Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Демиденко, Квадратичная задача о назначениях с аддитивно монотонными матрицами и неполными матрицами анти-Монжа: условия эффективной разрешимости, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 1, 105–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:05:34

Квадратичная задача о назначениях с аддитивно монотонными матрицами и неполными матрицами анти-Монжа: условия эффективной разрешимости

© 2007 г. В. М. Демиденко

Для классов аддитивно монотонных матриц и неполных матриц анти-Монжа описаны условия, гарантирующие достижение оптимума функционала квадратичной задачи о назначениях на заданной подстановке. Предложенные условия обобщают и унифицируют все специальные случаи квадратичной задачи о назначениях с матрицами анти-Монжа и Тёплица, включая известную теорему о перестановке трех систем, доказанную в 1926 г. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвудом и Г. Полиа, а также все полученные к настоящему времени ее расширения.

Работа выполнена в рамках ГПФИ “Математические структуры” при финансовой поддержке Института математики НАН Беларуси и при поддержке INTAS, проекты 00–217, 03–51–5501.

1. Введение

В исследовании оптимизационных комбинаторных задач значительное место отводится NP-трудной квадратичной задаче о назначениях (КЗН), имеющей широкие теоретические и практические области применения [1]–[4]. Теоретическая значимость КЗН обусловлена тем, что ее частными случаями являются оптимизационные задачи на графах и подстановках, включая известные задачи о наибольших по весу клике, независимом множестве и паросочетании, линейные задачи о назначениях и коммивояжере, задачу об одномерном размещении. Относительно практических применений следует отметить, что КЗН является адекватной математической моделью многих реальных прикладных задач, возникающих при размещении промышленных объектов и оборудования, разработке и производстве различных вычислительных средств, планировании очередности выполнения работ, при статистической обработке данных, а также при организации вычислительных процессов на современных высокопроизводительных вычислительных системах векторно-конвейерного и кластерного типа.

Данная работа продолжает исследования, связанные с выявлением эффективно разрешимых случаев КЗН, для которых гарантировано достижение оптимума на подстановке заданного вида [6]–[15]. В дальнейшем такие случаи КЗН называются сильно разрешимыми. В работе для классов аддитивно монотонных матриц и неполных матриц анти-Монжа указаны дополнительные ограничения, гарантирующие сильную разрешимость

КЗН. Введенное понятие аддитивно монотонных по строкам и столбцам матриц является естественным обобщением фольклорного понятия монотонности матриц, использованного в [6]. Неполными матрицами анти-Монжа названы матрицы, для которых выполняется только часть из противоположных неравенств, определяющих условия Монжа [4]. Предлагаемые условия обобщают и унифицируют все имеющиеся на сегодняшний день сильно разрешимые случаи КЗН с матрицами анти-Монжа и Тёплица [6]–[15], включая описываемые известной теоремой о перестановке трех систем [9], которая была доказана в 1926 г. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвудом и Г. Поля [10], а также полученные позже в [8] их обобщения. Предлагаемые условия описываются однородными системами линейных неравенств и определяют в матричном пространстве классы матриц, для которых гарантируется достижение оптимума функционала КЗН на подстановке заданного вида. В заключении рассмотрены способы расширения выделенных классов матриц, а также построения на их основе новых классов, для которых оптимумом является любая наперед заданная подстановка. Кроме этого обсуждаются возможные практические применения полученных результатов.

Пусть S_n — симметрическая группа подстановок, действующих на множестве $\mathbf{N}_{1,n} = \{1, 2, \dots, n\}$. Произвольная подстановка $\sigma \in S_n$ в дальнейшем трактуется как взаимно однозначное отображение $\sigma: \mathbf{N}_{1,n} \rightarrow \mathbf{N}_{1,n}$, перемещающее элемент i в $\sigma(i)$, где $i \in \mathbf{N}_{1,n}$. Любая подстановка σ определяется набором элементов $\sigma(i)$, где $i \in \mathbf{N}_{1,n}$, поэтому для ее обозначения используется запись $\sigma = \langle \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n) \rangle$. В дальнейшем подмножества вида $\{i, i+1, \dots, j\} \subseteq \mathbf{N}_{1,n}$ обозначаются через $\mathbf{N}_{i,j}$ при фиксированных $i, j, 1 \leq i < j \leq n$.

Пусть $\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbf{R}^{n \times n}$ — пространство всех вещественных $n \times n$ матриц и $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Тогда квадратичная задача о назначениях в формулировке Коопманса–Бекмана [5] состоит в нахождении подстановки, минимизирующей (либо максимизирующей) скалярное произведение

$$f_{A,B}(\sigma) = (A, B^\sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{\sigma(i), \sigma(j)}$$

матриц A и B^σ , где $B^\sigma = (b_{\sigma(i), \sigma(j)})$ — перенумерованная посредством σ матрица B .

Специальные случаи КЗН (или так называемые ее ограниченные версии) получают введение дополнительных условий, накладываемых на вид элементов матриц A и B . К наиболее известным ограниченным версиям КЗН относятся задачи минимизации (либо максимизации) билинейной и квадратичной форм на симметрической группе S_n . В первой из указанных задач ранг матрицы $B = (b_{i,j})$ равен 1, то есть $b_{i,j} = x_i y_j$ для всех $i, j \in \mathbf{N}_{1,n}$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — n -мерные векторы и, следовательно,

$$f_{A,B}(\sigma) = f_{x,y}(\sigma) = (A, B^\sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_{\sigma(i)} y_{\sigma(j)}.$$

Во второй задаче B — симметрическая матрица ранга 1. В этом случае $x = y$, то есть для всех $i, j \in \mathbf{N}_{1,n}$ выполняются равенства $b_{i,j} = x_i x_j$.

Приведенные ограниченные версии КЗН остаются NP-трудными даже для матриц A простого вида, например, тёплицевых матриц. Наиболее известной задачей с такими матрицами является задача о балансировке турбины, NP-трудность которой была доказана в [6].

Впервые условия сильной разрешимости были получены Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвудом и Г. Поля в 1926 г. для частного случая КЗН, а именно, для задачи оптимизации на симметрической группе S_n билинейной формы $f_{x,y}$ с матрицей Тёплица $A = (a_{i,j})$ специального вида [10]. Напомним, что A называется матрицей Тёплица, если существует такая функция $f: \{-(n-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, что $a_{i,j} = f(i-j)$ для всех $i, j \in \mathbf{N}_{1,n}$. В [10] было установлено, что если при нечетном n для компонент векторов x, y справедливы неравенства $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$, а для функции f , порождающей матрицу A , справедливы соотношения $f(i-j) = f(j-i)$ и $f(0) \leq f(1) \leq \dots \leq f(n-1)$, где $i, j \in \mathbf{N}_{1,n}$, то минимум функционала $f_{x,y}(\sigma)$ достигается на подстановке $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle$. Приведенный результат в более общем виде сформулирован в форме теоремы о перестановке трех систем, приведенной в [9].

Полученные значительно позже на протяжении 1969–1998 годов результаты о сильной разрешимости КЗН [11]–[15] являлись по существу прямыми следствиями теоремы о перестановке трех систем и относились к задаче минимизации квадратичной формы $f_{x,x}$ на S_n с симметрическими матрицами Тёплица частного вида, то есть во всех представленных случаях матрица B была матрицей анти-Монжа ранга 1 либо ее перенумерованным аналогом, а A являлась матрицей Тёплица, порождаемой в наиболее общем случае невозрастающей либо неубывающей функцией f .

2. Предварительные сведения, основные определения и вспомогательные утверждения

Впервые условия сильной разрешимости КЗН, не являющиеся прямыми следствиями теоремы о перестановке трех систем, были описаны в [6], [7]. В частности было показано, что если $B = (b_{i,j})$ — монотонная матрица анти-Монжа, а $A = (a_{i,j})$ — биневалентная матрица Тёплица, порожденная одноименной функцией f , то подстановка σ_0 минимизирует функционал $f_{A,B}$ на S_n . Напомним, что согласно [6], матрица $B = (b_{i,j})$ называется монотонной матрицей, если ее элементы удовлетворяют неравенствам

$$b_{j,k} - b_{i,k} \geq 0, \quad b_{k,j} - b_{k,i} \geq 0 \quad (1)$$

для всех $1 \leq i < j, k \leq n$. В дальнейшем такие матрицы называются неубывающими.

Если для B выполняются условия противоположные условиям Монжа [4], то есть выполняются неравенства

$$b_{i,k} + b_{j,l} - b_{i,l} - b_{j,k} \geq 0 \quad (2)$$

для всех $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k < l \leq n$, то B называется матрицей анти-Монжа. Определение биневалентной функции, введенное в [6], вынесено в раздел 5, где оно используется при доказательстве следствия 1.

Из приведенных выше условий сильной разрешимости КЗН видно, что описанные в [10]–[15] множества матриц B были существенно расширены в [6], [7] до множества монотонных матриц анти-Монжа. Однако все выделенные множества матриц A по-прежнему содержались в классе тёплицевых матриц. Исключением являлись обобщенные условия сильной разрешимости, приведенные в [8], которые впервые выявили множество матриц A , выходящее за рамки класса тёплицевых матриц. Формулировка этих условий приводится в следствии 2 в разделе 5.

В данной работе описываются более представительные множества, порождаемые матрицами вида A и B , для которых гарантировано достижение оптимума функционала $f_{A,B}$

на подстановке σ_0 . При описании этих множеств используются неполные матрицы анти-Монжа и понятия 1-аддитивного невозрастания и 2-аддитивного неубывания матриц, которые являются естественными обобщениями монотонности матриц.

Определение 1. Матрица $A = (a_{i,j})$ называется 1-аддитивно невозрастающей, если для ее элементов выполняются неравенства

$$\begin{aligned} a_{i,n+1-j} + a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,j} - a_{n+1-i,j} &\leq 0, \\ a_{n+1-i,j} + a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,j} - a_{i,n+1-j} &\leq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

для всех $1 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Если элементы матрицы $A = (a_{i,j})$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} a_{i,n+2-j} + a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j} - a_{n+2-i,j} &\geq 0, \\ a_{n+2-i,j} + a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j} - a_{i,n+2-j} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

для всех $2 \leq i, j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, то матрица A называется 2-аддитивно неубывающей матрицей.

Определение 2. Матрица B называется неполной матрицей анти-Монжа, если для ее элементов выполняются неравенства вида (2) только для четверок элементов i, j, k, l из $\mathbf{N}_{1,n}$ вида $i < j \neq k < l$.

При формулировке и доказательстве основных и вспомогательных утверждений понадобятся две четверки специального вида подмножеств из $\mathbf{N}_{1,n}$, соответствующих любой заданной подстановкой σ , которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{1,1}^\sigma &= \{i \in \mathbf{N}_{1,\lfloor n/2 \rfloor} \mid \sigma(i) > \sigma(n+1-i)\}, & I_{1,3}^\sigma &= \mathbf{N}_{1,\lfloor n/2 \rfloor} \setminus I_{1,1}^\sigma, \\ I_{1,2}^\sigma &= \{n+1-i \mid i \in I_{1,1}^\sigma\}, & I_{1,4}^\sigma &= \{n+1-i \mid i \in I_{1,3}^\sigma\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} I_{2,1}^\sigma &= \{j \in \mathbf{N}_{2,\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \mid \sigma(j) < \sigma(n+2-i)\}, & I_{2,3}^\sigma &= \mathbf{N}_{2,\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \setminus I_{2,1}^\sigma, \\ I_{2,2}^\sigma &= \{n+1-j \mid j \in I_{2,1}^\sigma\}, & I_{2,4}^\sigma &= \{n+2-i \mid j \in I_{2,3}^\sigma\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Введенные подмножества $I_{1,1}^\sigma$ и $I_{2,1}^\sigma$ определяют две связанные с σ подстановки, вида

$$\psi_\sigma = \prod_{i \in I_{1,1}^\sigma} (i, n+1-i), \quad \varphi_\sigma = \prod_{j \in I_{2,1}^\sigma} (j, n+2-j), \quad (7)$$

в записи которых через $(i, n+1-i)$ и $(j, n+2-j)$ обозначены транспозиции, переводящие друг в друга $i, n+1-i$ и $j, n+2-j$ и оставляющие на месте все остальные элементы из $\mathbf{N}_{1,n}$. В случае $I_{1,1}^\sigma = \emptyset$ либо $I_{2,1}^\sigma = \emptyset$ подстановка ψ_σ , либо φ_σ полагается равной тождественной подстановке.

