Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Акишин, О группах четного порядка с автоморфизмами, порождающими рекуррентные последовательности максимального периода, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 4, 15–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:20:59

О группах четного порядка с автоморфизмами, порождающими рекуррентные последовательности максимального периода

© 2014 г. А. В. Акишин*

Пусть G — конечная группа, f — автоморфизм группы G . Тогда автоморфизм f задает рекуррентную последовательность $\{a_i\}_0^\infty$ на группе G , уравнением $a_{i+1} = f(a_i)$. Если a_0 — начальный элемент этой последовательности, то ее период не превышает числа элементов порядка, равного порядку a_0 . Таким образом, определенный интерес вызывает вопрос о существовании групп, у которых такая последовательность при некотором автоморфизме имеет максимально возможный период для любого начального состояния.

В статье продолжаются исследования групп, допускающих автоморфизмы максимального периода. Ранее был рассмотрен случай групп нечетного порядка. Оказалось, что такие группы необходимо являются абелевыми, и описана их структура. Здесь рассматриваются группы четного порядка и заканчивается описание конечных групп, допускающих автоморфизмы максимального периода.

Ключевые слова: группы, автоморфизмы, рекуррентные последовательности.

1. Введение

Изучение автоморфизмов групп и зависимости свойств группы от свойств группы ее автоморфизмов являются важными задачами в связи с широким применением автоморфизмов в различных прикладных вопросах, в частности, в криптографии. Одним из широко известных применений автоморфизмов в криптографических приложениях являются регистры сдвига с линейной обратной связью [6, 5, 3, 4, 8]. В настоящее время регистры сдвига с линейной обратной связью в том или ином виде используются как составные части поточных алгоритмов шифрования [9, 10, 11].

В общем виде регистр сдвига с n ячейками и линейной обратной связью над полем F можно представить как линейное преобразование A векторного пространства V над полем F размерности n . При этом для приложений наиболее важным является случай, когда линейное преобразование A обратимо, то есть является автоморфизмом векторного пространства V . Однако пространство V можно рассматривать и как абелеву группу, изоморфную прямому произведению n экземпляров аддитивных

*Место работы: Московский институт радиотехники, электроники и автоматики,
e-mail: sd45ki91@yandex.ru

групп поля F . В этом случае линейное преобразование A является автоморфизмом этой группы.

В приложениях регистры сдвига применяются, как правило, в качестве генераторов исходной гаммы, которая затем подвергается усложнению. В качестве примеров можно привести генератор Геффе [12], генератор Дженнингса [14], старт-стопный [13], пороговый и другие генераторы. При этом основным требованием к регистру сдвига является обеспечение большого периода вырабатываемой им последовательности.

В связи с этим уместно поставить вопрос о существовании групп с автоморфизмами максимального периода, то есть автоморфизмами, у которых все элементы группы одного порядка лежат на одном цикле. Отметим, что такие автоморфизмы являются регулярными (то есть не имеют неподвижных точек, за исключением единичного элемента) и также представляют самостоятельный интерес [2, 7]. Этот вопрос был поставлен в работе [1], где было получено полное описание конечных абелевых групп с автоморфизмами максимального периода и показано, что все конечные группы нечетного порядка с автоморфизмами максимального периода являются абелевыми. В настоящей работе продолжаются исследования групп с автоморфизмами максимального периода и рассматриваются конечные группы четного порядка.

2. О строении групп четного порядка

Сначала напомним некоторые определения.

Пусть G — конечная группа. Символом $|a|$ будем обозначать порядок элемента $a \in G$, а через C_n обозначим циклическую группу порядка n .

Аutomорфизм f группы G назовем *автоморфизмом максимального периода*, если для любых двух таких элементов $a, b \in G$, что $|a| = |b|$, существует целое число n , для которого

$$f^n(a) = b.$$

Иначе говоря, если рассматривать автоморфизм как подстановку на элементах группы, то у автоморфизма максимального периода все элементы одного порядка лежат на одном его цикле.

Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть G — конечная 2-группа, обладающая автоморфизмами максимального периода. Тогда группа G абелева.*

Доказательство. Пусть f — автоморфизм максимального периода группы G , a — элемент максимального порядка. Если $|a| = 2$, то для любого элемента $x \in G$ выполняется равенство $x^2 = e$, откуда следует, что группа G является элементарной абелевой группой. Рассмотрим случай, когда $|a| > 2$.

Сначала заметим, что если $x \in G$ — произвольный элемент, то найдется такой элемент $b \in G$, что $x = b^{2^k}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, и $|b| = |a|$. Отсюда следует, что для доказательства леммы достаточно показать, что любые два элемента максимального порядка группы G коммутируют.

