{t_s} \prod_{i=2}^{r_{sj}}(a_{sj}).$$

В качестве примера перечислим все абелевы тернарные группы порядка 36:

Абелевы тернарные группы порядка 36	Инварианты
$abl_0 Z_4 \times abl_0 Z_9 \cong abl_0(Z_4 \times Z_9)$	4,2; 9,1
$abl_1 Z_4 \times abl_0 Z_9$	4,1; 9,1
$abl_0 Z_2 \times abl_0 Z_2 \times abl_0 Z_9 \cong abl_0(Z_2 \times Z_2 \times Z_9)$	2,2,2; 9,1
$abl_1 Z_2 \times abl_0 Z_2 \times abl_0 Z_9 \cong abl_1 Z_2 \times abl_0(Z_2 \times Z_9)$	2,2,1; 9,1
$abl_1 Z_4 \times abl_0 Z_3 \times abl_0 Z_3 \cong abl_1 Z_4 \times abl_0(Z_3 \times Z_3)$	4,1; 3,3,1
$abl_0 Z_4 \times abl_0 Z_3 \times abl_0 Z_3 \cong abl_0(Z_4 \times Z_3 \times Z_3)$	4,2; 3,3,1
$abl_1 Z_2 \times abl_0 Z_2 \times abl_0 Z_3 \times abl_0 Z_3 \cong abl_1 Z_2 \times abl_0(Z_2 \times Z_3 \times Z_3)$	2,2,1; 3,3,1
$abl_0 Z_2 \times abl_0 Z_2 \times abl_0 Z_3 \times abl_0 Z_3 \cong abl_0(Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_3)$	2,2,2; 3,3,1

Список литературы

1. Курош А. Г., *Общая алгебра. Лекции 1969-1970 уч. года*, Наука, Москва, 1974.
2. Timm J., *Kommutative n-Gruppen*, Diss, Hamburg, 1967.
3. Dudek W. A., Michalski J., "On retracts of polyadic groups", *Demonstr. Math.*, **17** (1984), 281-301.
4. Бощенко А. П., Щучкин Н. А., "Конечные абелевы n -арные группы", *Чебышевский сборник*, **ХІІ**:2(38) (2011), 5-14.
5. Гальмак А. М., "Полуабелевы n -арные группы с идемпотентами", *Вестник ВДУ им. П. М. Маширава*, **2**:12 (1999), 56-60.
6. Dudek W. A., "Remarks to Glazek's results on n -ary groups", *Discuss. Math.*, General Algebra and Appl., №27, 2007, 199-233.
7. Щучкин Н. А., "Полуциклические n -арные группы", *Известия ГГУ им. Ф. Скорины*, **3**:54 (2009), 186-194.

8. Курош А. Г., *Теория групп*, 3-е изд., Наука, Москва, 1967.
9. Glazek K., Michalski J., Sierocki A I., "On evaluation of numbers of some polyadic groups", 1985, 157-171.
10. Гальмак А. М., *n -арные группы. Часть I*, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Гомель, 2003.

Статья поступила 06.12.2013.