Ниже приводятся формулировки двух вспомогательных утверждений, описывающих свойства введенных подмножеств (5), (6) и соответствующих им подстановок вида (7), которые используются в разделах 3, 4 и 5.

Лемма 1. Для произвольной подстановки $\sigma \in S_n$ справедливы следующие предложения:

- (1) набор подмножеств $I_{1,r}^\sigma \subset \mathbf{N}_{1,n}$, $r = 1, 2, 3, 4$, является разбиением множества $\mathbf{N}_{1,n}$ при n четном и множества $\mathbf{N}_{1,n} \setminus \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ при n нечетном,

- (2) набор подмножеств $I_{2,s}^\sigma \subset \mathbf{N}_{1,n}$, $s = 1, 2, 3, 4$, является разбиением множества $\mathbf{N}_{2,n}$ при n нечетном и его подмножества $\mathbf{N}_{2,n} \setminus \lceil (n+1)/2 \rceil$ при n четном,
- (3) для подстановок ψ_σ и φ_σ вида (7), связанных с σ , выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \psi_\sigma(i) &= n+1-i, & \psi_\sigma(n+1-i) &= i, & i &\in I_{1,1}^\sigma, \\ \psi_\sigma(i) &= i, & \psi_\sigma(n+1-i) &= n+1-i, & i &\in \mathbf{N}_{1,n} \setminus (I_{1,1}^\sigma \cup I_{1,2}^\sigma), \\ \varphi_\sigma(j) &= n+2-j, & \varphi_\sigma(n+2-j) &= j, & j &\in I_{2,1}^\sigma, \\ \varphi_\sigma(j) &= j, & \varphi_\sigma(n+2-j) &= n+2-j, & j &\in \mathbf{N}_{1,n} \setminus (I_{2,1}^\sigma \cup I_{2,2}^\sigma). \end{aligned} \quad (8)$$

Лемма 2. Пусть σ произвольная подстановка, тогда в S_n найдется такая последовательность подстановок $\sigma = \rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{i-1}, \rho_i, \dots, \rho_k = \sigma_0$, что

$$\rho_i = \rho_{i-1} \circ \psi_{\rho_{i-1}} \text{ либо } \rho_i = \rho_{i-1} \circ \varphi_{\rho_{i-1}} \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, k, \quad (9)$$

где $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle$, а $\psi_{\rho_{i-1}}$ и $\varphi_{\rho_{i-1}}$ — подстановки вида (7), связанные с подстановкой ρ_{i-1} .

Приведенное в лемме 2 свойство подстановок вида ψ_σ и φ_σ , порождаемых, соответственно, подмножествами $I_{1,1}^\sigma$ и $I_{1,2}^\sigma$, где $\sigma \in S_n$, позволяет сформулировать в терминах приращений условия достижения минимума на подстановке σ_0 , вообще говоря, любого функционала, определенного на симметрической группе S_n .

3. Частичные суммы и приращение функционала $f_{A,B}$

Нашей ближайшей целью является описание в терминах приращений функционала КЗН условий, гарантирующих на подстановке $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle$ достижение его минимума. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 3. Приращением функционала $f_{A,B}$ на произвольно заданной паре подстановок σ, ρ из S_n называется разность

$$\Delta f_{A,B}(\sigma, \rho) = f_{A,B}(\rho) - f_{A,B}(\sigma).$$

Описываемые далее в разделе 5 условия сильной разрешимости КЗН представляют собой условия знакопостоянства приращения $\Delta f_{A,B}$ на парах подстановок $\sigma, \sigma \circ \psi_\sigma$ и $\sigma, \sigma \circ \varphi_\sigma$. Для записи этих условий в виде однородных систем линейных неравенств, связывающих элементы матриц A и B , понадобятся формулы для вычисления приращений функционала $f_{A,B}$ на указанных парах подстановок. При выводе этих формул существенно используются частичные суммы функционала $f_{A,B}$, которые при заданной подстановке ρ порождаются парами подмножеств $I, J \subseteq \mathbf{N}_{1,n}$ и имеют вид

$$f_{A,B}(\rho; I, J) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} b_{\rho(i), \rho(j)}. \quad (10)$$

Свойства частичных сумм, порождаемых подмножествами $I_{q,r}^\sigma$, где $q = 1, 2$, $r = 1, 2, 3, 4$, и подстановками $\sigma, \rho_1 = \sigma \circ \psi_\sigma, \rho_2 = \sigma \circ \varphi_\sigma$ приводятся в следующих двух утверждениях.

Лемма 3. Пусть $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\sigma \in S_n$ и ψ_σ , φ_σ — подстановки вида (7), связанные с σ . Тогда для частичных сумм вида (10), порожденных подмножествами $I_{q,r}^\sigma$, $r = 1, 2, 3, 4$, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,q} &= \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 (f_{A,B}(\rho_q; I_{q,r}^\sigma, I_{q,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma; I_{q,r}^\sigma, I_{q,s}^\sigma)) \\ &= \sum_{i \in I_{q,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{q,1}^\sigma} ((a_{n+q-i, n+q-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+q-i), \sigma(n+q-j)}) \\ &\quad + (a_{n+q-i, j} - a_{i, n+q-j})(b_{\sigma(i), \sigma(n+q-j)} - b_{\sigma(n+q-i), \sigma(j)})), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{2,q} &= \sum_{r=1}^2 \sum_{s=3}^4 (f_{A,B}(\rho_q; I_{q,r}^\sigma, I_{q,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma; I_{q,r}^\sigma, I_{q,s}^\sigma)) \\ &= \sum_{i \in I_{q,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{q,3}^\sigma} ((a_{n+q-i, n+q-j} - a_{i, n+q-j})(b_{\sigma(i), \sigma(n+q-j)} - b_{\sigma(n+q-i), \sigma(n+q-j)}) \\ &\quad + (a_{n+q-i, j} - a_{i, j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+q-i), \sigma(j)})), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{3,q} &= \sum_{r=3}^4 \sum_{s=1}^2 (f_{A,B}(\rho_q; I_{q,r}^\sigma, I_{q,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma; I_{q,r}^\sigma, I_{q,s}^\sigma)) \\ &= \sum_{i \in I_{q,3}^\sigma} \sum_{j \in I_{q,1}^\sigma} ((a_{n+q-i, n+q-j} - a_{n+q-i, j})(b_{\sigma(n+q-i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+q-i), \sigma(n+q-j)}) \\ &\quad + (a_{i, n+q-j} - a_{i, j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(i), \sigma(n+q-j)})), \end{aligned} \quad (13)$$

где $q = 1, 2$, $\rho_1 = \sigma \circ \psi_\sigma$ и $\rho_2 = \sigma \circ \varphi_\sigma$.

Доказательство. Справедливость равенств (11)–(13) при $q = 1$ и $q = 2$ устанавливается идентичным образом, поэтому подробное доказательство проводится только для первого случая. Пусть $q = 1$ и $\rho_1 = \sigma \circ \psi_\sigma$, тогда записав в явном виде с помощью (10) частичные суммы, входящие в $\Sigma_{1,1}$, видим, что

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,1} &= f_{A,B}(\rho_1; I_{1,1}^\sigma, I_{1,1}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma; I_{1,1}^\sigma, I_{1,1}^\sigma) + f_{A,B}(\rho_1; I_{1,1}^\sigma, I_{1,2}^\sigma) \\ &\quad - f_{A,B}(\sigma; I_{1,1}^\sigma, I_{1,2}^\sigma) + f_{A,B}(\rho_1; I_{1,2}^\sigma, I_{1,1}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma; I_{1,2}^\sigma, I_{1,1}^\sigma) \\ &\quad + f_{A,B}(\rho_1; I_{1,2}^\sigma, I_{1,2}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma; I_{1,2}^\sigma, I_{1,2}^\sigma) \\ &= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{i,j} b_{\rho_1(i), \rho_1(j)} - a_{i,j} b_{\sigma(i), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{l \in I_{1,2}^\sigma} (a_{i,l} b_{\rho_1(i), \rho_1(l)} - a_{i,l} b_{\sigma(i), \sigma(l)}) \\ &\quad + \sum_{k \in I_{1,2}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{k,j} b_{\rho_1(k), \rho_1(j)} - a_{k,j} b_{\sigma(k), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{k \in I_{1,2}^\sigma} \sum_{l \in I_{1,2}^\sigma} (a_{k,l} b_{\rho_1(k), \rho_1(l)} - a_{k,l} b_{\sigma(k), \sigma(l)}). \end{aligned} \quad (14)$$

В силу определения подмножеств $I_{1,2}^\sigma$, $I_{1,2}^\sigma$ (см. (5)), включения $l \in I_{1,2}^\sigma$ и $k \in I_{1,2}^\sigma$ равносильны соотношениям $l = n + 1 - j$, где $j \in I_{1,1}^\sigma$ и $k = n + 1 - i$, где $i \in I_{1,1}^\sigma$.

Следовательно, в силу (8) должны выполняться равенства

$$\begin{aligned}\rho_1(i) &= \sigma \circ \psi_\sigma(i) = \sigma(n+1-i), & \rho_1(j) &= \sigma \circ \psi_\sigma(j) = \sigma(n+1-j), \\ \rho_1(l) &= \sigma \circ \psi_\sigma(n+1-j) = \sigma(j), & \rho_1(k) &= \sigma \circ \psi_\sigma(n+1-i) = \sigma(i)\end{aligned}$$

для всех $i, j \in I_{1,1}^\sigma$ и $k, l \in I_{1,2}^\sigma$. Подставляя в четыре последние суммы из (14) вместо k и l , соответственно, $n+1-j$ и $n+1-i$ с последующей заменой включений $l \in I_{1,2}^\sigma$ и $k \in I_{1,2}^\sigma$ на $j \in I_{1,1}^\sigma$ и $i \in I_{1,1}^\sigma$ $\rho_1(i)$, а вместо $\rho_1(i)$, $\rho_1(j)$, $\rho_1(k)$, $\rho_1(l)$ их найденные новые значения, после несложных преобразований получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}\Sigma_{1,1} &= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{i,j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} - a_{i,j} b_{\sigma(i), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{i,n+1-j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)} - a_{i,n+1-j} b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{n+1-i,j} b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} - a_{n+1-i,j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{n+1-i,n+1-j} b_{\sigma(i), \sigma(j)} - a_{n+1-i,n+1-j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ &= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} ((a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ &\quad + (a_{n+1-i,j} - a_{i,n+1-j})(b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)} - b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)})),\end{aligned}$$

из которой следует справедливость равенств (11) при $q = 1$.

Выписывая, как и выше, в явном виде частные суммы, входящие в $\Sigma_{2,1}$, и проводя аналогичные преобразования, убеждаемся в справедливости цепочки равенств

$$\begin{aligned}\Sigma_{2,1} &= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,3}^\sigma} (a_{i,j} b_{\rho_1(i), \rho_1(j)} - a_{i,j} b_{\sigma(i), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{l \in I_{1,4}^\sigma} (a_{i,l} b_{\rho_1(i), \rho_1(l)} - a_{i,l} b_{\sigma(i), \sigma(l)}) \\ &\quad + \sum_{k \in I_{1,2}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,3}^\sigma} (a_{k,j} b_{\rho_1(k), \rho_1(j)} - a_{k,j} b_{\sigma(k), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{k \in I_{1,2}^\sigma} \sum_{l \in I_{1,4}^\sigma} (a_{k,l} b_{\rho_1(k), \rho_1(l)} - a_{k,l} b_{\sigma(k), \sigma(l)}) \\ &= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,3}^\sigma} (a_{i,j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)} - a_{i,j} b_{\sigma(i), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,3}^\sigma} (a_{i,n+1-j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} - a_{i,n+1-j} b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,3}^\sigma} (a_{n+1-i,j} b_{\sigma(i), \sigma(j)} - a_{n+1-i,j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,3}^\sigma} (a_{n+1-i,n+1-j} b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} - a_{n+1-i,n+1-j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)})\end{aligned}$$

$$= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,3}^\sigma} ((a_{n+1-i, n+1-j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ + (a_{n+1-i, j} - a_{i, j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)})),$$

так как ввиду (5) включения $k \in I_{1,2}^\sigma$ и $l \in I_{1,4}^\sigma$ равносильны соотношениям $k = n+1-i$, $i \in I_{1,1}^\sigma$ и $l = n+1-j$, $j \in I_{1,3}^\sigma$, а в силу (8) имеют место равенства

$$\begin{aligned} \rho_1(i) &= \sigma \circ \psi_\sigma(i) = \sigma(n+1-i), & \rho_1(j) &= \sigma \circ \psi_\sigma(j) = \sigma(j), \\ \rho_1(l) &= \sigma \circ \psi_\sigma(n+1-j) = \sigma(n+1-j), & \rho_1(k) &= \sigma \circ \psi_\sigma(n+1-i) = \sigma(i). \end{aligned}$$

Таким образом доказана справедливость (12) при $q = 1$.