Итак, пусть b — еще один элемент максимального порядка. Покажем сначала, что $a^2b = ba^2$. Действительно, пусть n — такое целое число, что $f^n(a) = a^{-1}$. Так как $|a| > 2$, то $a^{-1} \neq a$. Тогда, так как $|b| = |a|$ и $|aba^{-1}| = |a|$, то $f^n(b) = b^{-1}$ и

$f^n(aba^{-1}) = (aba^{-1})^{-1}$. Имеем

$$aba^{-1} = (ab^{-1}a^{-1})^{-1} = f^n(ab^{-1}a^{-1}) = f^n(a)f^n(b^{-1})f^n(a^{-1}) = a^{-1}ba,$$

значит, $a^2b = ba^2$. В соответствии со сделанным выше замечанием отсюда следует, что элемент a^2 коммутирует со всеми элементами максимального порядка группы G , а следовательно, и со всеми элементами группы G . Иными словами, $a^2 \in Z(G)$ — элемент центра. Более того, если $c \in G$ и $|c| < |a|$, то $c \in Z(G)$.

Рассмотрим теперь элемент ab . Возможны два варианта:

- 1) $|ab| < |a|$,
- 2) $|ab| = |a|$.

В первом случае элемент ab лежит в центре группы G , и тогда

$$ab = a^{-1}(ab)a = ba.$$

Во втором случае из равенства

$$ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = f^n(ab^{-1}) = f^n(a)f^n(b^{-1}) = a^{-1}b$$

следует, что $ab = ba$. Это завершает доказательство леммы.

В работе [1] были доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть G — конечная группа четного порядка, f — автоморфизм группы G максимального периода. Тогда множество H всех элементов нечетного порядка группы G является абелевой нормальной подгруппой, допустимой относительно автоморфизма f .

Теорема 2. Конечная абелева p -группа G обладает автоморфизмами максимального периода тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из следующих групп:

- 1) C_p^m ,
- 2) C_{p^m} , $p \neq 2$,
- 3) C_4 .

Следствие 1. Порядок группы четного порядка, обладающей автоморфизмом максимального периода, равен $2^n p^m$, где $p > 2$ — простое число, n и m — некоторые натуральные числа. При этом ее силовская p -подгруппа нормальна.

Используя теорему 1 и следствие, из нее докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть G — группа порядка $2^n p^m$, где $p > 2$ — простое число, обладающая автоморфизмом f максимального периода. Тогда возможны только следующие случаи¹:

- 1) $G \simeq C_2^n \rtimes C_p^m$,
- 2) $G \simeq C_2^n \rtimes C_{p^m}$,
- 3) $G \simeq C_4 \rtimes C_p^m$,
- 4) $G \simeq C_4 \rtimes C_{p^m}$.

Доказательство. В самом деле, в соответствии с теоремой 1 силовская p -подгруппа H является абелевой нормальной подгруппой, допустимой относительно автоморфизма f . Следовательно, как показано в [1], для H возможны только два случая: $H \simeq C_p^m$ и $H \simeq C_{p^m}$.

¹Здесь значком $\rtimes$ обозначается полупрямое произведение групп.

Далее, если через K обозначить силовскую 2-подгруппу группы G , то из условий $K \cap H = \{e\}$ и $KH = G$ следует, что $G \simeq K \ltimes H$. Таким образом для завершения доказательства достаточно получить описание подгруппы K .

Рассмотрим факторгруппу G/H и определим на ней отображение φ правилом

$$\varphi(xH) = f(x)H.$$

То, что отображение φ является автоморфизмом, очевидно. Так как $G/H \simeq K$, то, с учетом результатов работы [1] и леммы 1, для доказательства теоремы достаточно показать, что φ является автоморфизмом максимального периода на G/H .

Пусть xH и yH – два элемента из G/H одного порядка 2^k для некоторого натурального k . Тогда

$$x^{2^k} \in H \text{ и } y^{2^k} \in H,$$

т. е. $|x| = 2^k p^s$ и $|y| = 2^k p^t$ для некоторых целых $s, t \geq 0$. Пусть $x^{2^k} = a$ и $y^{2^k} = b$, где $a, b \in H$. Так как порядки элементов a и b являются степенями простого числа p , то существуют такие $a_1 \in \langle a \rangle$ и $b_1 \in \langle b \rangle$, что $a_1^{2^k} = a$ и $b_1^{2^k} = b$. Отметим, что при этом выполняются равенства