Для завершения доказательства леммы 3 осталось убедиться в справедливости (13) при $q = 1$. По определению

$$I_{1,2}^\sigma = \{l = n+1-j \mid j \in I_{1,1}^\sigma\}, \quad I_{1,4}^\sigma = \{k = n+1-i \mid i \in I_{1,3}^\sigma\}.$$

Следовательно, в силу (8) для $i \in I_{1,3}^\sigma$, $k \in I_{1,4}^\sigma$ и $j \in I_{1,1}^\sigma$, $l \in I_{1,2}^\sigma$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \rho_1(i) &= \sigma \circ \psi_\sigma(i) = \sigma(i), & \rho_1(j) &= \sigma \circ \psi_\sigma(j) = \sigma(n+1-j), \\ \rho_1(k) &= \sigma \circ \psi_\sigma(n+1-i) = \sigma(n+1-i), & \rho_1(l) &= \sigma \circ \psi_\sigma(n+1-j) = \sigma(j). \end{aligned}$$

Записав далее $\Sigma_{3,1}$ с помощью (10) в виде двойных сумм и сделав в них замены индексов суммирования k, l , на $n+1-i, n+1-j$, включений $k \in I_{1,4}^\sigma$, $l \in I_{1,2}^\sigma$ на $i \in I_{1,3}^\sigma$, $j \in I_{1,1}^\sigma$ и индексов $\rho_1(i)$, $\rho_1(j)$, $\rho_1(k)$, $\rho_1(l)$ элементов матриц найденными значениями, посредством простых преобразований убеждаемся в справедливости цепочки равенств

$$\begin{aligned} \Sigma_{3,1} &= \sum_{i \in I_{1,3}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{i,j} b_{\rho_1(i), \rho_1(j)} - a_{i,j} b_{\sigma(i), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,3}^\sigma} \sum_{l \in I_{1,2}^\sigma} (a_{i,l} b_{\rho_1(i), \rho_1(l)} - a_{i,l} b_{\sigma(i), \sigma(l)}) \\ &\quad + \sum_{k \in I_{1,4}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{k,j} b_{\rho_1(k), \rho_1(j)} - a_{k,j} b_{\sigma(k), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{k \in I_{1,4}^\sigma} \sum_{l \in I_{1,2}^\sigma} (a_{k,l} b_{\rho_1(k), \rho_1(l)} - a_{k,l} b_{\sigma(k), \sigma(l)}) \\ &= \sum_{i \in I_{1,3}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{i,j} b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} - a_{i,j} b_{\sigma(i), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,3}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{i, n+1-j} b_{\sigma(i), \sigma(j)} - a_{i, n+1-j} b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,3}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{n+1-i, j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} - a_{n+1-i, j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{1,3}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} (a_{n+1-i, n+1-j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)} - a_{n+1-i, n+1-j} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ &= \sum_{i \in I_{1,3}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} ((a_{n+1-i, n+1-j} - a_{n+1-i, j})(b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ &\quad + (a_{i, n+1-j} - a_{i, j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)})), \end{aligned}$$

из которой следует справедливость равенств (13) при $q = 1$. Выше отмечалось, что доказательство леммы 3 при $q = 2$ аналогично случаю $q = 1$, поэтому ее доказательство можно считать завершенным.

При выводе формул, выражающих приращения $\Delta f_{A,B}(\sigma, \rho_q)$ через частичные суммы вида (10), используются декартовы произведения

$$I_{q,r}^\sigma \times I_{q,s}^\sigma = \{\langle i, j \rangle \mid i \in I_{q,r}^\sigma, j \in I_{q,s}^\sigma\},$$

где $q = 1, 2$ и $r, s = 1, 2, 3, 4$. Чтобы унифицировать запись этих формул при различных значениях q дополним $I_{2,3}^\sigma$ единицей при любом n , $I_{1,4}^\sigma$ — элементом $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ при n нечетном, а к $I_{2,4}^\sigma$ добавим элемент $\lceil (n+1)/2 \rceil$ при n четном. Дополненные четверки подмножеств в дальнейшем обозначаются через $\bar{I}_{q,r}^\sigma$, $r = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, по определению

$$\begin{aligned} \bar{I}_{1,4}^\sigma &= I_{1,4}^\sigma \cup \{\lfloor (n+1)/2 \rfloor\} \text{ при } n \text{ нечетном,} & \bar{I}_{2,3}^\sigma &= I_{2,3}^\sigma \cup \{1\}, \\ \bar{I}_{2,4}^\sigma &= I_{2,4}^\sigma \cup \{\lceil (n+1)/2 \rceil\} \text{ при } n \text{ четном,} & \bar{I}_{q,r}^\sigma &= I_{q,r}^\sigma \text{ при } \langle q, r \rangle \neq \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

В дальнейшем декартово произведение $\mathbf{N}_{1,n} \times \mathbf{N}_{1,n}$ для упрощения обозначается через $\mathcal{N}$.

Следующее вспомогательное утверждение устанавливает связь между приращениями $\Delta f_{A,B}(\sigma, \rho_q)$ и частичными суммами вида (10), порожденными дополненными четверками подмножеств $\bar{I}_{q,r}^\sigma$, $r = 1, 2, 3, 4$, где $q = 1, 2$.

Лемма 4. Пусть $\sigma \in S_n$, ψ_σ и φ_σ — подстановки вида (7), $\bar{I}_{1,r}^\sigma$, $r = 1, 2, 3, 4$, — дополненные подмножества вида (15). Тогда приращение $\Delta f_{A,B}(\sigma, \rho_q)$ определяется равенством

$$\Delta f_{A,B}(\sigma, \rho_q) = \Sigma'_{1,q} + \Sigma'_{2,q} + \Sigma'_{3,q},$$

в котором $q = 1, 2$, $\rho_1 = \sigma \circ \psi_\sigma$, $\rho_2 = \sigma \circ \varphi_\sigma$, а суммы правой части имеют вид

$$\Sigma'_{1,q} = \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 (f_{A,B}(\rho_q, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma)), \quad (16)$$

$$\Sigma'_{2,q} = \sum_{r=1}^2 \sum_{s=3}^4 (f_{A,B}(\rho_q, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma)), \quad (17)$$

$$\Sigma'_{3,q} = \sum_{r=3}^4 \sum_{s=1}^2 (f_{A,B}(\rho_q, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma) - (f_{A,B}(\sigma, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma))). \quad (18)$$

Доказательство. Из предложений 1, 2 леммы 1 и соотношений (15) следует, что независимо от четности n подмножества $\bar{I}_{q,r}^\sigma$, $r = 1, 2, 3, 4$, образуют разбиение множества $\mathbf{N}_{1,n}$ при $q = 1, 2$, то есть $\mathbf{N}_{1,n} = \bigcup_{r=1}^4 \bar{I}_{q,r}^\sigma$, откуда следует справедливость равенств

$$\mathcal{N} = \mathbf{N}_{1,n} \times \mathbf{N}_{1,n} = \left(\bigcup_{r=1}^4 \bar{I}_{q,r}^\sigma \right) \times \left(\bigcup_{r=1}^4 \bar{I}_{q,r}^\sigma \right) = \bigcup_{r=1}^4 \bigcup_{s=1}^4 \bar{I}_{q,r}^\sigma \times \bar{I}_{q,s}^\sigma.$$

Нетрудно проверить, что попарное непересечение подмножеств $\bar{I}_{q,r}^\sigma$, $r = 1, 2, 3, 4$, влечет попарное непересечение декартовых произведений $\bar{I}_{q,r}^\sigma \times \bar{I}_{q,s}^\sigma \subset \mathcal{N}$ для всех $r, s = 1, 2, 3, 4$

и $q = 1, 2$. Таким образом, с учетом приведенной выше цепочки равенств указанные декартовы произведения образуют разбиение $\mathcal{N}$ при $q = 1, 2$ и, следовательно, значение функционала $f_{A,B}(\rho)$ на произвольной подстановке ρ выражается в виде частичных сумм

$$\begin{aligned}
 f_{A,B}(\rho) &= \sum_{\langle i,j \rangle \in \mathcal{N}} a_{i,j} b_{\rho(i),\rho(j)} \\
 &= \sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 \left(\sum_{\langle i,j \rangle \in \bar{I}_{q,r}^\sigma \times \bar{I}_{q,s}^\sigma} a_{i,j} b_{\rho(i),\rho(j)} \right) \\
 &= \sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 \left(\sum_{i \in \bar{I}_{q,r}^\sigma} \sum_{j \in \bar{I}_{q,s}^\sigma} a_{i,j} b_{\rho(i),\rho(j)} \right) \\
 &= \sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 f_{A,B}(\rho; I_{q,r}^\sigma, I_{q,s}^\sigma). \tag{19}
 \end{aligned}$$

Далее, так как при $q = 1, 2$ справедливы включения $\bar{I}_{q,3}^\sigma \cup \bar{I}_{q,4}^\sigma \subseteq \mathbf{N}_{1,n} \setminus (\bar{I}_{q,1}^\sigma \cup \bar{I}_{q,2}^\sigma)$, в силу (8) для подстановки ρ_q имеют место равенства $\rho_q(i) = \sigma(i)$, $\rho_q(j) = \sigma(j)$ при $i \in \bar{I}_{q,r}^\sigma$, $j \in \bar{I}_{q,s}^\sigma$, $r, s = 3, 4$, из которых, в свою очередь, следует цепочка равенств

$$\begin{aligned}
 f_{A,B}(\rho_q, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma) &= \sum_{i \in \bar{I}_{q,r}^\sigma} \sum_{j \in \bar{I}_{q,s}^\sigma} a_{i,j} b_{\rho_q(i),\rho_q(j)} \\
 &= \sum_{i \in \bar{I}_{q,r}^\sigma} \sum_{j \in \bar{I}_{q,s}^\sigma} a_{i,j} b_{\sigma(i),\sigma(j)} = f_{A,B}(\sigma, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma). \tag{20}
 \end{aligned}$$

Выразив значения функционала $f_{A,B}(\rho_q)$ и $f_{A,B}(\sigma)$ с помощью (19) через частичные суммы вида (10) и вычислив затем с учетом (20) разность $f_{A,B}(\rho_q) - f_{A,B}(\sigma)$, убеждаемся, что

$$\begin{aligned}
 \Delta f_{A,B}(\sigma, \rho_q) &= f_{A,B}(\rho_q) - f_{A,B}(\sigma) \\
 &= \sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 (f_{A,B}(\rho_q, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma)) \\
 &= \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 (f_{A,B}(\rho_q, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma)) \\
 &\quad + \sum_{r=1}^2 \sum_{s=3}^4 (f_{A,B}(\rho_q, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma)) \\
 &\quad + \sum_{r=3}^4 \sum_{s=1}^2 (f_{A,B}(\rho_q, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, \bar{I}_{q,r}^\sigma, \bar{I}_{q,s}^\sigma)) \\
 &= \Sigma'_{1,q} + \Sigma'_{2,q} + \Sigma'_{3,q}
 \end{aligned}$$

при $q = 1, 2$, откуда следует справедливость леммы 4.

4. Условия знакопостоянства приращений функционала $f_{A,B}$

В данном разделе в терминах приращений формулируются условия достижения минимума функционала $f_{A,B}$ на подстановке $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle$, которые являются одновременно условиями знакопостоянства приращений на парах подстановок вида σ , $\sigma \circ \psi_\sigma$ и σ , $\sigma \circ \varphi_\sigma$. С помощью лемм 3 и 4 эти условия записываются в виде однородных систем неравенств, связывающих между собой элементы матриц $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$.

Теорема 1. Пусть матрицы $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$ таковы, что для произвольной подстановки σ из S_n выполняются неравенства

$$\Delta f_{A,B}(\sigma, \sigma \circ \psi_\sigma) \leq 0, \quad \Delta f_{A,B}(\sigma, \sigma \circ \varphi_\sigma) \leq 0, \quad (21)$$

где ψ_σ и φ_σ — подстановки вида (7), связанные с σ . Тогда подстановка σ_0 минимизирует функционал $f_{A,B}$ на симметрической группе S_n .

Доказательство. Пусть σ — произвольная подстановка, тогда в силу леммы 2 для нее существует конечная последовательность подстановок $\sigma = \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \rho_i, \dots, \rho_k = \sigma_0$, такая, что $\rho_i = \rho_{i-1} \circ \psi_{\rho_{i-1}}$ либо $\rho_i = \rho_{i-1} \circ \varphi_{\rho_{i-1}}$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Следовательно, для пары подстановок σ, σ_0 справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} f_{A,B}(\sigma_0) - f_{A,B}(\sigma) &= \sum_{i=1}^k (f_{A,B}(\rho_i) - f_{A,B}(\rho_{i-1})) = \sum_{i=1}^k (f_{A,B}(\rho_{i-1} \circ \omega_{i-1}) - f_{A,B}(\rho_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^k \Delta f_{A,B}(\rho_{i-1}, \rho_{i-1} \circ \omega_{i-1}), \end{aligned} \quad (22)$$

в которой $\omega_{i-1} = \psi_{\rho_{i-1}}$ либо $\omega_{i-1} = \varphi_{\rho_{i-1}}$. Так как матрицы A, B гарантируют неположительность приращений функционала $f_{A,B}$ на парах подстановок вида $\sigma, \sigma \circ \psi_\sigma$ и $\sigma, \sigma \circ \varphi_\sigma$, для пар соседних членов указанной последовательности должны выполняться неравенства $\Delta f_{A,B}(\rho_{i-1}, \rho_{i-1} \circ \omega_{i-1}) \leq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Следствием этих неравенств является, очевидно, неравенство

$$\sum_{i=1}^k \Delta f_{A,B}(\rho_{i-1}, \rho_{i-1} \circ \omega_{i-1}) \leq 0,$$

из которого и (22) вытекает справедливость неравенства $f_{A,B}(\sigma_0) \leq f_{A,B}(\sigma)$ для произвольной подстановки σ из S_n . Таким образом, теорема 1 доказана.

Ниже приводятся условия, накладываемые на вид элементов матриц A и B , которые гарантируют неположительность приращений функционала $f_{A,B}$ на паре подстановок $\sigma, \sigma \circ \psi_\sigma$, то есть выполнение неравенства $\Delta f_{A,B}(\sigma, \sigma \circ \psi_\sigma) \leq 0$ для произвольной подстановки σ .

Теорема 2. Пусть $B = (b_{i,j})$ — неубывающая неполная матрица анти-Монжа, а $A = (a_{i,j})$ является 1-аддитивно невозрастающей матрицей, элементы которой дополнительно удовлетворяют неравенствам

$$a_{n+1-i, n+1-j} - a_{i, n+1-j} \leq 0, \quad 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor, \quad 1 \leq j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor, \quad i \neq j, \quad (23)$$

$$a_{n+1-i, n+1-j} - a_{n+1-i, j} \leq 0, \quad 1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor, \quad 1 \leq i \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor, \quad i \neq j. \quad (24)$$

Тогда для произвольной подстановки σ из симметрической группы S_n выполняются неравенства $\Delta f_{A,B}(\sigma, \rho_1) \leq 0$, где $\rho_1 = \sigma \circ \psi_\sigma$.

Доказательство. Пусть σ — произвольная подстановка из S_n , тогда в силу леммы 4 должны выполняться равенства

$$\Delta f_{A,B}(\sigma, \rho_q) = \Sigma'_{1,1} + \Sigma'_{2,1} + \Sigma'_{3,1},$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma'_{1,1} &= \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 (f_{A,B}(\rho_1, \bar{I}_{1,r}^\sigma, \bar{I}_{1,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, \bar{I}_{1,r}^\sigma, \bar{I}_{1,s}^\sigma)), \\ \Sigma'_{2,1} &= \sum_{r=1}^2 \sum_{s=3}^4 (f_{A,B}(\rho_1, \bar{I}_{1,r}^\sigma, \bar{I}_{1,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, \bar{I}_{1,r}^\sigma, \bar{I}_{1,s}^\sigma)), \\ \Sigma'_{3,1} &= \sum_{r=3}^4 \sum_{s=1}^2 (f_{A,B}(\rho_1, \bar{I}_{1,r}^\sigma, \bar{I}_{1,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, \bar{I}_{1,r}^\sigma, \bar{I}_{1,s}^\sigma)),\end{aligned}$$

из которых с учетом соотношений (15) и леммы 3 следует справедливость формулы

$$\Delta f_{A,B}(\sigma, \sigma \circ \psi_\sigma) = \begin{cases} \Sigma_{1,1} + \Sigma_{2,1} + \Sigma_{3,1} & \text{при } n \text{ четном,} \\ \Sigma_{1,1} + \Sigma_{2,1} + \Sigma_{3,1} + \Sigma_{4,1} + \Sigma_{5,1} & \text{при } n \text{ нечетном,} \end{cases} \quad (25)$$

где суммы $\Sigma_{1,1}$, $\Sigma_{2,1}$, $\Sigma_{3,1}$ получаются из (11), (12), (13) при $q = 1$, и

$$\begin{aligned}\Sigma_{4,1} &= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} (a_{n+1-i, \lfloor (n+1)/2 \rfloor} - a_{i, \lfloor (n+1)/2 \rfloor}) (b_{\sigma(i), \sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)}), \\ \Sigma_{5,1} &= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} (a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor, n+1-i} - a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor, i}) (b_{\sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor), \sigma(i)} - b_{\sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor), \sigma(n+1-i)}).\end{aligned} \quad (26)$$

Действительно, в силу (15) при n четном имеют место равенства $\bar{I}_{1,r}^\sigma = I_{1,r}^\sigma$, $r = 1, 2, 3, 4$, откуда следует справедливость (25) в рассматриваемом случае. Если n нечетное, то $\bar{I}_{1,r}^\sigma = I_{1,r}^\sigma$, $r = 1, 2, 3$ и $\bar{I}_{1,4}^\sigma = I_{1,4}^\sigma \cup \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Следовательно, для первой суммы справедливо равенство $\Sigma'_{1,1} = \Sigma_{1,1}$, а две оставшиеся суммы $\Sigma'_{2,1}$ и $\Sigma'_{3,1}$ с учетом (15), (12) и (13) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\Sigma'_{2,1} &= \sum_{r=1}^2 (f_{A,B}(\rho_1, I_{1,r}^\sigma, I_{1,3}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, I_{1,r}^\sigma, I_{1,3}^\sigma)) \\ &\quad + \sum_{r=1}^2 (f_{A,B}(\rho_1, I_{1,r}^\sigma, I_{1,4}^\sigma \cup \lfloor (n+1)/2 \rfloor) - f_{A,B}(\sigma, I_{1,r}^\sigma, I_{1,4}^\sigma \cup \lfloor (n+1)/2 \rfloor)) \\ &= \Sigma_{2,1} + \sum_{r=1}^2 (f_{A,B}(\rho_1, I_{1,r}^\sigma, \lfloor (n+1)/2 \rfloor) - f_{A,B}(\sigma, I_{1,r}^\sigma, \lfloor (n+1)/2 \rfloor)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma'_{3,1} &= \sum_{s=1}^2 (f_{A,B}(\rho_1, I_{1,3}^\sigma, I_{1,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, I_{1,3}^\sigma, I_{1,s}^\sigma)) \\
&\quad + \sum_{s=1}^2 (f_{A,B}(\rho_1, I_{1,4}^\sigma \cup \lfloor (n+1)/2 \rfloor, I_{1,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, I_{1,4}^\sigma \cup \lfloor (n+1)/2 \rfloor, I_{1,s}^\sigma)) \\
&= \Sigma_{3,1} + \sum_{r=1}^2 (f_{A,B}(\rho_1, \lfloor (n+1)/2 \rfloor, I_{1,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, \lfloor (n+1)/2 \rfloor, I_{1,r}^\sigma)).
\end{aligned}$$

Используя определения подмножеств $I_{1,1}^\sigma, I_{1,2}^\sigma$ (см. (4)), частичных сумм функционала $f_{A,B}$ (см. (10)) и равенство (8) нетрудно убедиться в выполнении равенств

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^2 \sum_{r=1}^2 (f_{A,B}(\rho_1, I_{1,r}^\sigma, \lfloor (n+1)/2 \rfloor) - f_{A,B}(\sigma, I_{1,r}^\sigma, \lfloor (n+1)/2 \rfloor)) &= \Sigma_{4,1}, \\
\sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 (f_{A,B}(\rho_1, \lfloor (n+1)/2 \rfloor, I_{1,s}^\sigma) - f_{A,B}(\sigma, \lfloor (n+1)/2 \rfloor, I_{1,s}^\sigma)) &= \Sigma_{5,1},
\end{aligned}$$

из которых и предшествующих равенств следует справедливость (25) при n нечетном.

Ввиду идентичности доказательства двух последних равенств убедимся в справедливости только первого из них. Записав в явном виде с помощью (10) частичные суммы, входящие в правую часть первого равенства, и проведя несложные вычисления, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^2 (f_{A,B}(\rho_1, I_{1,r}^\sigma, \lfloor (n+1)/2 \rfloor) - f_{A,B}(\sigma, I_{1,r}^\sigma, \lfloor (n+1)/2 \rfloor)) \\
&= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} (a_{i, \lfloor (n+1)/2 \rfloor} b_{\rho_1(i), \rho_1(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)} - a_{i, \lfloor (n+1)/2 \rfloor} b_{\sigma(i), \sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)}) \\
&\quad + \sum_{j \in I_{1,2}^\sigma} (a_{j, \lfloor (n+1)/2 \rfloor} b_{\rho_1(j), \rho_1(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)} - a_{j, \lfloor (n+1)/2 \rfloor} b_{\sigma(j), \sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)}) \\
&= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} (a_{i, \lfloor (n+1)/2 \rfloor} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)} - a_{i, \lfloor (n+1)/2 \rfloor} b_{\sigma(i), \sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)}) \\
&\quad + a_{n+1-i, \lfloor (n+1)/2 \rfloor} b_{\sigma(i), \sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)} - a_{n+1-i, \lfloor (n+1)/2 \rfloor} b_{\sigma(n+1-i), \sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)}) \\
&= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} (a_{n+1-i, \lfloor (n+1)/2 \rfloor} - a_{i, \lfloor (n+1)/2 \rfloor}) (b_{\sigma(i), \sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)}),
\end{aligned}$$

так как включение $j \in I_{1,2}^\sigma$ равносильно тому, что $j = n+1-i$, где $i \in I_{1,1}^\sigma$, а $\rho_1(i) = \sigma \circ \psi_\sigma(i) = \sigma(n+1-i)$, $\rho_1(n+1-i) = \sigma \circ \psi_\sigma(n+1-i) = \sigma(i)$ для всех $i \in I_{1,1}^\sigma$ и $\rho_1(\lfloor (n+1)/2 \rfloor) = \sigma \circ \psi_\sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor) = \sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)$ в силу (8).