$$a_1 x = x a_1 \text{ и } b_1 y = y b_1.$$

Так как $a_1, b_1 \in H$, то $x a_1^{-1} \in xH$ и $y b_1^{-1} \in yH$. Кроме того,

$$(x a_1)^{2^k} = x^{2^k} a_1^{2^k} = a^{2^k} a^{-2^k} = e$$

и

$$(y b_1)^{2^k} = y^{2^k} b_1^{2^k} = b^{2^k} b^{-2^k} = e.$$

Так как f – автоморфизм максимального периода и элементы $x a_1^{-1}$ и $y b_1^{-1}$ имеют равные порядки, то существует такое целое число t , что $f^t(x a_1^{-1}) = y b_1^{-1}$. Но тогда

$$\varphi^t(xH) = yH,$$

т. е. φ действительно является автоморфизмом максимального периода группы G/H . Наконец, из существования изоморфизма $G/H \simeq K$ следует, что группа K обладает автоморфизмами максимального периода. Теперь доказательство теоремы следует из леммы 1.

3. Группы порядка $2p^m$

Рассмотрим сначала группы порядка $2p^m$. Как следует из теоремы 3, для таких групп возможны только два варианта, а именно $C_2 \ltimes C_{p^m}$ и $C_2 \times C_{p^m}$. Описание групп типа $C_2 \ltimes C_{p^m}$, обладающих автоморфизмами максимального периода, было получено в работе [1], где доказано следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть G – группа с автоморфизмом максимального периода, причем $|G| = 2p^m$ и силовская p -подгруппа группы G циклическая. Тогда $G \simeq C_2 \times C_{p^m}$.

Рассмотрим группы второго типа.

Лемма 3. Пусть G – группа с автоморфизмом f максимального периода, причем $G \simeq C_2 \ltimes C_{p^m}$. Тогда $G \simeq C_2 \times C_{p^m}$.

Доказательство. Так как $G \simeq C_2 \times C_p^m$, то любой элемент группы G можно однозначно представить в виде ax , где $a \in C_2$, а $x \in C_p^m$.

Пусть a – элемент второго порядка и пусть $f(a) = ax$, где $x \in C_p^m$ – некоторый элемент порядка p . Тогда $|ax| = 2$, и из равенства

$$(ax)^2 = (ax)(ax) = e$$

следует, что

$$axa^{-1} = x^{-1}.$$

Далее, если $f(x) = y$, то

$$f^2(a) = f(ax) = axy,$$

причем axy также является элементом второго порядка. Отсюда, с учетом равенства $axa^{-1} = x^{-1}$, сразу получаем

$$a(xy)a^{-1} = (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = x^{-1}(aya^{-1}),$$

откуда

$$aya^{-1} = y^{-1}.$$

При этом элемент ay является элементом второго порядка. Перебирая последовательно степени автоморфизма f , мы получим, что для любого элемента $z \in C_p^m$ выполняется равенство $aza^{-1} = z^{-1}$ и элемент az является элементом второго порядка.

Таким образом, группа G содержит один элемент порядка 1, $p^m - 1$ элементов порядка p и p^n элементов порядка 2 (это сам элемент a и $p^m - 1$ элементов вида ax , где $x \in C_p^m$).

Положим $N = p^m$; пусть $x_1 = x, x_2, \dots, x_{N-1}$ – все элементы порядка p , причем $f(x_i) = x_{i+1}$ для $i = 1, 2, \dots, N-2$ и $f(x_{N-1}) = x_1$. Рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned} a \\ f(a) &= ax_1, \\ f^2(a) &= f(a)f(x_1) = ax_1x_2, \\ f^3(a) &= f(a)f(x_1)f(x_2) = ax_1x_2x_3, \\ &\dots \\ f^N(a) &= a = ax_1x_2 \dots x_{N-1}x_1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(x_1x_2 \dots x_{N-1})x_1 = e,$$

но так как в произведение, стоящее слева в скобках, входят все элементы группы G порядка p по одному разу, то это произведение равно единице, то есть $x_1 = e$, что противоречит нашему предположению.

Это означает, что группа G содержит единственный элемент второго порядка, а именно, элемент a . Но тогда $axa^{-1} = a$ для любого $x \in C_p^m$, то есть $ax = xa$ и группа G абелева, что и завершает доказательство.

Из лемм 2 и 3 сразу следует теорема, дающая полное описание всех групп порядка $2p^m$, обладающих автоморфизмами максимального периода.

Теорема 4. Пусть G – группа порядка $2p^m$, обладающая автоморфизмом максимального периода. Тогда G – абелева группа одного из следующих двух типов:

- 1) $C_2 \times C_p^m$,
- 2) $C_2 \times C_{p^m}$.