Из полученной формулы (25) следует, что для доказательства теоремы 2 достаточно убедиться в справедливости неравенств $\Sigma_{i,1} \leq 0$, $i = 1, 2, 3$, и дополнительно $\Sigma_{4,1} \leq 0$, $\Sigma_{5,1} \leq 0$ при n нечетном. Покажем, что $\Sigma_{1,1} \leq 0$. Согласно лемме 3 из (11) при $q = 1$ вытекает равенство

$$\begin{aligned}
\Sigma_{1,1} &= \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} ((a_{n+1-i, n+1-j} - a_{i,j}) (b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\
&\quad + (a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j}) (b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)})).
\end{aligned}$$

Очевидно, сумма $\Sigma_{1,1}$ неположительна, если неположителен ее общий член

$$\Delta_{1,1}(\sigma; i, j) = (a_{n+1-i, n+1-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ + (a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)}),$$

где $i, j \in I_{1,1}^\sigma$, который, как показывает проверка, можно записать в следующем виде:

$$\Delta_{1,1}(\sigma; i, j) = (a_{n+1-i, n+1-j} - a_{i,j} + a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ - (a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ + (a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)}) \\ = (a_{n+1-i, n+1-j} + a_{n+1-i, j} - a_{i,j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ + (a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(i), \sigma(j)} + b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} \\ - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)}).$$

Для $i, j \in I_{1,1}^\sigma$ в силу соотношения (5) выполняются неравенства $1 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ и $\sigma(n+1-i) < \sigma(i)$, $\sigma(n+1-j) < \sigma(j)$. Из первого двойного неравенства и 1-аддитивно невозрастания по столбцам матрицы $A = (a_{i,j})$ следует справедливость неравенства

$$a_{n+1-i, n+1-j} + a_{n+1-i, j} - a_{i,j} - a_{i, n+1-j} \leq 0, \quad (27)$$

а из второго, третьего и неубывания матрицы $B = (b_{i,j})$ вытекают неравенства

$$b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)} \geq 0, \quad b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} \geq 0, \\ b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} \geq 0, \quad b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)} \geq 0. \quad (28)$$

Из соотношений (27), (28) следует, что общий член $\Delta_{1,1}(\sigma; i, j)$ неположителен при $a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j} \geq 0$, так как в этом случае

$$(a_{n+1-i, n+1-j} + a_{n+1-i, j} - a_{i,j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \leq 0, \\ (a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(i), \sigma(j)} + b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)}) \leq 0,$$

то есть неположительны оба его слагаемых. Если $a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j} < 0$, то записав общий член $\Delta_{1,1}(\sigma; i, j)$ суммы $\Sigma_{1,1}$ в следующем виде:

$$\Delta_{1,1}(\sigma; i, j) = ((a_{n+1-i, n+1-j} - a_{i,j}) - (a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j})) \\ \times (b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ + (a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ + (a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)}) \\ = (a_{n+1-i, n+1-j} + a_{i, n+1-j} - a_{i,j} - a_{n+1-i, j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}) \\ + (a_{n+1-i, j} - a_{i, n+1-j})(b_{\sigma(i), \sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(j)} + b_{\sigma(i), \sigma(n+1-j)} \\ - b_{\sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)}),$$

нетрудно убедиться в неположительности последних слагаемых. В силу неравенств $1 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ и 1-аддитивного невозрастания по строкам матрицы $A = (a_{i,j})$ должно выполняться неравенство

$$a_{n+1-i, n+1-j} + a_{i, n+1-j} - a_{i,j} - a_{n+1-i, j} \leq 0,$$

из которого и (28) следует неравенство

$$(a_{n+1-i,n+1-j} + a_{i,n+1-j} - a_{i,j} - a_{n+1-i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \leq 0,$$

то есть первое слагаемое общего члена $\Delta_{1,1}(\sigma; i, j)$ неположительно. Далее, в силу неубывания по столбцам матрицы $B = (b_{i,j})$ должны выполняться неравенства

$$b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} \geq 0, \quad b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} \geq 0,$$

следствием этих неравенств и неравенства

$$a_{n+1-i,j} - a_{i,n+1-j} < 0$$

является неравенство

$$(a_{n+1-i,j} - a_{i,n+1-j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} + b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \leq 0,$$

то есть второе слагаемое общего члена суммы $\Sigma_{1,1}$ неположительно. Таким образом, доказана неположительность общего члена этой суммы и, следовательно, $\Sigma_{1,1} \leq 0$.

Убедимся в неположительности суммы $\Sigma_{2,1}$ для рассматриваемых матриц $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$. В силу леммы 3 (см. (12) при $q = 1$) справедливо равенство

$$\Sigma_{2,1} = \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,3}^\sigma} ((a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,n+1-j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) + (a_{n+1-i,j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)})).$$

Следовательно, сумма $\Sigma_{2,1}$ неположительна, если ее общий член

$$\Delta_{2,1}(\sigma; i, j) = (a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,n+1-j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) + (a_{n+1-i,j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)})$$

неположителен для всех $i \in I_{1,1}^\sigma$ и $j \in I_{1,3}^\sigma$.

В силу (5) для $i \in I_{1,1}^\sigma$ и $j \in I_{1,3}^\sigma$ выполняются соотношения $1 \leq i \neq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ и неравенства $\sigma(n+1-i) < \sigma(i)$, $\sigma(j) < \sigma(n+1-j)$, следствиями которых в силу неубывания по столбцам матрицы $B = (b_{i,j})$ являются неравенства

$$b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} \geq 0, \quad b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} \geq 0,$$

Из ограничений (23), ввиду справедливости неравенств $1 \leq i \neq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$, следует неравенство $a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,n+1-j} \leq 0$. Если теперь $a_{n+1-i,j} - a_{i,j} \leq 0$, то с учетом приведенных выше неравенств, имеющих место для элементов матриц A и B , оба слагаемых общего члена суммы $\Sigma_{2,1}$, очевидно, неположительны, что влечет оценку $\Sigma_{2,1} \leq 0$ в рассматриваемом случае.

Если $a_{n+1-i,j} - a_{i,j} > 0$, то, записав общий член $\Delta_{2,1}(\sigma; i, j)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_{2,1}(\sigma; i, j) &= (a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,n+1-j} + a_{n+1-i,j} - a_{i,j}) \\ &\quad \times (b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \\ &\quad - (a_{n+1-i,j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \\ &\quad + (a_{n+1-i,j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)}) \\ &= (a_{n+1-i,n+1-j} + a_{n+1-i,j} - a_{i,n+1-j} - a_{i,j}) \\ &\quad \times (b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \\ &\quad + (a_{n+1-i,j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} \\ &\quad - b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)}), \end{aligned}$$

нетрудно убедиться в его неположительности. Действительно, в силу справедливости неравенства $\sigma(n+1-i) < \sigma(i)$ и неубывания по столбцам матрицы $B = (b_{i,j})$ справедливо неравенство

$$b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} \geq 0,$$

откуда и из (27) следует, что

$$(a_{n+1-i,n+1-j} + a_{n+1-i,j} - a_{i,n+1-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \leq 0,$$

то есть следует неположительность первого слагаемого общего члена $\Delta_{2,1}(\sigma; i, j)$.

Далее, так как $B = (b_{i,j})$ — неполная матрица анти-Монжа, в силу неравенств $\sigma(n+1-i) < \sigma(i)$, $\sigma(j) < \sigma(n+1-j)$ и $\sigma(i), \sigma(n+1-i) \neq \sigma(j), \sigma(n+1-j)$ должно выполняться неравенство

$$b_{\sigma(i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} \leq 0,$$

из которого с учетом неравенства $a_{n+1-i,j} - a_{i,j} > 0$ следует, что

$$(a_{n+1-i,j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)}) \leq 0,$$

то есть следует неположительность второго слагаемого общего члена $\Delta_{2,1}(\sigma; i, j)$. Таким образом, доказана справедливость неравенств $\Delta_{2,1}(\sigma; i, j) \leq 0$ для всех $i \in I_{1,1}^\sigma$, $j \in I_{1,3}^\sigma$, следствием которых является оценка $\Sigma_{2,1} \leq 0$.

Убедимся в неположительности $\Sigma_{3,1}$. В силу леммы 3 (см. (13) при $q = 1$)

$$\begin{aligned} \Sigma_{3,1} = \sum_{i \in I_{1,3}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} & ((a_{n+1-i,n+1-j} - a_{n+1-i,j})(b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \\ & + (a_{i,n+1-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)})). \end{aligned}$$

В приведенном равенстве, в силу определения подмножеств $I_{1,1}^\sigma$, $I_{1,3}^\sigma$ (см. (5)), для индексов суммирования должны выполняться соотношения $1 \leq i \neq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$, а для индексов элементов матриц A и B — неравенства $\sigma(i) < \sigma(n+1-i)$ и $\sigma(n+1-j) < \sigma(j)$. Сумма $\Sigma_{3,1}$, очевидно, будет неположительной, если для ее общего члена справедливы неравенства $\Delta_{3,1}(\sigma; i, j) \leq 0$ для всех $i \in I_{1,3}^\sigma$, $j \in I_{1,1}^\sigma$, где

$$\begin{aligned} \Delta_{3,1}(\sigma; i, j) = & (a_{n+1-i,n+1-j} - a_{n+1-i,j})(b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \\ & + (a_{i,n+1-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)}). \end{aligned}$$

В силу (23) $a_{n+1-i,n+1-j} - a_{n+1-i,j} \leq 0$ для всех $1 \leq i \neq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Так как $\sigma(i) < \sigma(n+1-i)$, $\sigma(n+1-j) < \sigma(j)$ и $B = (b_{i,j})$ — неубывающая по строкам матрица, справедливы неравенства

$$b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} \geq 0, \quad b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} \geq 0.$$

Следствием полученных для элементов матриц A и B неравенств является неравенство

$$(a_{n+1-i,n+1-j} - a_{n+1-i,j})(b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \leq 0,$$

то есть первое слагаемое общего члена $\Delta_{3,1}(\sigma; i, j)$ суммы $\Sigma_{3,1}$ неположительно. Далее, если имеет место неравенство $a_{i,n+1-j} - a_{i,j} \leq 0$, то в силу неравенства

$b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} \geq 0$ второе слагаемое общего члена $\Delta_{3,1}(\sigma; i, j)$ также неположительно. Таким образом, доказана справедливость неравенства $\Delta_{3,1}(\sigma; i, j) \leq 0$ при $a_{i,n+1-j} - a_{i,j} \leq 0$.

Если $a_{i,n+1-j} - a_{i,j} > 0$, то, записав общий член суммы $\Sigma_{3,1}$ в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{3,1}(\sigma; i, j) &= (a_{n+1-i,n+1-j} - a_{n+1-i,j} + a_{i,n+1-j} - a_{i,j}) \\ &\quad \times (b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \\ &\quad - (a_{i,n+1-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \\ &\quad + (a_{i,n+1-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)}) \\ &= (a_{n+1-i,n+1-j} + a_{i,n+1-j} - a_{i,j} - a_{n+1-i,j}) \\ &\quad \times (b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)}) \\ &\quad + (a_{i,n+1-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} \\ &\quad - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)}), \end{aligned}$$

легко убедиться в его неположительности. Из 1-аддитивного невозрастания по строкам матрицы $A = (a_{i,j})$ следует, что

$$a_{n+1-i,n+1-j} - a_{n+1-i,j} + a_{i,n+1-j} - a_{i,j} \leq 0$$

для $1 \leq i \neq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$, откуда и из неравенства

$$b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} \geq 0$$

следует неположительность первого слагаемого рассматриваемого общего члена. Матрица $B = (b_{i,j})$ есть неполная матрица анти-Монжа, поэтому в силу соотношений $\sigma(i) < \sigma(n+1-i)$, $\sigma(n+1-j) < \sigma(j)$ и $\sigma(i)$, $\sigma(n+1-i) \neq \sigma(j)$, $\sigma(n+1-j) \neq \sigma(j)$ имеет место неравенство

$$b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} \leq 0.$$

Из этого неравенства и неравенства $a_{i,n+1-j} - a_{i,j} > 0$ следует неположительность второго слагаемого общего члена $\Delta_{3,1}(\sigma; i, j)$. Таким образом, доказана справедливость неравенства $\Delta_{3,1}(\sigma; i, j) \leq 0$ для произвольных $i \in I_{1,3}^\sigma$ и $j \in I_{1,1}^\sigma$, и, следовательно, неположительность суммы $\Sigma_{3,1}$.

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось убедиться в неположительности сумм $\Sigma_{4,1}$ и $\Sigma_{5,1}$ при n нечетном. Из (26) следует, что

$$\Sigma_{4,1} = \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} (a_{n+1-i,\lfloor (n+1)/2 \rfloor} - a_{i,\lfloor (n+1)/2 \rfloor})(b_{\sigma(i),\sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)}).$$

Так как при n нечетном $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = n+1 - \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, в силу (23) для всех $i \in I_{1,1}^\sigma$ должны выполняться соотношения

$$a_{n+1-i,\lfloor (n+1)/2 \rfloor} - a_{i,\lfloor (n+1)/2 \rfloor} = a_{n+1-i,n+1-\lfloor (n+1)/2 \rfloor} - a_{i,n+1-\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \leq 0.$$

Далее, в силу определения подмножества $I_{1,1}^\sigma$ (см. (5)) для любого i из $I_{1,1}^\sigma$ должно выполняться неравенство $\sigma(n+1-i) < \sigma(i)$, из которого и неубывания по столбцам матрицы $B = (b_{i,j})$ следует справедливость неравенства

$$b_{\sigma(i),\sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)} - b_{\sigma(n+1-i),\sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)} \geq 0.$$

Следствием полученных неравенств является неположительность общего члена суммы $\Sigma_{4,1}$, то есть справедливость неравенства $\Sigma_{4,1} \leq 0$.

По аналогии доказывается неположительность общего члена суммы $\Sigma_{5,1}$, который в силу (26) имеет вид

$$(a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor, n+1-i} - a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor, i})(b_{\sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor), \sigma(i)} - b_{\sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor), \sigma(n+1-i)}).$$

Так как n нечетное, справедливо равенство $n + 1 - \lfloor (n + 1)/2 \rfloor = \lfloor (n + 1)/2 \rfloor$. Следовательно, элементы матрицы A в силу (23) должны удовлетворять для всех $i \in I_{1,1}^\sigma$ соотношениям

$$a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor, n+1-i} - a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor, i} = a_{n+1-\lfloor (n+1)/2 \rfloor, n+1-i} - a_{n+1-\lfloor (n+1)/2 \rfloor, i} \leq 0.$$

Далее, в силу выполнения неравенства $\sigma(n + 1 - i) < \sigma(i)$ для всех $i \in I_{1,1}^\sigma$ и неубывания по строкам матрицы B справедливы неравенства

$$b_{\sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor), \sigma(i)} - b_{\sigma(\lfloor (n+1)/2 \rfloor), \sigma(n+1-i)} \geq 0,$$

из которых и неравенств, имеющих место для элементов матрицы A , следует неположительность общего члена суммы $\Sigma_{5,1}$. Таким образом, доказана справедливость теоремы 2.

Условия знакопостоянства приращений функционала $f_{A,B}$ на парах подстановок σ , $\sigma \circ \varphi_\sigma$ устанавливает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $B = (b_{i,j})$ — неубывающая неполная матрица анти-Монжа, а матрица $A = (a_{i,j})$ 2-аддитивно не убывает и удовлетворяет дополнительно неравенствам

$$a_{i,n+2-j} - a_{i,j} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor, \quad 2 \leq j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor, \quad i \neq j, \quad (29)$$

$$a_{n+2-i,j} - a_{i,j} \geq 0, \quad 1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor, \quad 2 \leq i \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor, \quad i \neq j. \quad (30)$$

Тогда для произвольной подстановки σ из симметрической группы S_n выполняется неравенство $\Delta f_{A,B}(\sigma, \rho_2) \leq 0$, где $\rho_2 = \sigma \circ \psi_\sigma$.

Доказательство. Пусть σ — произвольная подстановка из S_n и φ_σ — подстановка вида (7), связанная с σ . Тогда по аналогии с выводом формул (25) с помощью соотношений (15) и леммы 3 доказывается справедливость равенств

$$\Delta f_{A,B}(\sigma, \sigma \circ \varphi_\sigma) = \Sigma_{1,2} + \Sigma_{2,2} + \Sigma_{3,2} + \Sigma_{4,2} + \Sigma_{5,2}$$

при n нечетном и

$$\Delta f_{A,B}(\sigma, \sigma \circ \varphi_\sigma) = \Sigma_{1,2} + \Sigma_{2,2} + \Sigma_{3,2} + \Sigma_{4,2} + \Sigma_{5,2} + \Sigma_{6,2} + \Sigma_{7,2}$$

при n четном, где суммы $\Sigma_{1,2}$, $\Sigma_{2,2}$, $\Sigma_{3,2}$ получаются из формул (11), (12) и (13) при $q = 2$, а $\Sigma_{4,2}$, $\Sigma_{5,2}$, $\Sigma_{6,2}$, $\Sigma_{7,2}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Sigma_{4,2} &= \sum_{i \in I_{2,1}^\sigma} (a_{n+2-i,1} - a_{i,1})(b_{\sigma(i), \sigma(1)} - b_{\sigma(n+2-i), \sigma(1)}), \\ \Sigma_{5,2} &= \sum_{i \in I_{2,1}^\sigma} (a_{1, n+2-i} - a_{1,i})(b_{\sigma(1), \sigma(i)} - b_{\sigma(1), \sigma(n+2-i)}), \\ \Sigma_{6,2} &= \sum_{i \in I_{2,1}^\sigma} (a_{n+2-i, \lceil (n+1)/2 \rceil} - a_{i, \lceil (n+1)/2 \rceil})(b_{\sigma(i), \sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil)} - b_{\sigma(n+2-i), \sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil)}), \\ \Sigma_{7,2} &= \sum_{i \in I_{2,1}^\sigma} (a_{\lceil (n+1)/2 \rceil, n+2-i} - a_{\lceil (n+1)/2 \rceil, i})(b_{\sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil), \sigma(i)} - b_{\sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil), \sigma(n+2-i)}). \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, для доказательства теоремы 2 достаточно убедиться в справедливости неравенств $\Sigma_{i,2} \leq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, и $\Sigma_{6,2} \leq 0$, $\Sigma_{7,2} \leq 0$ при n четном.

Покажем, что $\Sigma_{1,2} \leq 0$. В силу леммы 3 (см. (11) при $q = 2$) имеет место равенство

$$\Sigma_{1,2} = \sum_{i \in I_{2,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{2,1}^\sigma} (a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) + (a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)}),$$

из которого следует, что $\Sigma_{1,2}$ неположительна, если для ее общего члена $\Delta_{1,2}(\sigma; i, j)$ (выражения, стоящего под знаком суммы) выполняется неравенство

$$\Delta_{1,2}(\sigma; i, j) = (a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) + (a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)}) \leq 0,$$

где $i, j \in I_{2,1}^\sigma$. Запишем общий член рассматриваемой суммы в виде следующих слагаемых:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2}(\sigma; i, j) &= (a_{n+2-i,n+2-j} + a_{n+2-i,j} - a_{i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \\ &\quad - (a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \\ &\quad + (a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)}) \\ &= (a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j} + a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \\ &\quad + (a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)}) \\ &\quad + b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}. \end{aligned}$$

Так как $i, j \in I_{2,1}^\sigma$ (см. (6)), выполняются соотношения $2 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ и $\sigma(i) < \sigma(n+2-i)$, $\sigma(j) < \sigma(n+2-j)$. Из 2-аддитивного неубывания матрицы $A = (a_{i,j})$ и неравенств $2 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ следует неравенство

$$a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j} + a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j} \geq 0.$$

Далее, из неравенств $\sigma(i) < \sigma(n+2-i)$, $\sigma(j) < \sigma(n+2-j)$ и неубывания матрицы $B = (b_{i,j})$ вытекает справедливость соотношений

$$\begin{aligned} b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} &= b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)} \\ &\quad - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} \leq 0, \\ b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Если $a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j} \leq 0$, то следствиями полученных неравенств являются неравенства

$$\begin{aligned} (a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j} + a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) &\leq 0, \\ (a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)}) &\leq 0, \end{aligned}$$

из которых следует неположительность общего члена и, следовательно, неположительность самой суммы $\Sigma_{1,2}$ в рассматриваемом случае.

Если $a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j} > 0$, то, записав общий член в виде

$$\begin{aligned}\Delta_{1,2}(\sigma; i, j) &= ((a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j}) - (a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})) \\ &\quad \times (b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \\ &\quad + (a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \\ &\quad + (a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)}) \\ &= (a_{n+2-i,n+2-j} + a_{i,n+2-j} - a_{i,j} - a_{n+2-i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \\ &\quad + (a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)} + b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} \\ &\quad - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}),\end{aligned}$$

легко убедиться в его неположительности. Из неравенств $2 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ и 2-аддитивного неубывания матрицы $A = (a_{i,j})$ следует, что

$$a_{n+2-i,n+2-j} + a_{i,n+2-j} - a_{i,j} - a_{n+2-i,j} \geq 0,$$

откуда и из ранее доказанного неравенства

$$b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} \leq 0$$

следует неположительность первого слагаемого общего члена суммы $\Sigma_{1,2}$. Далее, так как $\sigma(i) < \sigma(n+2-i)$ и $\sigma(j) < \sigma(n+2-j)$, ввиду неубывания матрицы $B = (b_{i,j})$ выполняются неравенства

$$b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)} \leq 0, \quad b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} \leq 0,$$

следствием которых является неравенство

$$b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)} + b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} \leq 0.$$

Из полученного неравенства и неравенства $a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j} > 0$ следует неотрицательность второго слагаемого общего члена суммы $\Sigma_{1,2}$. Таким образом, доказана справедливость неравенств $\Delta_{1,2}(\sigma; i, j) \leq 0$ для всех $i, j \in I_{2,1}^\sigma$, следствием которых является оценка $\Sigma_{1,2} \leq 0$.

Докажем неположительность суммы $\Sigma_{2,2}$. В силу леммы 3 (см. (12) при $q = 2$)

$$\begin{aligned}\Sigma_{2,2} &= \sum_{i \in I_{2,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{2,3}^\sigma} ((a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \\ &\quad + (a_{n+2-i,j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)})).\end{aligned}$$

Следовательно, оценка $\Sigma_{2,2} \leq 0$ имеет место, если общий член рассматриваемой суммы

$$\begin{aligned}\Delta_{2,2}(\sigma; i, j) &= (a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \\ &\quad + (a_{n+2-i,j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)})\end{aligned}$$

неположителен. Чтобы убедиться в этом, запишем его в равносильном виде

$$\begin{aligned}\Delta_{2,2}(\sigma; i, j) &= (a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,n+2-j} + a_{n+2-i,j} - a_{i,j}) \\ &\quad \times (b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \\ &\quad + (a_{n+2-i,j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} \\ &\quad - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)}).\end{aligned}$$

В силу (6) для $i \in I_{2,1}^\sigma$ и $j \in I_{2,3}^\sigma$ выполняются соотношения $2 \leq i \neq j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ и неравенства $\sigma(i) < \sigma(n+2-i)$, $\sigma(n+2-j) < \sigma(j)$. Из приведенных соотношений, 2-аддитивного неубывания матрицы $A = (a_{i,j})$ и выполнения для ее элементов соотношений (30) следует справедливость неравенств

$$a_{n+2-i,n+2-j} + a_{n+2-i,j} - a_{i,j} - a_{i,n+2-j} \geq 0, \quad a_{n+2-i,j} - a_{i,j} \geq 0. \quad (32)$$

В силу неубывания по столбцам матрицы $B = (b_{i,j})$ и выполнения для нее неполных условий анти-Монжа, следствиями неравенств $\sigma(i) < \sigma(n+2-i)$, $\sigma(n+2-j) < \sigma(j)$ и соотношений $\sigma(i), \sigma(n+2-i) \neq \sigma(j), \sigma(n+2-j)$ являются неравенства

$$b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} \leq 0, \\ b_{\sigma(i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)} \leq 0.$$

Из полученных неравенств и (32) для всех $i \in I_{2,1}^\sigma$ и $j \in I_{2,3}^\sigma$ следует справедливость неравенств

$$(a_{n+2-i,n+2-j} + a_{n+2-i,j} - a_{i,j} - a_{i,n+2-j})(b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \leq 0, \\ (a_{n+2-i,j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)}) \leq 0.$$

Таким образом, доказана неположительность общего члена рассматриваемой суммы, что в свою очередь влечет справедливость неравенства $\Sigma_{2,2} \leq 0$.

Доказательство неположительности суммы

$$\Sigma_{3,2} = \sum_{i \in I_{2,3}^\sigma} \sum_{j \in I_{2,1}^\sigma} ((a_{n+2-i,n+2-j} - a_{n+2-i,j})(b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \\ + (a_{i,n+2-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)})),$$

которая получается из (13) при $q = 2$ проводится аналогичным образом. Для этого общий член суммы $\Sigma_{3,2}$ записывается в виде

$$\Delta_{3,2}(\sigma; i, j) = (a_{n+2-i,n+2-j} + a_{i,n+2-j} - a_{i,j} - a_{n+2-i,j}) \\ \times (b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)}) \\ + (a_{i,n+2-j} - a_{i,j})(b_{\sigma(i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} \\ - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)}).$$

По определению (см. (6)) для произвольных $i \in I_{2,3}^\sigma$ и $j \in I_{2,1}^\sigma$ выполняются соотношения $2 \leq i \neq j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ и $\sigma(n+2-i) < \sigma(i)$, $\sigma(j) < \sigma(n+2-j)$. Из первого из этих соотношений, (29) и 2-аддитивного неубывания по строкам матрицы $A = (a_{i,j})$ следует справедливость неравенств

$$a_{i,n+2-j} - a_{i,j} \geq 0, \quad a_{n+2-i,n+2-j} + a_{i,n+2-j} - a_{i,j} - a_{n+2-i,j} \geq 0 \quad (33)$$

для всех $i \in I_{2,3}^\sigma$ и $j \in I_{2,1}^\sigma$. Далее, из неравенств $\sigma(n+2-i) < \sigma(i)$ и $\sigma(j) < \sigma(n+2-j)$ и соотношений $\sigma(i), \sigma(n+2-i) \neq \sigma(j), \sigma(n+2-j)$, неубывания по строкам матрицы $B = (b_{i,j})$ и выполнения для нее неполных условий анти-Монжа следует справедливость неравенств

$$b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} \leq 0, \\ b_{\sigma(i),\sigma(j)} + b_{\sigma(n+2-i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(i),\sigma(n+2-j)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(j)} \leq 0 \quad (34)$$

для всех $i \in I_{2,3}^\sigma$ и $j \in I_{2,1}^\sigma$. Из полученных неравенств (33) и (34) непосредственно вытекает неотрицательность суммы $\Sigma_{3,2}$.