4. Группы порядка $4p^m$ с циклической силовой 2-подгруппой

Теперь рассмотрим группы порядка $4p^m$, у которых силовая 2-подгруппа циклическая, то есть группы типов $C_4 \times C_{p^m}$ и $C_4 \rtimes C_{p^m}$ для некоторого простого $p > 2$. Начнем со следующего утверждения.

Лемма 4. Пусть G – группа типа $C_4 \times C_{p^m}$ или $C_4 \rtimes C_{p^m}$, обладающая автоморфизмом f максимального периода. Тогда группа G абелева.

Доказательство. Пусть $C_4 = \langle a \rangle$. Покажем, что если b – любой элемент из силовой p -подгруппы группы G , то выполняется равенство $ab^2 = b^2a$, откуда и будет следовать доказываемое утверждение.

Отметим, что $a^{-1} \neq a$ и, так как f – автоморфизм максимального периода, то существуют такие целые числа n и m , что

$$f^n(a) = a^{-1} \text{ и } f^m(b) = b^{-1}.$$

Пусть $d = [n, m]$ – наименьшее общее кратное чисел n и m . Тогда если $d = nd_1 = md_2$, то числа d_1 и d_2 не могут быть четными одновременно. Более того, d_2 всегда является нечетным. В самом деле, число силовских 2-подгрупп в группе G равно p^t для некоторого $t \leq m$, то есть группа G содержит $2p^t$ элементов четвертого порядка (образующие соответствующих силовских подгрупп). Это означает, что $n = p^t$, а тогда d_2 нечетно. Поэтому рассмотрим два варианта.

1) Пусть d_1 – нечетное, d_2 – нечетное. Тогда, так как $|a| = |bab^{-1}|$, то

$$ba^{-1}b^{-1} = f^d(bab^{-1}) = b^{-1}a^{-1}b,$$

откуда следует, что $b^2a = ab^2$. Так как $(|b|, 2) = 1$, то отсюда следует, что $ba = ab$ и, в частности, $a^2b = ba^2$.

2) Пусть d_1 – четное и d_2 – нечетное. Тогда, так как $|a| = |bab^{-1}|$, то

$$bab^{-1} = f^d(bab^{-1}) = b^{-1}ab,$$

откуда следует, что $b^2a = ab^2$. Отсюда, как и выше, получаем, что $ba = ab$.

Таким образом, во всех возможных вариантах оказывается, что $ab = ba$, то есть группа G абелева.

Следствие 2. Группы порядка $4p^m$ с циклической силовой 2-подгруппой не имеют автоморфизмов максимального периода.

Доказательство. В самом деле, группа, удовлетворяющая условиям, является абелевой, а все абелевы группы, обладающие автоморфизмами максимального периода, описаны в теореме 3.

5. Группы порядка $2^n p^m$

Рассмотрим теперь группы порядка $2^n p^m$, у которых силовая 2-подгруппа является элементарной абелевой 2-группой, то есть группы типов $C_2^n \times C_{p^m}$ и $C_2^n \rtimes C_{p^m}$.

Предложение 1. Пусть G – группа типа $C_2^n \times C_{p^m}$ или $C_2^n \rtimes C_{p^m}$. Тогда она содержит нечетное число элементов второго порядка.

Доказательство. В самом деле, любой элемент группы G однозначно представляется в виде ab , где $a \in C_2^n$ и b – элемент из силовой p -подгруппы. При этом, если элемент ab имеет порядок 2, то есть если $(ab)^2 = e$, то $aba^{-1} = b^{-1}$ (так как $a^2 = e$, то $a = a^{-1}$). При этом для любого целого числа k выполняется равенство $ab^k a^{-1} = b^{-k}$, то есть элемент ab^k также является элементом второго порядка. Так как b порождает подгруппу порядка p^t при некотором $t \leq m$, то эта подгруппа содержит четное число неединичных элементов. Следовательно, для фиксированного элемента a второго порядка число элементов группы G вида ab^k четно.

Подгруппа C_2^n содержит $2^n - 1$ элементов второго порядка. При этом каждому элементу $a \in C_2^n$ соответствует четное число (возможно, нуль) элементов вида ab . Следовательно, всего группа G содержит нечетное число элементов второго порядка.

Теперь мы можем доказать следующую теорему, завершающую классификацию конечных групп, обладающих автоморфизмами максимального периода.