Для завершения доказательства теоремы 3 осталось убедиться в том, что справедливы неравенства $\Sigma_{j,2} \leq 0$, $j = 4, 5, 6, 7$, которые в силу (31) являются следствиями неравенств

$$(a_{n+2-i,1} - a_{i,1})(b_{\sigma(i),\sigma(1)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(1)}) \leq 0, \quad (35)$$

$$(a_{1,n+2-i} - a_{1,i})(b_{\sigma(1),\sigma(i)} - b_{\sigma(1),\sigma(n+2-i)}) \leq 0, \quad (36)$$

$$(a_{n+2-i, \lceil (n+1)/2 \rceil} - a_{i, \lceil (n+1)/2 \rceil})(b_{\sigma(i), \sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil)} - b_{\sigma(n+2-i), \sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil)}) \leq 0, \quad (37)$$

$$(a_{\lceil (n+1)/2 \rceil, n+2-i} - a_{\lceil (n+1)/2 \rceil, i})(b_{\sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil), \sigma(i)} - b_{\sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil), \sigma(n+2-i)}) \leq 0, \quad (38)$$

где $i \in I_{2,1}^\sigma$. По определению (см. (6)) для $i \in I_{2,1}^\sigma$ выполняются неравенства $2 \leq i \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ и $\sigma(i) < \sigma(n+2-i)$, из которых в силу ограничений (29), (30), имеющих место для матрицы $A = (a_{i,j})$, и неубывания матрицы $B = (b_{i,j})$ вытекают неравенства

$$\begin{aligned} a_{n+2-i,1} - a_{i,1} &\geq 0, & b_{\sigma(i),\sigma(1)} - b_{\sigma(n+2-i),\sigma(1)} &\leq 0, \\ a_{1,n+2-i} - a_{1,i} &\geq 0, & b_{\sigma(1),\sigma(i)} - b_{\sigma(1),\sigma(n+2-i)} &\leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана справедливость (35) и (36). При n четном для произвольного элемента $i \in I_{2,1}^\sigma$ справедливы соотношения

$$2 \leq i \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor < \lceil (n+1)/2 \rceil = \lceil n/2 \rceil,$$

с учетом которых по аналогии убеждаемся в справедливости неравенств

$$\begin{aligned} a_{n+2-i, \lceil (n+1)/2 \rceil} - a_{i, \lceil (n+1)/2 \rceil} &\geq 0, & b_{\sigma(i), \sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil)} - b_{\sigma(n+2-i), \sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil)} &\leq 0, \\ a_{\lceil (n+1)/2 \rceil, n+2-i} - a_{\lceil (n+1)/2 \rceil, i} &\geq 0, & b_{\sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil), \sigma(i)} - b_{\sigma(\lceil (n+1)/2 \rceil), \sigma(n+2-i)} &\leq 0 \end{aligned}$$

для всех $i \in I_{2,1}^\sigma$. Следствиями полученных неравенств, очевидно, являются (37) и (38). Таким образом, доказательство теоремы 3 завершено.

5. Условия сильной разрешимости КЗН и их следствия

В данном разделе сформулирован основной результат данной работы, а именно условия достижения минимума функционала $f_{A,B}$ на подстановке $\sigma_0 = \langle 1, 2, 3, \dots, 6, 4, 2 \rangle$ и приведены два его следствия, являющиеся главными результатами [6], [8]. Таким образом, предлагаемые условия обобщают и унифицируют все имеющиеся на сегодняшний день сильно разрешимые случаи КЗН с монотонными матрицами анти-Монжа и Тёплица, описанные в работах [6]–[15]. Формулируемая ниже основная теорема 4 является прямым следствием теорем 1, 2 и 3.

Теорема 4. Пусть $B = (b_{i,j})$ является неубывающей неполной матрицей анти-Монжа, а $A = (a_{i,j})$ — одновременно 1-аддитивно невозрастающая и 2-аддитивно неубывающая матрица, элементы которой дополнительно удовлетворяют неравенствам (23), (24), (29) и (30). Тогда подстановка $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle$ минимизирует функционал $f_{A,B}$ на S_n .

Доказательство. Из условий теоремы 4 видно, что матрица B — неубывающая неполная матрица анти-Монжа, а A является 1-аддитивно невозрастающей матрицей, удовлетворяющей дополнительно соотношениям (23) и (24). Следовательно, в силу теоремы 2 для

функционала $f_{A,B}$ выполняются неравенства $\Delta f_{A,B}(\sigma, \sigma \circ \psi_\sigma) \leq 0$, где σ — произвольная подстановка, а ψ_σ — подстановка вида (7), связанная с σ .

Далее, так как A одновременно является 2-аддитивно неубывающей матрицей, удовлетворяющей соотношениям (29) и (30), при том же виде матрицы B в силу теоремы 3 для произвольной σ и связанной с ней подстановкой φ_σ вида (7) должно выполняться неравенство $\Delta f_{A,B}(\sigma, \sigma \circ \varphi_\sigma) \leq 0$. Следовательно, для функционала $f_{A,B}$ с матрицами A и B , указанного вида, справедливы неравенства (21) из теоремы 1 для произвольной подстановки σ , то есть подстановка $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle$ минимизирует $f_{A,B}$ на симметрической группе S_n . Таким образом, доказательство теоремы 4 завершено.

Предложенные в теореме 4 условия являются наиболее общими условиями, гарантирующими достижение минимума функционала КЗН на подстановке σ_0 . Эти условия унифицируют все имеющиеся на сегодняшний день сильно разрешимые случаи КЗН, описанные в [6]–[15], для которых гарантирован оптимум на подстановке σ_0 . Следует отметить, что основные результаты [11]–[15], по существу, являются следствиями теоремы о перестановке трех систем [9], [10]. Условия сильной разрешимости КЗН, не являющиеся следствиями этой теоремы, впервые описаны в [6], [7], и позже обобщены в [8].

В [6], [7] показано, что подстановка σ_0 минимизирует функционал $f_{A,B}$ на S_n , если матрица B является монотонно неубывающей матрицей анти-Монжа, а A — симметрическая бивалентная матрица Тёплица. Напомним, что, согласно [6], матрица Тёплица A называется бивалентной, если функция $f: \{-n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, порождающая матрицу A , является бивалентной, то есть удовлетворяет соотношениям

$$f(-i) = f(i), \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad (39)$$

$$f(i) \leq f(i+1), \quad 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1, \quad (40)$$

$$f(i) \leq f(n-i), \quad 1 \leq i \leq \lceil n/2 \rceil - 1. \quad (41)$$

Следствие 1 ([6]). Пусть $B = (b_{i,j})$ — монотонно неубывающая матрица анти-Монжа, а матрица $A = (a_{i,j})$ — бивалентная матрица Тёплица. Тогда подстановка $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle$ минимизирует функционал $f_{A,B}$ на S_n .

Доказательство. Произвольная матрица анти-Монжа $B = (b_{i,j})$ является неполной матрицей анти-Монжа. Поэтому для доказательства следствия 1 достаточно убедиться в том, что бивалентная матрица Тёплица $A = (a_{i,j})$ удовлетворяет условиям 1-аддитивного невозрастания, 2-аддитивного неубывания и дополнительным ограничениям (23), (24) и (29), (30).

Так как $A = (a_{i,j})$ — бивалентная матрица Тёплица, для всех $i, j \in \mathbf{N}_{1,n}$ имеют место равенства $a_{i,j} = f(i-j)$, где f — бивалентная функция, удовлетворяющая соотношениям (39)–(41), из которых следует цепочка равенств

$$\begin{aligned} a_{i,n+1-j} + a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,j} - a_{n+1-i,j} \\ = f(-(n+1-i-j)) + f(-(i-j)) - f(i-j) - f(n+1-i-j) = 0, \\ a_{n+1-i,j} + a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,j} - a_{i,n+1-j} \\ = f(n+1-i-j) + f(-(i-j)) - f(i-j) - f(-(n+1-i-j)) = 0 \end{aligned}$$

для всех $1 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Таким образом, A является 1-аддитивно невозрастающей матрицей.

Покажем теперь, что матрица Тёплица A , порожденная бивалентной функцией f , является 2-аддитивное неубывающей. Действительно, проводя несложные преобразования, убеждаемся, что для произвольных $1 \leq i, j, \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} a_{i,n+2-j} + a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j} - a_{n+2-i,j} \\ = f(-(n+2-i-j)) + f(-(i-j)) - f(i-j) - f(n+2-i-j) = 0, \\ a_{n+2-i,j} + a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j} - a_{i,n+2-j} \\ = f(n+2-i-j) + f(-(i-j)) - f(i-j) - f(-(n+2-i-j)) = 0. \end{aligned}$$

Убедимся теперь в выполнении для бивалентной матрицы Тёплица $A = (a_{i,j})$ дополнительных ограничений (23) и (24). Пусть $1 \leq i \neq j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, тогда в силу определения тёплицевых матриц и выполнения соотношений (39) должны выполняться равенства

$$a_{n+1-i,j} = f(n+1-i-j), \quad a_{i,n+1-j} = f(n+1-i-j), \quad a_{n+1-i,n+1-j} = f(i-j),$$

из которых, в свою очередь, следует справедливость цепочки равенств

$$a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,n+1-j} = f(i-j) - f(n+1-i-j) = a_{n+1-i,n+1-j} - a_{n+1-i,j}$$

для всех $1 \leq i \neq j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Из полученных равенств видно, что бивалентная матрица Тёплица A удовлетворяет соотношениям (23) и (24), если для порождающей ее бивалентной функции f выполняются неравенства

$$f(i-j) - f(n+1-i-j) \leq 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq (n+1)/2. \quad (42)$$

Убедимся в справедливости (42). Возможны только два случая, $n+1-i-j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ либо $n+1-i-j > \lfloor n/2 \rfloor$. В первом случае в силу того, что $1 \leq i \neq j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, выполняются неравенства

$$n+1 \geq 2\lfloor (n+1)/2 \rfloor \geq 2i, \quad n+1 \geq 2\lfloor (n+1)/2 \rfloor \geq 2j.$$

Следствиями этих неравенств и соотношений $n+1-i-j \leq \lfloor n/2 \rfloor$, $i \neq j$ являются неравенства

$$\begin{aligned} \lfloor n/2 \rfloor \geq n+1-i-j \geq i-j > 0, \quad i > j, \\ \lfloor n/2 \rfloor \geq n+1-i-j \geq j-i > 0, \quad j > i, \end{aligned}$$

из которых и из (40) следуют неравенства

$$\begin{aligned} f(i-j) - f(n+1-i-j) \leq 0, \quad 1 \leq j < i \leq \lfloor n/2 \rfloor, \\ f(j-i) - f(n+1-i-j) \leq 0, \quad 1 \leq i < j \leq \lfloor n/2 \rfloor. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость (42) в первом случае доказана.

Во втором случае верны соотношения

$$n+1-i-j = n - (i+j-1) > \lfloor n/2 \rfloor,$$

из которых следует, что

$$i+j-1 \leq n - \lfloor n/2 \rfloor - 1 = \lceil n/2 \rceil - 1.$$

Учитывая полученные соотношения, нетрудно убедиться в том, что для произвольных $i \neq j \geq 1$ справедливы цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \lfloor n/2 \rfloor - 1 &\geq i + j - 1 > i - j > 0, & i > j, \\ \lfloor n/2 \rfloor - 1 &\geq i + j - 1 > j - i > 0, & j > i. \end{aligned} \quad (43)$$

Если при $i > j$ предположить справедливость отрицания соотношений (43), то должны выполняться неравенства $i + j - 1 \leq i - j$ либо $i - j \leq 0$, которые равносильны неравенствам $2j \leq 1$ либо $i \leq j$, что невозможно ввиду того, что $j \geq 1$ и $i > j$. По аналогии доказывается невозможность выполнения неравенств $i + j - 1 \leq j - i$ либо $j - i \leq 0$ при $j > i$, так как они равносильны неравенствам $2i \leq 1$ и $j \leq i$, что противоречит исходным неравенствам $i \geq 1$ и $j > i$. Далее, в силу (40), (41) и (43) для функции f должны выполняться цепочки неравенств

$$\begin{aligned} f(n - (i + j - 1)) &\geq f(i + j - 1) \geq f(i - j), & i > j, \\ f(n - (i + j - 1)) &\geq f(i + j - 1) \geq f(j - i), & j > i, \end{aligned}$$

из которых следуют соотношения

$$\begin{aligned} f(i - j) - f(n - (i + j - 1)) &= f(i - j) - f(n + 1 - i - j) \leq 0, & 1 \leq j < i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \\ f(j - i) - f(n - (i + j - 1)) &= f(j - i) - f(n + 1 - i - j) \leq 0, & 1 \leq i < j \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Таким образом, в обоих случаях доказано выполнение неравенств (42) для биневалентной функции f и, следовательно, справедливость (23) и (24) для порождаемой ею матрицы A .

Для завершения доказательства следствия 1 осталось убедиться в выполнении неравенств (29) и (30) для биневалентной матрицы Тёплица $A = (a_{i,j})$. В силу (39) для A должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} a_{i,n+2-j} - a_{i,j} &= f(i - (n + 2 - j)) - f(i - j) \\ &= f(n + 2 - i - j) - f(i - j) = a_{n+2-i,j} - a_{i,j} \end{aligned}$$

для всех $1 \leq i < j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Из этих равенств следует, что соотношения (29) и (30) будут выполняться для A , если для порождающей ее функции f справедливы неравенства

$$f(n + 2 - i - j) - f(i - j) \geq 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor. \quad (44)$$

Возможны только два случая, $n + 2 - i - j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ либо $n + 2 - i - j > \lfloor n/2 \rfloor$. Пусть имеет место первый случай, то есть $n + 2 - i - j \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда в силу соотношения $1 \leq i \neq j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ должны выполняться неравенства

$$n + 2 \geq 2\lfloor (n+1)/2 \rfloor \geq 2i, \quad n + 2 \geq 2\lfloor (n+1)/2 \rfloor \geq 2j.$$

Следствиями полученных неравенств и неравенства $n + 2 - i - j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ являются цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \lfloor n/2 \rfloor &\geq n + 2 - i - j \geq i - j > 0, & i > j, \\ \lfloor n/2 \rfloor &\geq n + 2 - i - j \geq j - i > 0, & i < j. \end{aligned}$$

Из этих цепочек и (40) следует, что для бивалентной функции f выполняются неравенства

$$f(n+2-i-j) \geq f(i-j), \quad 1 \leq i \neq j \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor.$$

Таким образом, доказана справедливость (44) для бивалентной функции f в случае, когда $n+2-i-j \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Пусть имеет место второй случай, то есть $n+2-i-j = n-(i+j-2) > \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда имеют место соотношения $i+j-2 \leq n - \lfloor n/2 \rfloor - 1 = \lceil n/2 \rceil - 1$, $1 \leq i \neq j$ и $\lceil n/2 \rceil - 1 = \lfloor n/2 \rfloor$, из которых следует справедливость неравенств

$$\begin{aligned} \lfloor n/2 \rfloor &\geq i+j-2 \geq i-j > 0, & i > j, \\ \lfloor n/2 \rfloor &\geq i+j-2 \geq j-i > 0, & i < j. \end{aligned} \quad (45)$$

Действительно, если предположить, что соотношения (45) не имеют места, то есть $i+j-2 < i-j$ либо $i-j \leq 0$, то при $i > j$ будем иметь $2j < 2$, что противоречит неравенству $j \geq 1$, либо $i \leq j$, что противоречит неравенству $i > j$. Если же при $i < j$ имеет место неравенство $i+j-2 < j-i$ либо $j-i \leq 0$, то $2i < 2$ либо $j \leq i$, что невозможно ввиду справедливости неравенств $1 \leq i$ и $i < j$. Из (45) и (40), (41) следует, что

$$\begin{aligned} f(n+2-i-j) &= f(n-(i+j-2)) \geq f(i+j-2) \geq f(i-j), \quad 1 \leq j < i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \\ f(n+2-i-j) &= f(n-(i+j-2)) \geq f(i+j-2) \geq f(j-i), \quad 1 \leq i < j \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость (44) для бивалентной функции f , то есть выполнение (29), (30) для порождаемой ею матрицы A во втором случае.

Таким образом, доказательство следствия 1 завершено.

В работе [8] показано, что для монотонных матриц анти-Монжа B и для аддитивно монотонных матриц A с более жесткими дополнительными ограничениями чем в теореме 4 гарантировано достижение минимума функционала $f_{A,B}$ на подстановке σ_0 .

Следствие 2. ([8]) Пусть $B = (b_{i,j})$ — монотонно неубывающая матрица анти-Монжа, а для элементов матрицы $A = (a_{i,j})$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,n+1-j} &\leq 0, \\ a_{n+1-i,n+1-j} - a_{n+1-i,j} &\leq 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq \lceil n/2 \rceil, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} a_{n+1-i,n+1-j} + a_{n+1-i,j} - a_{i,n+1-j} - a_{i,j} &\leq 0, \\ a_{i,n+1-j} - a_{n+1-i,j} &\leq 0, \quad 1 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} a_{i,n+2-j} - a_{i,j} &\geq 0, \\ a_{n+2-j,i} - a_{j,i} &\geq 0, \quad 1 \leq i \leq \lceil (n+1)/2 \rceil, \\ &\quad 2 \leq j \leq \lceil (n+1)/2 \rceil, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} a_{n+2-i,n+2-j} + a_{n+2-i,j} - a_{i,j} - a_{i,n+2-j} &\geq 0, \\ a_{i,n+2-j} - a_{n+2-i,j} &\leq 0, \quad 2 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor. \end{aligned} \quad (49)$$

Тогда подстановка $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle$ минимизирует функционал $f_{A,B}$ на S_n .

Доказательство. Так как произвольная матрица анти-Монжа $B = (b_{i,j})$ является, очевидно, неполной матрицей анти-Монжа, для доказательства следствия 2 достаточно убедиться в выполнении условий теоремы 4 для матрицы $A = (a_{i,j})$, элементы которой удовлетворяют неравенствам (46)–(49).

Из соотношений (47) следует 1-аддитивное невозрастание по столбцам матрицы A , так как ее элементы удовлетворяют неравенствам

$$a_{n+1-i,n+1-j} + a_{n+1-i,j} - a_{i,n+1-j} - a_{i,j} \leq 0, \quad 1 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor.$$

Далее, прямым следствием (47) являются неравенства

$$a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,j} \leq a_{i,n+1-j} - a_{n+1-i,j} \leq 0, \quad 1 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor,$$

из которых, в свою очередь, следует справедливость неравенств

$$a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,j} \leq a_{n+1-i,j} - a_{i,n+1-j}, \quad 1 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor,$$

то есть 1-аддитивное невозрастание матрицы A по строкам.

По аналогии устанавливается 2-аддитивное неубывание матрицы $A = (a_{i,j})$. Неравенства (49), очевидно, гарантируют выполнение двойных неравенств

$$a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j} \geq a_{i,n+2-j} - a_{n+2-i,j} \geq 0, \quad 2 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor,$$

следствием которых являются неравенства

$$a_{n+2-i,n+2-j} - a_{i,j} \geq a_{n+2-i,j} - a_{i,n+2-j}, \quad 2 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor,$$

то есть матрица A является 2-аддитивно неубывающей по строкам. Далее, так как элементы матрицы A удовлетворяют неравенствам

$$a_{n+2-i,n+2-j} + a_{n+2-i,j} - a_{i,j} - a_{i,n+2-j} \geq 0, \quad 2 \leq i, j \leq \lfloor n/2 \rfloor,$$

матрица A является 2-аддитивно неубывающей по столбцам. Наконец, из соотношений (46) и (48) непосредственно следует выполнение дополнительных ограничений (23), (24) и (29), (30) для элементов матрицы A . Таким образом, установлено, что для матрицы A , подчиненной требованиям (46)–(49), выполняются условия теоремы 4 и, следовательно, для рассматриваемых матриц A и B функционал $f_{A,B}$ достигает свой минимум на подстановке σ_0 . Таким образом, справедливость следствия 2 доказана.

6. Заключение

В работе описаны условия, гарантирующие достижения оптимума функционала $f_{A,B}$, определяемого парой матриц A и B , на заданной подстановке σ_0 . Предложенные условия выделяют в матричном пространстве два класса матриц, которые обобщают и унифицируют все известные условия сильной разрешимости КЗН с монотонными матрицами анти-Монжа и Тёплица, рассмотренные в [6]–[15], включая известную теорему о перестановке трех систем. Один из классов порождается 1,2-аддитивно монотонными матрицами вида A , которые удовлетворяют дополнительным ограничениям и включает в себя наиболее широкое множество матриц, описанное в [8]. Введенное понятие аддитивной монотонности матриц является естественным обобщением фольклорного понятия монотонности

матриц, используемого в [6]. Невозрастающие неполные матрицы анти-Монжа образуют второй класс матриц, включающий класс одноименных монотонных матриц, введенный впервые в [6], [7].

С помощью описанных классов, свойства линейности функционала $f_{A,B}$, свойств перенумерованных матриц вида $((A)^\sigma)^\rho = A^{\rho \circ \sigma}$ и $(A^\sigma, B^\rho) = (A, B^{\sigma^{-1} \circ \rho})$, можно строить представительные классы матриц, образующие в матричном пространстве специального вида конусы, для которых гарантировано достижение оптимума на произвольной подстановке из симметрической группы S_n . Такие классы матриц можно использовать при разработке приближенных и эвристических алгоритмов, проведении вычислительных экспериментов с целью оценки их быстродействия и оценки качества получаемых решений, а также при апробации точных методов решения КЗН.

Список литературы

1. Lawler L. E., The quadratic assignment problem. *Manage. Sci.* (1963) **9**, 586–599.
2. Pardalos P., Rendl F., Wolkowicz H., The quadratic assignment problem: A survey and recent developments. *DIMACS, Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* (1994) **16**, 1–42.
3. Burkard R. E., Çela E., Demidenko V. M., Metelski N. N., Woeginger G. J., *Perspectives of easy and hard cases of the quadratic assignment problem*. Report №104, Techn. Univ. Graz, 1997.
4. Burkard R. E., Klinz B., Rudolf R., Perspectives of Monge properties in optimization. *Discrete Appl. Math.* (1996) **70**, 95–161.
5. Koopmans T. C., Beckmann M. J., Assignment problems and the location of economic activities. *Econometrica* (1957) **25**, 53–76.
6. Burkard R. E., Çela E., Rote R., Woeginger G. J., The quadratic assignment problem with an anti-Monge and a Toeplitz matrix: easy and hard cases. *Math. Program.* (1998) **82**, 125–158.
7. Çela E., Woeginger G. J., *A note on the maximum of a certain bilinear form*. Report №8, Techn. Univ. Graz, 1994.
8. Демиденко В. М., Обобщение условий сильной разрешимости квадратичной задачи о назначениях с матрицами анти-Монжа и Тёплица. *Докл. НАН Беларуси* (2003) **47**, №2, 15–18.
9. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Поля Г., *Неравенства*. ГИИЛ, Москва, 1948.
10. Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. The maximum of a certain bilinear form. *Proc. London Math. Soc.* (1926) **25**, 265–282.
11. Тимофеев Б. Б., Литвинов В. А., Об экстремальных значениях квадратичной формы. *Кибернетика*. (1969) №4, 56–61.
12. Vickson R. G., Lu X., Optimal product and server locations in one-dimensional storage racks. *European J. Oper. Res.* (1998), **105**, 18–28.
13. Бурков В. Н., Рубинштейн М. И., Соколов В. Б., Некоторые проблемы в оптимизации размещения больших томов памяти. *Автоматика и телемеханика* (1969) №9, 83–91.
14. Метельский Н. Н., Об экстремальных значениях квадратичной формы на симметрической группе. *Изв. АН Белорусской ССР. Сер. физ.-мат. наук.* (1972) №6, 107–110.
15. Pratt V. R., An $N \log N$ algorithm to distribute N records optimally in a sequential access file. In: *Complexity of computer computations*. Plenum, New York, 1972, pp. 111–118.
16. Супруненко Д. А., *Группы подстановок*. Наука и техника, Минск, 1996.

Статья поступила 28.12.2004.