Теорема 5. *Группа G типа $C_2^n \rtimes C_{p^m}$ или $C_2^n \rtimes C_p^m$, обладающая автоморфизмом максимального периода, абелева.*

Доказательство. Действительно, пусть $a \in C_2^n$ и b – элемент силовой p -подгруппы. Так как f – автоморфизм максимального периода, то существуют такие целые числа s и t , что

$$f^s(a) = a \text{ и } f^t(b) = b^{-1},$$

причем s нечетно, так как G содержит нечетное число элементов второго порядка. Пусть $d = [s, t]$ – наименьшее общее кратное чисел s и t . Тогда если $d = sd_1 = td_2$, то d_2 является нечетным. Рассмотрим два варианта.

1) Пусть d_1 – нечетное, d_2 – нечетное. Тогда, так как $|a| = |bab^{-1}|$, то

$$bab^{-1} = f^d(bab^{-1}) = b^{-1}ab,$$

откуда следует, что $b^2a = ab^2$. Так как $(|b|, 2) = 1$, то отсюда следует, что $ba = ab$.

2) Пусть d_1 – четное и d_2 – нечетное. Тогда, так как $|a| = |bab^{-1}|$, то

$$bab^{-1} = f^d(bab^{-1}) = b^{-1}ab,$$

откуда следует, что $b^2a = ab^2$. Отсюда, как и выше, получаем, что $ba = ab$.

Таким образом, во всех возможных вариантах оказывается, что $ab = ba$, то есть группа G абелева.

Собирая полученные результаты, сформулируем теорему, дающую полное описание всех конечных групп, обладающих автоморфизмами максимального периода.

Теорема 6. *Пусть G – конечная группа, обладающая автоморфизмами максимального периода. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:*

- 1) C_p^n , p – простое число,
- 2) C_4 ,
- 3) C_{p^n} , p – простое число, $p \neq 2$,
- 4) $C_2^n \times C_p^m$, p – простое число, $p \neq 2$ и $(2^n - 1, p^m - 1) = 1$,
- 5) $C_2^n \times C_{p^m}$, p – простое число, $p \neq 2$ и $(2^n - 1, p^{m-1}(p - 1)) = 1$.

Список литературы

1. Акишин А.В., “Группы с автоморфизмами, порождающими рекуррентные последовательности максимального периода”, *Дискретная математика*, **26**:1 (2014), 3–9.
2. Глухов М.М., Ларин С.В., “Абелевы и метабелевы группы с регулярными автоморфизмами и полуавтоморфизмами”, *Математические заметки*, **1**:2 (1972), 727–738.
3. Кузьмин А.С., Куракин В.Л., Нечаев А.А., “Псевдослучайные и полилинейные последовательности”, *Труды по дискретной математике*, **1** (1997), 139–202.
4. Кузьмин А.С., Маршалко Г.Б., Нечаев А.А., “Восстановление линейной рекурренты над примарным кольцом вычетов по ее усложнению”, *Математические вопросы криптографии*, **1**:2 (2010), 31–56.
5. Кузьмин А.С., Нечаев А.А., “Линейные рекуррентные последовательности над кольцами Галуа”, *Успехи математических наук*, **48**:1 (1993), 167–168.
6. Лидл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля*, том 2, М.: “Мир”, 1988.
7. Макаренко М.Ю., Хухро Е.И., “Конечные группы с почти регулярным автоморфизмом порядка четыре”, *Алгебра и логика*, **45**:5 (2006), 575–602.
8. Нечаев А.А., “Линейные рекуррентные последовательности над коммутативными кольцами”, *Дискретная математика*, **3**:4 (1991), 105–127.
9. Babbage S., Dodd M., “The MICKEY stream ciphers:”, *In: The eSTREAM Finalists*, Springer, 2008, 191–209.
10. Berbain C., Billet O., Canteaut A., Courtois N., Debraize B., Gilbert H., Goubin L., Gouget A., Granboulan L., Lauradoux C., Minier M., Pornin T., Siber H., “DECIM v2”, *In: The eSTREAM Finalists*, Springer, 2008, 140–151.
11. De Cannière C. “Trivium: A stream cipher construction inspired by block cipher design principles”, *ISC’2006, Lect. Notes Comput. Sci.*, **4176** (2006), 171–186.
12. Geffe R.R., “How to protect data with ciphers that really hard to break”, *Electronics*, **64**:1 (1973), 99–101.
13. Günther C.G., “Alternating step generators controlled by de Bruijn sequences”, *EUROCRYPT’87, Lect. Notes Comput. Sci.*, **304** (1988), 5–14.
14. Jennings S.M., “Autocorrelation function of the multiplexed sequence”, *IKE Proceedings*, **131**:2 (1984), 169–172.

Статья поступила 23.05.2014.